W. W. BATYGIN / I. N. TOPTYGIN

AUFGABENSAMMLUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

W.W. BATYGIN / I.N. TOPTYGIN

AUFGABENSAMMLUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BATYGIN
TOPTYGIN

AUFGABENSAMMLUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON ROBERT ROMPE UND ERNST SCHMUTZER

BAND 37

AUFGABENSAMMLUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK

VON

W. W. BATYGIN UND I. N. TOPTYGIN



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1965

Владимир Владимирович Батыгин, Игорь Николаевич Топтыгин
Сборник задач по электродинамике
под ред. М. Бредова
Государственное издательство физико-математической литературы
Москва 1962

Ins Deutsche übertragen von Dipl.-Phys. Jürgen Burmeister
Wissenschaftliche Bearbeitung: Dr. Manfred Porsch
Verantwortlicher Verlagslektor: Dipl.-Math. Ralf Sube

1. Auflage

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/48/65
Schutzumschlag: Hartwig Hoeftmann
Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)
ES 18 B 6

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Die verbreiteten Anwendungen der Elektrotechnik, Nachrichtentechnik und Elektronik in den verschiedensten Zweigen der Volkswirtschaft stellen einen großen Kreis von Spezialisten (Elektroingenieure, Ingenieure für Beschleunigungsanlagen, Kerntechnik, Elektronik, Automatisation usw.) vor die Aufgabe, die Methoden zur Lösung elektrodynamischer Probleme aktiv zu beherrschen. Vorlesungen über Elektrodynamik werden daher zur Zeit nicht nur an Universitäten, sondern in dieser oder jener Form auch an einer Reihe von Technischen Hochschulen und von Ingenieur- und Fachschulen gehalten. Leider gibt es aber weder in der in- noch in der ausländischen Literatur ein Lehr- und Nachschlagebuch auf modernem Niveau, das einen genügend großen Kreis von Fragen behandelt und nicht nur den Studenten hilft, sich mit der praktischen Rechentechnik in der Elektrodynamik vertraut zu machen, sondern auch denen als Hilfsmittel dient, die bereits in der Industrie arbeiten und im Rahmen ihrer Tätigkeit derartige Rechnungen durchzuführen haben. Die Entwicklung eines solchen Buches über „Praktische Elektrodynamik“ ist eine sehr wichtige und komplizierte Aufgabe.

Selbstverständlich kann das hier vorgelegte Buch nicht den Anspruch erheben, diese Lücke zu füllen; es erschien aber zumindest wünschenswert, einen Schritt in dieser Richtung zu tun und eine Aufgabensammlung zu schaffen, die nicht nur ein rein akademisches Lehrbuch für Studenten darstellt, sondern auch für den angeführten großen Kreis von Praktikern als Demonstration der Lösungsmethoden für die sie interessierenden Probleme nützlich ist. Dem gestellten Ziel entsprechend bemühten sich die Autoren, eine wenn auch nur konspektive Darstellung der Lösungsmethoden und der erhaltenen Ergebnisse vom Standpunkt ihrer möglichen Anwendungen auf andere verwandte Probleme zu geben. Jedem Abschnitt ist eine kurze theoretische Einleitung vorangestellt, die es gestattet, sich ohne Zuhilfenahme der Literatur über die erforderlichen Grundlagen zu orientieren.

Um alle Gebiete der Elektrodynamik möglichst vollständig zu erfassen, enthält diese Aufgabensammlung auch bekannte „klassische“ Aufgaben, die bereits in anderen Lehrbüchern zu finden sind; gleichzeitig wurden jedoch, soweit möglich, moderne Stoffgebiete herangezogen.

In dem Rahmen, den der Umfang des Buches zuließ, wurde das mathematische Rüstzeug sowohl direkt in den Aufgaben als auch im Anhang beschrieben (mit Ausnahme der Anwendungen der Funktionentheorie, die in der Literatur sehr ausführlich behandelt wird).

Mit Rücksicht darauf, daß die vorliegende Aufgabensammlung den ersten Versuch zur Schaffung eines derartigen Lehrmittels darstellt, ist sie selbstverständlich nicht von Mängeln frei. Deshalb sind wir den Lesern für kritische Bemerkungen stets besonders dankbar.

M. Bredow

VORWORT

Die vorliegende Aufgabensammlung ist in erster Linie für Physikstudenten bestimmt und wurde unter Berücksichtigung der vorhandenen Bücher über Elektrodynamik zusammengestellt. Sie kann an ingenieur-physikalischen Fakultäten der Hochschulen, physikalischen Fakultäten der Universitäten und pädagogischen Hochschulen sowie nachrichtentechnischen und anderen Fakultäten, an denen die Theorie des elektromagnetischen Feldes gelehrt wird, als Lehrbuch benutzt werden. Ein Teil der Aufgaben kann auch für diejenigen von Nutzen sein, die sich mit vertiefenden Studien elektrodynamischer Probleme beschäftigen.

Die Sammlung enthält 741 Aufgaben über die Hauptgebiete der klassischen Elektrodynamik und ihre wichtigsten Anwendungen, darunter mehr als 150 Aufgaben über spezielle Relativitätstheorie sowie etwa 70 Aufgaben und Beispiele über Vektor- und Tensorrechnung.

Außer den Aufgaben, die die Grundbegriffe und -gesetze der Elektrodynamik veranschaulichen und mit einfachen mathematischen Methoden gelöst werden können, enthält das Buch auch zahlreiche schwierigere Aufgaben (letztere sind mit einem Stern gekennzeichnet). Einige von diesen erfordern umfangreiche Rechnungen, andere haben theoretische Fragen zum Gegenstand, die gewöhnlich nicht in der Vorlesung behandelt werden (Wellenausbreitung in anisotropen und gyrotropen Medien, Bewegung geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld, Darstellung des elektromagnetischen Feldes durch ein System von Oszillatoren usw.). Schließlich sind Aufgaben enthalten, in denen Gebiete analysiert werden, die in den vorhandenen Lehrbüchern wenig Beachtung finden: Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie (Kap. 13), Anwendung der Erhaltungssätze auf die Analyse von Stoß- und Zerfallsprozessen von Teilchen (Kap. 11, Abschnitt 1), ferromagnetische Resonanz (Kap. 6, Abschnitt 3) usw.

Im Abschnitt „Lösungen“ werden die meisten Aufgaben ausführlich besprochen; zu vielen Aufgaben werden die Lösungen angegeben. Jeder Abschnitt beginnt mit einer kurzen theoretischen Einleitung, die die benötigten Formeln enthält. Diese Darstellungen erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit; genauere Untersuchungen der entsprechenden Fragen findet der Leser in der Literatur, auf die jeweils am Ende eines Kapitels hingewiesen wird.

In den Aufgaben werden überall die Gaussschen absoluten Einheiten benutzt, da sie in der physikalischen Literatur am häufigsten auftreten. Es wurden die allgemein üblichen Bezeichnungen angewandt. Nicht immer war es jedoch zu vermeiden, daß für verschiedene Größen dasselbe Symbol (und umgekehrt) verwendet werden mußte. Das dürfte jedoch nicht zu Mißverständnissen führen, da in den theoretischen Einleitungen die in den entsprechenden Kapiteln oder Abschnitten benutzten Symbole angegeben werden.

Der mathematische Anhang enthält Angaben über die δ-Funktion sowie die Zylinder- und Kugelfunktionen, die zur Lösung der Aufgaben erforderlich sind. In allen Fällen, in denen spezielle mathematische Formeln benötigt werden, die nicht im Anhang behandelt werden, sowie bei der Berechnung einiger Integrale wird auf die Tafeln von RYSHIK und GRADSTEIN verwiesen.

Für die Vorarbeiten dienten die Erfahrungen beim Elektrodynamikunterricht an der physikalisch-mechanischen und nachrichtentechnischen Fakultät des Leningrader Polytechnischen Instituts als Grundlage. Ein großer Teil der angeführten Aufgaben wurde von Studenten des dritten und vierten Studienjahres in den praktischen Übungen, bei der Anfertigung von Belegen, als Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad sowie in Prüfungen und Examen gerechnet.

Bei der Zusammenstellung des Manuskriptes benutzten wir die Bücher von LANDAU und LIFSCHIZ, TAMM, FRENKEL, BECKER, SMYTHE, STRATTON u.a. sowie viele Monographien, Übersichten und Originalarbeiten. Eine Reihe nützlicher Aufgaben, die in diesen Werken enthalten sind, wurden in die Sammlung aufgenommen.

Die Autoren danken Herrn Prof. L.E. GUREWITSCH für seine außerordentlich wertvollen Diskussionen über den Stoff des Buches, Herrn Prof. G.J. DSHANELIDSE und Herrn Prof. I.M. SCHMUSCHKEWITSCH für ihre Unterstützung und ihr Interesse an der Arbeit sowie für die Durchsicht einiger Kapitel des Manuskriptes. Ferner danken die Autoren den Herren W. N. GRIBOW, A.S. DOLGINOW, N.W. DUSCHIN, O.W. KONSTANTINOW, Prof. M. I. KONTOROWITSCH und W.I. PEREL für die Durchsicht verschiedener Kapitel im Manuskript und wertvolle kritische Bemerkungen sowie Herrn A.G. GUREWITSCH für die Erlaubnis, das Manuskript seines Buches „Ferrite im UHF-Bereich" zu benutzen, und Frau W.W. MASLENNIKOWA für die Hilfe bei der Auswahl der Aufgaben. Den Herren WIT. W. BATYGIN und WAS. W. BATYGIN danken die Autoren für ihre wertvolle Unterstützung bei der Vorbereitung des Manuskriptes für den Druck.

W.W. BATYGIN, I.N. TOPTYGIN

INHALTSVERZEICHNIS

Antworten und Lösungen

AUFGABEN

1. VEKTOR- UND TENSORRECHNUNG

1.1. Vektor- und Tensoralgebra. Vektor- und Tensortransformationen

Man bezeichnet ein Tripel von Größen, die sich bei Drehungen des Koordinatensystems gemäß

$$A_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} A_k \tag{1.1}$$

transformieren, als Vektor im dreidimensionalen Raum. Dabei bedeutet A_k die Komponente des Vektors in Richtung der k-ten Achse des ursprünglichen und A_i' diejenige in Richtung der i-ten Achse des gedrehten Koordinatensystems; die Transformationskoeffizienten α_{ik} sind die Kosinus der Winkel zwischen der k-ten Achse des ursprünglichen und der i-ten Achse des gedrehten Koordinatensystems.

Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzen wir folgende in der Tensoranalysis allgemein übliche Summenregel: Wir lassen bei Summen das Summenzeichen fort und vereinbaren, daß über gleiche Indizes stets zu summieren ist. Auf Grund dieser Konvention schreibt sich Gleichung (1.1) einfach

$$A_i' = \alpha_{ik} A_k.$$

Unter einem Tensor zweiter Stufe im dreidimensionalen Raum verstehen wir eine Gesamtheit von neun Zahlen T_{ik} $(i,\ k = 1, 2, 3)$, die sich bei Drehungen des Koordinatensystems folgendermaßen transformieren:

$$T_{ik}' = \alpha_{il}\,\alpha_{km} T_{lm} \tag{1.2}$$

(über l und m ist zu summieren!). Analog wird ein Tensor s-ter Stufe im dreidimensionalen Raum durch das Transformationsgesetz

$$T_{ikl\ldots r}' = \alpha_{ii'}\,\alpha_{kk'} \ldots \alpha_{rr'}\, T_{i'k'l'\ldots r'} \tag{1.3}$$

definiert. Die Größen T und T' in dieser Gleichung haben s Indizes.

Größen, die sich bei Drehungen des Koordinatensystems wie Vektoren transformieren, können sich bei einer Spiegelung des Koordinatensystems (d. h. bei der Transformation $x \to -x,\ y \to -y,\ z \to -z$) unterschiedlich verhalten. Man bezeichnet die Vektoren, deren Komponenten[1]) bei einer Spiegelung des

[1]) Wir machen keinen Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Vektor- und Tensorkomponenten (siehe z.B. [23]), da er für die in diesem Buch betrachteten Fragen unerheblich ist.

Koordinatensystems ihr Vorzeichen ändern, als polare Vektoren oder einfach als Vektoren. Vektoren, deren Komponenten bei einer Spiegelung des Koordinatensystems das Vorzeichen beibehalten, nennt man Pseudo- oder axiale Vektoren. Das aus zwei polaren Vektoren gebildete Vektorprodukt ist z. B. stets ein axialer Vektor. Analog bezeichnet man einen Tensor s-ter Stufe einfach als Tensor, wenn sich seine Komponenten bei einer Spiegelung wie die Produkte der s Koordinaten transformieren, d.h. mit $(-1)^s$ multiplizieren, und als Pseudotensor, wenn seine Komponenten mit $(-1)^{s+1}$ multipliziert werden.

Das Schema

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

der Transformationskoeffizienten heißt Transformationsmatrix, die Determinante, deren Elemente mit den Elementen einer Matrix übereinstimmen, Determinante dieser Matrix:

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

Unter der Summe $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ der Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ verstehen wir die Matrix γ, deren Elemente durch Addition der entsprechenden Elemente der Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ gebildet werden:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}. \tag{1.6}$$

Das Produkt $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$ der beiden Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ ist die Matrix $\boldsymbol{\gamma}$ mit den Elementen

$$\gamma_{ik} = \alpha_{il}\,\beta_{lk} \tag{1.7}$$

(über l ist zu summieren!). Die Matrix $\boldsymbol{\gamma}$ beschreibt die Transformation, die man erhält, wenn man zunächst eine Transformation mit der Matrix $\boldsymbol{\beta}$ und anschließend eine zweite mit der Matrix $\boldsymbol{\alpha}$ ausführt.

Die Matrix der Form

$$\boldsymbol{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

heißt Einheitsmatrix. Sie beschreibt die identische Transformation $(A'_i = A_i)$. Die Elemente der Einheitsmatrix werden mit dem Symbol δ_{ik} bezeichnet:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{1.9}$$

Eine Matrix der Form

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

nennt man eine Diagonalmatrix.

Genügen die Elemente einer Matrix den Bedingungen

$$\alpha_{ik}\,\alpha_{il} = \delta_{kl}, \tag{1.11}$$

so bezeichnet man sie als orthogonale Matrix.

Die Matrix $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$, die der Bedingung

$$\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{1} \tag{1.12}$$

genügt, heißt die zu $\boldsymbol{\alpha}$ inverse Matrix. Sie beschreibt die inverse Transformation, d.h., aus $A'_i = \alpha_{ik} A_k$ folgt $A_k = \alpha^{-1}_{ki} A'_i$.

Die Matrix $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$, die aus $\boldsymbol{\alpha}$ durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten hervorgeht, heißt transponierte Matrix zu $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{1.13}$$

Aufgaben:

1. Zwei Richtungen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ seien mit Hilfe von Kugelkoordinaten durch die Winkel ϑ, α und ϑ', α' festgelegt. Wie groß ist der Kosinus des Winkels Θ zwischen ihnen?

2. Man beweise die Identitäten

a) $[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{C})\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}) - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{D})\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$,

b) $[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] \times [\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}[\mathfrak{B} \times \mathfrak{D}])\,\mathfrak{C} - (\mathfrak{A}[\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}])\,\mathfrak{D} =$
$= (\mathfrak{A}[\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}])\,\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}[\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}])\,\mathfrak{A}$.

3. In allen kartesischen Koordinatensystemen sei ein Zahlentripel a_i ($i = 1, 2, 3$) vorgegeben, und es sei bekannt, daß bei räumlichen Drehungen und Spiegelungen $a_i\,b_i = \text{inv}$ ist. Man beweise: Sind b_i die Komponenten eines Vektors (Pseudovektors), so sind die Größen a_i ebenfalls Komponenten eines Vektors (Pseudovektors).

4. Man zeige: Gilt in jedem Koordinatensystem $a_i = T_{ik}\,b_k$ und ist T_{ik} ein Tensor zweiter Stufe und b_k ein Vektor, so ist a_i ebenfalls ein Vektor.

5. Es ist zu beweisen, daß $\partial a_i/\partial x_k$ ein Tensor zweiter Stufe ist.

6. Man beweise: Ist T_{ik} ein Tensor zweiter Stufe und P_{ik} ein Pseudotensor zweiter Stufe, so ist $T_{ik}P_{ik}$ ein Pseudoskalar.

7. Es ist zu zeigen, daß die Symmetrieeigenschaft eines Tensors gegenüber Drehungen invariant ist, d.h., daß ein Tensor, der in einem bestimmten Koordinatensystem symmetrisch (antisymmetrisch) ist, in allen Systemen, die aus diesem durch Drehung hervorgehen, symmetrisch (antisymmetrisch) bleibt.

8. Man zeige: Ist S_{ik} ein symmetrischer und A_{ik} ein antisymmetrischer Tensor, so gilt $A_{ik}S_{ik} = 0$.

9. Es ist zu zeigen, daß die Summe der Diagonalelemente eines Tensors zweiter Stufe invariant ist.

10*. Oft ist es günstig, an Stelle der kartesischen Vektorkomponenten a_x, a_y, a_z die durch die Beziehungen $a_{\pm 1} = \mp {}^1/_2 \sqrt{2}\,(a_x \pm i\, a_y)$, $a_0 = a_z$ definierten zyklischen Komponenten zu benutzen. Man drücke das Skalar- und Vektorprodukt zweier Vektoren durch ihre zyklischen Komponenten und die zyklischen Komponenten des Radiusvektors durch LEGENDREsche Kugelfunktionen[1]) aus.

11*. Man bestimme die Komponenten des zum Tensor ε_{ik} inversen Tensors ε_{ik}^{-1}. Insbesondere sei ε_{ik} ein symmetrischer Tensor im Hauptachsensystem.

12. In allen Koordinatensystemen möge zwischen den Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ und denen des Vektors $\mathfrak{b}$ ein linearer Zusammenhang bestehen: $a_i = \varepsilon_{ik}\, b_k$. Man zeige, daß die ε_{ik} einen Tensor zweiter Stufe bilden (genauer: ε_{ik} ist ein Tensor, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide polare oder Pseudovektoren sind, und ein Pseudotensor, wenn einer der Vektoren ein polarer und der andere ein axialer Vektor ist).

13. Man zeige, daß die Größen $A_{ikl} B_{ik}$, wo A_{ikl} ein Tensor dritter und B_{ik} ein Tensor zweiter Stufe ist, einen Vektor bilden.

14. Wie lautet das Transformationsgesetz für die Gesamtheit der Volumenintegrale

$$T_{ik} = \int x_i\, x_k\, \mathrm{d}V$$

bei räumlichen Drehungen und Spiegelungen? (x_i und x_k sind kartesische Koordinaten.)

15. Man bilde die Transformationsmatrix der Basisvektoren beim Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten und umgekehrt sowie von kartesischen zu Zylinderkoordinaten und umgekehrt.

16. Zu suchen ist die Transformationsmatrix der Komponenten eines Vektors bei der Spiegelung aller drei Koordinatenachsen sowie bei der Drehung eines kartesischen Koordinatensystems um den Winkel α um die z-Achse.

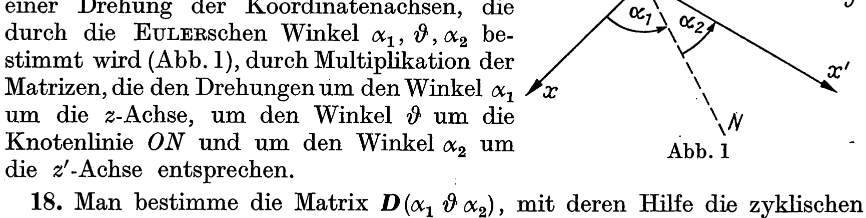


Abb. 1

17. Man bestimme die Transformationsmatrix der Komponenten eines Vektors bei einer Drehung der Koordinatenachsen, die durch die EULERschen Winkel α_1, ϑ, α_2 bestimmt wird (Abb. 1), durch Multiplikation der Matrizen, die den Drehungen um den Winkel α_1 um die z-Achse, um den Winkel ϑ um die Knotenlinie ON und um den Winkel α_2 um die z'-Achse entsprechen.

18. Man bestimme die Matrix $\boldsymbol{D}(\alpha_1\, \vartheta\, \alpha_2)$, mit deren Hilfe die zyklischen Komponenten eines Vektors (s. Aufgabe 10) bei einer Drehung des Ko-

[1]) Zur Definition der Kugelfunktionen vgl. Anhang II.

ordinatensystems transformiert werden, die durch die EULERschen Winkel $\alpha_1, \vartheta, \alpha_2$ bestimmt wird (s. Abb. 1).

19*. Man zeige, daß die Matrix $\boldsymbol{a}$ einer infinitesimalen Drehung des Koordinatensystems in der Form $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon}$ geschrieben werden kann, wobei $\boldsymbol{\varepsilon}$ eine antisymmetrische Matrix ist ($\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$). Welche geometrische Bedeutung haben die ε_{ik}?

20. Man beweise, daß man durch Transposition einer orthogonalen Transformationsmatrix $\boldsymbol{a}$ die Matrix der inversen Transformation erhält.

21. Es ist zu zeigen, daß bei einer Spiegelung oder Drehung die Transformationsmatrix für die Basis eines Koordinatensystems und die Transformationsmatrix für die Komponenten eines Vektors miteinander übereinstimmen.

22*. Man beweise, daß die Determinante der Transformationsmatrix bei Drehungen und Spiegelungen einer geraden Zahl von Koordinatenachsen gleich $+1$, bei Spiegelungen einer ungeraden Zahl von Koordinatenachsen dagegen gleich -1 ist.[1])

23. Man zeige: Sind die entsprechenden Komponenten zweier Vektoren in einem Koordinatensystem einander proportional, so sind sie es auch in jedem beliebigen anderen Koordinatensystem. (Solche Vektoren heißen parallel.)

24*. In allen kartesischen Koordinatensystemen seien Größen e_{ikl} gegeben, deren Vorzeichen sich bei einer Vertauschung zweier beliebiger Indizes ändere und für die $e_{123} = 1$ gelte.

Man zeige, daß die e_{ikl} einen Pseudotensor dritter Stufe bilden (den vollständig antisymmetrischen Einheitspseudotensor dritter Stufe).

25. Man zeige, daß sich die Komponenten eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe bei Drehungen wie die Komponenten eines Vektors transformieren.

26. Die Komponenten des Vektorproduktes zweier Vektoren und die Rotation eines Vektors sind mit Hilfe des Tensors e_{ikl} auszudrücken. Wie transformieren sich diese Größen bei Drehungen und Spiegelungen?

27. Man beweise die Gleichungen

a) $e_{ikl}\, e_{lmn} = \delta_{im}\, \delta_{kn} - \delta_{in}\, \delta_{km}$,

b) $e_{ikl}\, e_{klm} = 2\, \delta_{im}$.

28. Man schreibe in invarianter vektorieller Form

a) $e_{inl}\, e_{irs}\, e_{lmp}\, e_{stp}\, a_n\, a_r\, b_m\, c_t$,

b) $e_{inl}\, e_{krs}\, e_{lmp}\, e_{stp}\, a_r\, a'_n\, b_k\, b'_i\, c_t\, c'_m$.

---

[1]) Transformationen mit der Determinante $+1$ bezeichnet man als eigentliche Transformationen, solche mit der Determinante -1 als uneigentliche Transformationen.

29. Man beweise die Gleichung

$$T_{ik} a_i b_k - T_{ik} a_k b_i = 2\vec{\omega}[\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}],$$

wobei T_{ik} ein beliebiger Tensor zweiter Stufe ist, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Vektoren sind und $\vec{\omega}$ einen Vektor bedeutet, der dem antisymmetrischen Teil von T_{ik} äquivalent ist.

30. Das Produkt $(\mathfrak{a}[\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}])(\mathfrak{a}'[\mathfrak{b}' \times \mathfrak{c}'])$ ist als Summe von Termen zu schreiben, die nur Skalarprodukte der vorkommenden Vektoren enthalten.

Hinweis: Man benutze den Multiplikationssatz für Determinanten oder verwende den Pseudotensor dritter Stufe e_{ikl} (s. Aufgabe 24).

31*. Man zeige, daß der einzige Vektor, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind, der Nullvektor ist und daß jeder Tensor zweiter, dritter bzw. vierter Stufe, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind, proportional δ_{ik}, dem Tensor dritter Stufe e_{ikl} bzw. dem Tensor vierter Stufe $(\delta_{ik}\,\delta_{lm} + \delta_{im}\,\delta_{kl} + \delta_{il}\,\delta_{km})$ ist.

32*. Es sei $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor, für den alle Richtungen im Raum gleichwahrscheinlich sind. Man bestimme die Mittelwerte $\overline{n_i}$, $\overline{n_i n_k}$, $\overline{n_i n_k n_l}$, $\overline{n_i n_k n_l n_m}$ (n_i ist die i-te Komponente des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$) mit Hilfe der Transformationseigenschaften der gesuchten Größen ohne direkte Berechnung der entsprechenden Integrale.

33. Man berechne die Mittelwerte der Größen $\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n})^2}$, $\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n})(\mathfrak{b}\,\mathfrak{n})}$, $\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n})\,\mathfrak{n}}$, $\overline{[\mathfrak{a} \times \mathfrak{n}]^2}$, $\overline{[\mathfrak{a} \times \mathfrak{n}][\mathfrak{b} \times \mathfrak{n}]}$, $\overline{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n})(\mathfrak{b}\,\mathfrak{n})(\mathfrak{c}\,\mathfrak{n})(\mathfrak{d}\,\mathfrak{n})}$ über alle Richtungen, wobei $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor ist, dessen Richtungen alle gleichwahrscheinlich sind, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ konstante Vektoren bedeuten.

Hinweis: Man benutze die Ergebnisse der vorigen Aufgabe.

34. Man bilde alle möglichen unabhängigen Invarianten aus den polaren Vektoren $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ und dem Pseudovektor $\mathfrak{l}$.

35. Welche unabhängigen Pseudoskalare lassen sich aus den beiden polaren Vektoren $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ und dem Pseudovektor $\mathfrak{l}$ bzw. aus den drei polaren Vektoren $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ bilden?

1.2. Vektoranalysis

In jedem orthogonalen Koordinatensystem q_1, q_2, q_3 ist das Quadrat des Längenelementes durch

$$\mathrm{d}l^2 = h_1^2\,\mathrm{d}q_1^2 + h_2^2\,\mathrm{d}q_2^2 + h_3^2\,\mathrm{d}q_3^2 \tag{1.14}$$

und das Volumenelement durch

$$\mathrm{d}V = h_1\,h_2\,h_3\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_3 \tag{1.15}$$

gegeben, wobei die

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \tag{1.16}$$

Funktionen der Koordinaten sind (LAMÉsche Koeffizienten). Die verschiedenen Differentialoperationen sind

$$\left.\begin{aligned}
&(\operatorname{grad}\varphi)_i = \vec{V}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i};^{1)}\\
&\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3)\right];\\
&\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathfrak{e}_1}{h_2 h_3} & \dfrac{\mathfrak{e}_2}{h_1 h_3} & \dfrac{\mathfrak{e}_3}{h_1 h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix};\\
&\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

In der Formel für $\operatorname{rot}\mathfrak{A}$ wirken die Differentialoperatoren $\partial/\partial q_i$ auf die Elemente in der untersten Zeile der Determinante.

In Kugelkoordinaten gilt

$$\left.\begin{aligned}
&x = r\sin\vartheta\cos\alpha, \quad y = r\sin\vartheta\sin\alpha, \quad z = r\cos\vartheta;\\
&h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\alpha = r\sin\vartheta;\\
&\operatorname{grad}\varphi = \mathfrak{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\mathfrak{e}_\vartheta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \frac{\mathfrak{e}_\alpha}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha};\\
&\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha};\\
&(\operatorname{rot}\mathfrak{A})_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\alpha\sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}\right],\\
&(\operatorname{rot}\mathfrak{A})_\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r},\\
&(\operatorname{rot}\mathfrak{A})_\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta};\\
&\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2},
\end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

---

[1]) Entgegen der üblichen Schreibweise wird in diesem Buch der Pfeil über dem Symbol für den Nablavektor mitgeschrieben, um auf seinen vektoriellen Charakter hinzuweisen (*Anm. der dtsch. Red.*).

in Zylinderkoordinaten entsprechend

$$\left.\begin{aligned}
&x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad z = z;\\
&h_r = 1, \quad h_\alpha = r, \quad h_z = 1;\\
&\operatorname{grad}\varphi = \mathfrak{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\mathfrak{e}_\alpha}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \mathfrak{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z};\\
&\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z};\\
&(\operatorname{rot}\mathfrak{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot}\mathfrak{A})_\alpha = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},\\
&(\operatorname{rot}\mathfrak{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha};\\
&\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

Für beliebige $\mathfrak{A}$ und φ gelten die Identitäten

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{A} \equiv 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \Delta\varphi. \quad (1.20)$$

Die folgenden grundlegenden Integralsätze gestatten es, Volumen-, Flächen- und Linienintegrale ineinander umzuwandeln:

Gaussscher *Satz:*

$$\int_V \operatorname{div}\mathfrak{A}\,dV = \oint_S \mathfrak{A}\,d\mathfrak{S}. \quad (1.21)$$

V bedeutet ein Volumen und S eine geschlossene Fläche, die dieses Volumen umschließt.

Stokesscher *Satz:*

$$\oint \mathfrak{A}\,d\mathfrak{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathfrak{A}\,d\mathfrak{S}. \quad (1.22)$$

Dabei ist l eine geschlossene Linie und S eine beliebige Fläche mit der Berandung l.

In den Formeln (1.21) und (1.22) muß der Vektor $\mathfrak{A}$ eine differenzierbare Funktion der Koordinaten sein.

Aufgaben:

36. Man schreibe die zyklischen Komponenten[1]) des Gradienten in Kugelkoordinaten.

37. Man berechne $\operatorname{div}\mathfrak{r}$, $\operatorname{rot}\mathfrak{r}$, $\operatorname{grad}(\mathfrak{l}\,\mathfrak{r})$, $(\mathfrak{l}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{r}$ mit Hilfe von kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten ($\mathfrak{r}$ ist der Radiusvektor, $\mathfrak{l}$ ein konstanter Vektor).

---

[1]) Siehe Aufgabe 10.

38. Man berechne $\operatorname{rot}[\vec{\omega} \times \mathfrak{r}]$, wobei $\vec{\omega}$ ein konstanter Vektor in Richtung der z-Achse ist, in Kugelkoordinaten (Zylinderkoordinaten).

39. Man beweise die Identitäten

a) $\operatorname{grad}(\varphi\,\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi,$

b) $\operatorname{div}(\varphi\,\mathfrak{A}) = \varphi \operatorname{div}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\operatorname{grad}\varphi,$

c) $\operatorname{rot}(\varphi\,\mathfrak{A}) = \varphi \operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A} \times \operatorname{grad}\varphi,$

d) $\operatorname{div}[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] = \mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B},$

e) $\operatorname{rot}[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} + (\mathfrak{B}\vec{\nabla})\,\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\vec{\nabla})\,\mathfrak{B},$

f) $\operatorname{grad}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \times \operatorname{rot}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} \times \operatorname{rot}\mathfrak{A} + (\mathfrak{B}\vec{\nabla})\,\mathfrak{A} + (\mathfrak{A}\vec{\nabla})\,\mathfrak{B}.$

Hinweis: Diese Identitäten sind mit Hilfe des Operators $\vec{\nabla}$ zu beweisen, wobei die Regeln der Differentiation und Multiplikation von Vektoren anzuwenden sind, ohne daß die Komponentenschreibweise benutzt wird.

40. Man beweise die Identitäten

a) $\mathfrak{C}\operatorname{grad}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{C}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{B} + \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{A},$

b) $(\mathfrak{C}\,\vec{\nabla})\,[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{C}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B} \times (\mathfrak{C}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{A},$

c) $(\vec{\nabla}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A},$

d) $[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]\operatorname{rot}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{C} - \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{C},$

e) $[\mathfrak{A} \times \vec{\nabla}] \times \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{B} + \mathfrak{A} \times \operatorname{rot}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B},$

f) $[\vec{\nabla} \times \mathfrak{A}] \times \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - (\mathfrak{A}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{B} - \mathfrak{A} \times \operatorname{rot}\mathfrak{B} - \mathfrak{B} \times \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$

41. Man berechne $\operatorname{grad}\varphi(r)$, $\operatorname{div}\varphi(r)\,\mathfrak{r}$, $\operatorname{rot}\varphi(r)\,\mathfrak{r}$ und $(\mathfrak{l}\,\vec{\nabla})\,\varphi(r)\,\mathfrak{r}$.

42. Wie lautet die Funktion $\varphi(r)$, die der Bedingung $\operatorname{div}\varphi(r)\,\mathfrak{r} = 0$ genügt?

43. Man berechne Divergenz und Rotation der Vektoren $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}$, $\varphi(r)\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} \times [\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}]$, wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ konstante Vektoren sind.

44. Man berechne $\operatorname{grad}\mathfrak{A}(r)\,\mathfrak{r}$, $\operatorname{grad}\mathfrak{A}(r)\,\mathfrak{B}(r)$, $\operatorname{div}\varphi(r)\,\mathfrak{A}(r)$, $\operatorname{rot}\varphi(r)\,\mathfrak{A}(r)$, $(\mathfrak{l}\,\vec{\nabla})\,\varphi(r)\,\mathfrak{A}(r)$.

45. Mit Hilfe der Ausdrücke für den Gradienten und die Rotation in Kugelkoordinaten sind die Ausdrücke für $\operatorname{grad}(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}/r^3)$ und $\operatorname{rot}(\mathfrak{p} \times \mathfrak{r}/r^3)$ zu berechnen ($\mathfrak{p}$ ist ein konstanter Vektor). Man gebe die Vektorlinien für diese Vektoren an (Zeichnung!).

46. Man beweise die Beziehung $(\mathfrak{A}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{A} = -\mathfrak{A} \times \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{A}^2 = \text{const}$.

47. Wie lauten die Komponenten des Vektors $\Delta\mathfrak{A}$ in Kugelkoordinaten?

Hinweis: Man benutze die Identität $\Delta\mathfrak{A} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A}$.

48. Wie lauten die Komponenten des Vektors $\Delta\mathfrak{A}$ im Zylinderkoordinatensystem?

49. Das Volumenintegral $\int (\operatorname{grad}\varphi \operatorname{rot}\mathfrak{A})\,\mathrm{d}V$ ist in ein Flächenintegral umzuwandeln.

50. Man berechne die Integrale $\oint \mathfrak{r}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n})\,\mathrm{d}S$ und $\oint (\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{n}\,\mathrm{d}S$, wobei $\mathfrak{a}$ ein konstanter Vektor und $\mathfrak{n}$ der zur Oberfläche normal gerichtete Einheitsvektor ist.

51. Die Integrale über eine geschlossene Fläche $\oint \mathfrak{n}\,\varphi\,\mathrm{d}S$, $\oint \mathfrak{n}\times\mathfrak{a}\,\mathrm{d}S$ und $\oint (\mathfrak{n}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}\,\mathrm{d}S$ ($\mathfrak{b}$ ist ein konstanter Vektor, $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Normalenrichtung) sind in Volumenintegrale umzuwandeln, die über das von der Fläche eingeschlossene Volumen erstreckt werden.

Hinweis: Die Lösung erfolgt analog wie bei den vorigen Aufgaben.

52. Mit Hilfe einer der in der vorigen Aufgabe bewiesenen Identitäten ist das ARCHIMEDische Gesetz durch Summierung der Drücke, die an den Oberflächenelementen eines in einer Flüssigkeit befindlichen Körpers angreifen, abzuleiten.

53*. $f(\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ genüge der Bedingung

$$f(c_1\,\mathfrak{a}_1 + c_2\,\mathfrak{a}_2,\mathfrak{r}) = c_1\,f(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{r}) + c_2\,f(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{r}),$$

wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind, und sei eine differenzierbare Funktion von $\mathfrak{r}$. Man zeige, daß für f der verallgemeinerte GAUSSsche Satz

$$\oint f(\mathfrak{n},\mathfrak{r})\,\mathrm{d}S = \int f(\vec{V},\mathfrak{r})\,\mathrm{d}V$$

gilt, wobei V ein beliebiges Volumen, S seine Oberfläche und $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen bedeuten. Im Integranden $f(\vec{V},\mathfrak{r})$ wirkt der Operator $\vec{V}$ auf $\mathfrak{r}$ und steht links von allen Veränderlichen.

Hinweis: Man zerlege $\mathfrak{n}$ nach den Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems und benutze den GAUSSschen Satz

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}V = \oint \varphi\,n_x\,\mathrm{d}S.$$

54. Man löse die Aufgaben 50 und 51 mit Hilfe des in der vorigen Aufgabe bewiesenen verallgemeinerten GAUSSschen Satzes.

55. Das Integral $\oint \varphi\,\mathrm{d}\mathfrak{l}$ längs einer geschlossenen Linie ist in ein Integral über eine Fläche zu verwandeln, die von dieser geschlossenen Linie begrenzt wird.

56. Das Integral $\oint u\,\mathrm{d}f$ längs einer geschlossenen Linie ist in ein Integral über eine Fläche umzuformen, die von dieser Linie begrenzt wird (u und f sind skalare Funktionen der Koordinaten).

57. Man beweise die Identität

$$\int (\mathfrak{A}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A})\,\mathrm{d}V = \oint \{\mathfrak{B}\times\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\times\operatorname{rot}\mathfrak{B}\}\,\mathrm{d}\mathfrak{S}.$$

58. Innerhalb des Volumens V genüge der Vektor $\mathfrak{A}$ der Bedingung $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$ und auf dem Rand des Volumens (Oberfläche S) der Bedingung $A_n = 0$. Man beweise

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathfrak{A}\,\mathrm{d}V = 0.$$

59*. Man zeige, daß für den in der vorigen Aufgabe definierten Vektor $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$

$$\operatorname{div}_{\mathfrak{R}} \int \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{r})\,\mathrm{d}V}{|\mathfrak{R} - \mathfrak{r}|} = 0$$

gilt. $\mathfrak{R}$ ist irgendein fester Aufpunkt.

60. Man beweise den GAUSSschen Satz für einen dreidimensionalen Tensor zweiter Stufe:

$$\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = \oint T_{ik}\,\mathrm{d}S_i.$$

Hinweis: Man gehe vom GAUSSschen Satz für den Vektor mit den Komponenten $A_i = T_{ik}\,a_k$ aus, wobei $\mathfrak{a} = \{a_k\}$ ein beliebiger konstanter Vektor ist.

61. Wie lautet die Lösung der LAPLACEschen Gleichung in allgemeiner Form für eine skalare Funktion, die

a) nur von r, b) nur von ϑ, c) nur von α

(Kugelkoordinaten) abhängt?

62. Wie lautet die Lösung der LAPLACEschen Gleichung in allgemeiner Form für eine skalare Funktion, die

a) nur von r, b) nur von α, c) nur von z

(Zylinderkoordinaten) abhängt?

63. Man zeige: Ist die skalare Funktion ψ Lösung der Gleichung $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ und $\mathfrak{a}$ ein konstanter Vektor, so genügen die Vektorfunktionen $\mathfrak{L} = \operatorname{grad}\psi$, $\mathfrak{M} = \operatorname{rot}(\mathfrak{a}\,\psi)$ und $\mathfrak{N} = \operatorname{rot}\mathfrak{M}$ der Gleichung $\Delta\mathfrak{A} + k^2\,\mathfrak{A} = 0$.

64*. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c)$$

stellt ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c dar.

Die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1, \qquad \xi \geqq -c^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2}{b^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1, \qquad -c^2 \geqq \eta \geqq -b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\zeta} + \frac{y^2}{b^2+\zeta} + \frac{z^2}{c^2+\zeta} = 1, \qquad -b^2 \geqq \zeta \geqq -a^2$$

stellen ein Ellipsoid sowie ein mit dem Ellipsoid konfokales einschaliges und zweischaliges Hyperboloid dar. Durch jeden Raumpunkt geht je eine der Flächen, die durch die Werte ξ, η, ζ charakterisiert werden. Man nennt die Zahlen ξ, η, ζ die elliptischen (oder LAMÉschen) Koordinaten des Punktes x, y, z. Wie lauten die Formeln für die Transformation von ξ, η, ζ nach x, y, z? Wie sehen die LAMÉschen Koeffizienten und der LAPLACE-Operator in elliptischen Koordinaten aus?

65*. Für $a = b > c$ entarten die elliptischen Koordinaten (s. die vorige Aufgabe) in das sogenannte Koordinatensystem des abgeplatteten Rotationsellipsoids. Dabei geht die Koordinate ζ in die Konstante $-a^2$ über und muß durch eine andere Koordinate ersetzt werden. Als solche wählen wir den Azimutwinkel α in der xy-Ebene. Die Koordinaten ξ, η werden durch die Gleichungen

$$\frac{r^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1, \qquad \frac{r^2}{a^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

bestimmt, wobei $\xi \geqq -c^2$, $-c^2 \geqq \eta \geqq -a^2$ ist.

Die Flächen $\xi = \text{const}$ sind abgeplattete Rotationsellipsoide bezüglich der z-Achse und die Flächen $\eta = \text{const}$ mit ihnen konfokale einschalige Rotationshyperboloide (Abb. 2).

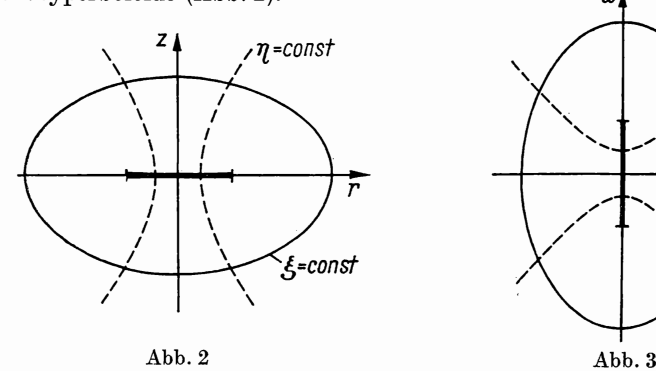


Abb. 2

Abb. 3

Man bestimme die Ausdrücke für r und z sowie die LAMÉschen Koeffizienten und den LAPLACE-Operator in den Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids.

66*. Das Koordinatensystem des verlängerten Rotationsellipsoids ergibt sich aus den elliptischen Koordinaten (vgl. Aufgabe 64) für $a > b = c$. Dabei entartet die Koordinate η in eine Konstante und muß durch den Azimutwinkel α ersetzt werden, der in der xy-Ebene von der y-Achse aus gezählt wird. Die Koordinaten ξ, ζ sind durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{r^2}{b^2+\xi} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2+\zeta} + \frac{r^2}{b^2+\zeta} = 1, \qquad r^2 = y^2 + z^2$$

bestimmt, wobei $\xi \geqq -b^2$, $-b^2 \geqq \zeta \geqq -a^2$ ist.

Die Flächen ξ = const und ζ = const sind verlängerte Rotationsellipsoide bzw. zweischalige Rotationshyperboloide (Abb. 3). Man drücke die Größen x, r durch ξ, ζ aus und berechne die LAMÉschen Koeffizienten sowie den LAPLACE-Operator in den Variablen ξ, ζ, α.

67. Die räumlichen Bipolarkoordinaten ξ, η, α sind mit den kartesischen Koordinaten durch die Beziehungen

$$x = \frac{a \sin\eta \cos\alpha}{\cosh\xi - \cos\eta}, \qquad y = \frac{a \sin\eta \sin\alpha}{\cosh\xi - \cos\eta}, \qquad z = \frac{a \sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta}$$

verknüpft, wobei a ein konstanter Parameter und

$$-\infty < \xi < \infty, \qquad 0 < \eta < \pi, \qquad 0 < \alpha < 2\pi$$

sind.

Man zeige: Die Koordinatenflächen ξ = const sind Kugeln

$$x^2 + y^2 + (z - a \coth\xi)^2 = \left(\frac{a}{\sinh\xi}\right)^2,$$

die Flächen η = const spindelförmige Rotationsflächen bezüglich der z-Achse mit der Gleichung

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \cot\eta\right)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\sin\eta}\right)^2$$

und die Flächen α = const Halbebenen, die durch die z-Achse begrenzt werden (Abb. 4). Man überzeuge sich davon, daß diese Koordinatenflächen zueinander

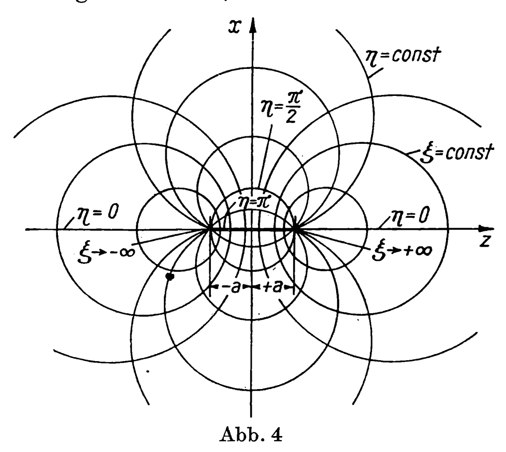


Abb. 4

orthogonal sind, und berechne die LAMÉschen Koeffizienten und den LAPLACE-Operator.

68. Die Ringkoordinaten ϱ, ξ, α bilden ein Orthogonalsystem und sind mit den kartesischen Koordinaten durch die Beziehungen

$$x = \frac{a \sinh\varrho \cos\alpha}{\cosh\varrho - \cos\xi}, \qquad y = \frac{a \sinh\varrho \sin\alpha}{\cosh\varrho - \cos\xi}, \qquad z = \frac{a \sin\xi}{\cosh\varrho - \cos\xi}$$

verknüpft, wobei a ein konstanter Parameter und $-\infty < \varrho < \infty$, $-\pi < \xi \leqq \pi$ sind; α bedeutet den Azimutwinkel, der sich zwischen 0 und π ändert.

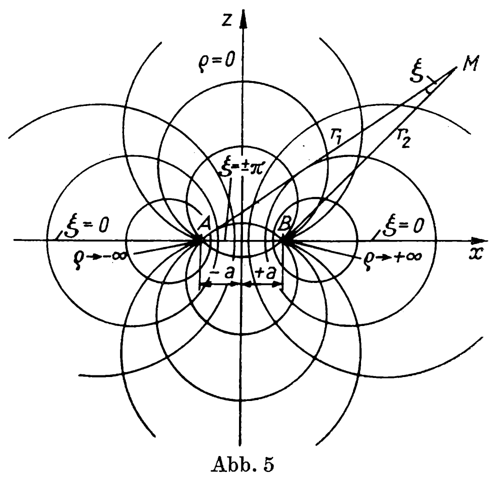


Abb. 5

Man zeige, daß $\varrho = \ln(r_1/r_2)$ ist (vgl. Abb. 5, in der die Flächen $\alpha = \text{const}$ und $\alpha + \pi = \text{const}$ dargestellt sind), während ξ den Winkel zwischen r_1 und r_2 bedeutet ($\xi > 0$ für $z > 0$ und $\xi < 0$ für $z < 0$). Welche Form haben die Koordinatenflächen ϱ und ξ? Wie lauten die LAMÉschen Koeffizienten?

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[28] GELFAND, I. M.: Vorlesungen über lineare Algebra. Gostechisdat, Moskau 1951 (*И. М. Гельфанд:* Лекции по линейной алгебре).

[29] GELFAND, I. M., R. A. MINLOS und Z. YA. SHAPIRO: Representations of the Rotation and LORENTZ Group and their Applications. Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris 1962.

[52] KOTSCHIN, N. E.: Vektorrechnung und Anfangsgründe der Tensorrechnung. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1951 (*Н. Е. Кочин:* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления).

[58] LEBEDEW, N. N., I. P. SKALSKAJA und JA. S. UFLJAND: Aufgabensammlung der mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская* и *Я. С. Уфлянд:* Сборник задач по математической физике).

[75] SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 6. Aufl., Berlin 1964 (Übers. aus dem Russ.).

[76] SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 3/1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 4. Aufl. Berlin 1964 (Übers. aus dem Russ.).

[83] STRATTON, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.

[84] TAMM, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).

2. STATISCHES ELEKTRISCHES FELD IM VAKUUM

Dieses Kapitel enthält Aufgaben zur Bestimmung des Potentials $\varphi(\mathfrak{r})$ und der Feldstärke $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung, die durch die räumliche Dichte $\varrho(\mathfrak{r})$, die Flächendichte $\sigma(\mathfrak{r})$ oder die Liniendichte $\varkappa(\mathfrak{r})$ charakterisiert wird. Die Verteilung von Punktladungen kann durch die Raumladungsdichte

$$\varrho(\mathfrak{r}) = \sum_i q_i\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)$$

beschrieben werden, wobei q_i die Größe der i-ten Ladung, $\mathfrak{r}_i$ den Radiusvektor der i-ten Ladung und $\delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i)$ die δ-Funktion bedeuten (s. Anhang I). Die elektrische Feldstärke genügt den MAXWELLschen Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\,\varrho, \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0. \tag{2.1}$$

Die erste dieser Gleichungen lautet in integraler Form

$$\oint_S E_n\, \mathrm{d}S = 4\pi\, q \tag{2.2}$$

(GAUSSscher Satz der Elektrostatik), wobei S eine geschlossene Fläche und q die in ihr enthaltene Gesamtladung bedeuten. Potential und elektrische Feldstärke sind durch die Beziehungen

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad \varphi(\mathfrak{r}) = \int_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}_0} \mathfrak{E}\, \mathrm{d}\mathfrak{r}, \qquad \varphi(\mathfrak{r}_0) = 0 \tag{2.3}$$

Abb. 6

miteinander verknüpft. Das Potential φ genügt der POISSONschen Gleichung

$$\Delta\varphi = -4\pi\,\varrho. \tag{2.4}$$

Das Potential ist endlich und stetig in allen Raumpunkten, in denen sich keine Punktladungen befinden; insbesondere gilt auf einer geladenen Oberfläche, die zwei Gebiete (1) und (2) voneinander trennt, $\varphi_1 = \varphi_2$ (Abb. 6). Die Normalableitungen von φ erleiden auf der geladenen Oberfläche einen Sprung:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\,\sigma \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\,\sigma. \tag{2.5}$$

Die Normale $\mathfrak{n}$ hat die Richtung von (1) nach (2).

Auf einer Oberfläche einer elektrischen Doppelschicht vom Moment τ gilt (siehe z.B. [84])

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\,\tau \tag{2.6}$$

(die Normale $\mathfrak{n}$ ist von der negativen Seite der Schicht zur positiven gerichtet).

Entsprechen den Ladungsverteilungen ϱ_1 und ϱ_2 die Potentiale φ_1 und φ_2, so ist $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ das Potential der Ladungsverteilung $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$ (Superpositionsprinzip). Dasselbe gilt für das elektrische Feld $\mathfrak{E}$. Insbesondere gestattet es das Superpositionsprinzip, aus den Potentialen q/r von Elementarladungen durch Summierung die Potentiale komplizierter Ladungssysteme abzuleiten:

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \int \frac{\varrho(\mathfrak{r}')\,\mathrm{d}V'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}. \tag{2.7}$$

Im Falle einer flächen- oder linienhaften Ladungsverteilung ist das Volumenintegral in (2.7) durch das entsprechende Flächen- bzw. Linienintegral zu ersetzen, während im Falle eines Systems von Punktladungen über die Ladungen zu summieren ist. Dies gilt auch für alle im folgenden angegebenen Formeln, die Volumenintegrale von Ladungsverteilungen enthalten.

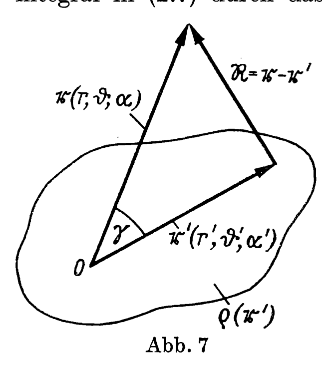


Abb. 7

In den meisten Fällen ist die direkte Berechnung des Integrals in (2.7) schwierig. Daher benutzt man häufig eine Darstellung des Potentials als Reihe, die sich durch Entwicklung des Nenners im Integranden nach Potenzen von x/r oder x'/r ergibt, und integriert gliedweise. Eine solche Entwicklung kann man sowohl in kartesischen als auch in Kugelkoordinaten durchführen.

Kartesische Koordinaten (Abb. 7). Für $r > a$ (a ist der größte Abstand der Ladungen des Systems vom Pol 0) gilt

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{r} - p_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} - \\ - \frac{Q_{\alpha\beta\gamma}}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{1}{r} + \cdots \tag{2.8}$$

Die Multipolmomente $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta}, \ldots$ werden durch Volumenintegrale ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} q &= \int \varrho(\mathfrak{r}')\,\mathrm{d}V' && \text{Gesamtladung des Systems,} \\ p_\alpha &= \int \varrho(\mathfrak{r}')\, x'_\alpha\,\mathrm{d}V' && \text{Komponenten des Dipolmoments,} \\ Q_{\alpha\beta} &= \int \varrho(\mathfrak{r}')\, x'_\alpha x'_\beta\,\mathrm{d}V' && \text{Komponenten des Quadrupolmoments.} \end{aligned}\right\} \tag{2.8'}$$

Die Größen $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta}, \ldots$ transformieren sich bei einer Drehung des Koordinatensystems wie ein Skalar, ein Vektor, ein Tensor zweiter Stufe usw.

Der zweite und dritte Term des Potentials (2.8) können in der Form

$$\varphi^{(p)} = \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}}{r^3}, \tag{2.9}$$

$$\varphi^{(Q)} = \frac{1}{2r^5}[(3x^2 - r^2)\,Q_{xx} + (3y^2 - r^2)\,Q_{yy} + \\ + (3z^2 - r^2)\,Q_{zz} + 6x\,y\,Q_{xy} + 6x\,z\,Q_{xz} + 6y\,z\,Q_{yz}] \tag{2.9'}$$

geschrieben werden, wobei $\mathfrak{p} = (p_x, p_y, p_z)$ der Dipolmomentvektor des Systems ist.

Kugelkoordinaten. Wir benutzen die im Anhang II angegebene Entwicklung (A II.15) von $|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|^{-1}$. Setzt man sie in (2.7) ein, so erhält man für $r > r'$

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, \frac{Q_{lm}\,Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}} \qquad (r > r'), \tag{2.10}$$

wobei Q_{lm} das Multipolmoment der Ordnung l, m ist:

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \varrho(\mathfrak{r}')\, r'^l\, Y^*_{lm}(\vartheta', \alpha')\, \mathrm{d}V'. \tag{2.11}$$

Für $r' > r$ werden in (A II.15) r und r' vertauscht, und es folgt

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, r^l\, Q'_{lm}\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \qquad (r < r') \tag{2.12}$$

mit

$$Q'_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\varrho(\mathfrak{r}')}{r'^{\,l+1}}\, Y^*_{lm}(\vartheta', \alpha')\, \mathrm{d}V'. \tag{2.13}$$

Befindet sich der Aufpunkt $\mathfrak{r}$ innerhalb der Ladungsverteilung (vgl. Abb. 7), so muß man das Integrationsgebiet in (2.7) mit Hilfe einer Kugel vom Radius r um den Ursprung 0 in zwei Teile zerlegen. Bei der Integration über das Innere der Kugel ist die Entwicklung (A II.15) und bei der Integration über das Äußere der Kugel die inverse Entwicklung zu benutzen.

Eine anschauliche Vorstellung über die Struktur des Feldes kann man durch die Einführung von Kraftlinien und Äquipotentialflächen erhalten. Die Kraftlinien werden durch ein System von Differentialgleichungen bestimmt, das in beliebigen orthogonalen Koordinaten q_1, q_2, q_3 die Form

$$\frac{h_1\,\mathrm{d}q_1}{E_1} = \frac{h_2\,\mathrm{d}q_2}{E_2} = \frac{h_3\,\mathrm{d}q_3}{E_3} \tag{2.14}$$

hat, wobei h_i die LAMÉschen Koeffizienten sind; die Äquipotentialflächen sind durch die Gleichung $\varphi(\mathfrak{r}) = \text{const}$ definiert.

Als Gleichgewichtspunkte des Feldes bezeichnet man solche Punkte in einem endlichen Abstand vom Ladungssystem, in denen $E = 0$ ist.

Die Energie eines elektrostatischen Feldes kann aus einer der Gleichungen

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 \, \mathrm{d}V, \quad W = \frac{1}{2}\int \varrho\, \varphi \, \mathrm{d}V \tag{2.15}$$

berechnet werden (sie sind äquivalent, wenn sich die Ladungen in einem endlichen Raumgebiet befinden und über den gesamten Raum integriert wird).

Die Wechselwirkungsenergie zweier Ladungssysteme 1 und 2 wird durch die Ausdrücke

$$U = \int \varrho_1(\mathfrak{r})\, \varphi_2(\mathfrak{r})\, \mathrm{d}V = \int \frac{\varrho_1(\mathfrak{r}_1)\, \varrho_2(\mathfrak{r}_2)\, \mathrm{d}V_1\, \mathrm{d}V_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} \tag{2.16}$$

bestimmt.

Die verallgemeinerten ponderomotorischen Kräfte erhält man durch Differentiation von U oder W nach den entsprechenden verallgemeinerten Koordinaten a_i:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i} \quad \text{oder} \quad F_i = -\frac{\partial W}{\partial a_i}. \tag{2.17}$$

Die verallgemeinerte ponderomotorische Kraft ist positiv, wenn sie bestrebt ist, die entsprechende verallgemeinerte Koordinate zu vergrößern.

Aufgaben:

69. Eine unendlich ausgedehnte ebene Platte der Dicke a habe in ihrem gesamten Volumen die konstante Ladungsdichte ϱ. Man bestimme das Potential φ und die Feldstärke $\mathfrak{E}$ des elektrischen Feldes.

70. Eine räumliche Ladungsverteilung genüge dem periodischen Gesetz $\varrho = \varrho_0 \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$ und bilde ein unendlich ausgedehntes periodisches Raumgitter. Man bestimme das Potential φ des elektrischen Feldes.

71. Die Ladungsdichte der Ebene $z = 0$ genüge dem periodischen Gesetz $\sigma = \sigma_0 \sin\alpha x \sin\beta y$, wobei σ_0, α, β Konstanten sind. Man bestimme das Potential φ dieses Ladungssystems.

72. Ein unendlich langer Kreiszylinder mit dem Radius R sei im Innern oder auf der Oberfläche gleichförmig geladen. Die Ladung je Längeneinheit sei $\varkappa$. Man bestimme das Potential φ sowie die elektrische Feldstärke E.

73. Man bestimme das Potential φ und die elektrische Feldstärke E eines gleichförmig geladenen unendlich langen geraden Drahtes.

74. Man bestimme das Potential φ und die elektrische Feldstärke E eines gleichförmig geladenen geraden Drahtes der Länge $2a$, das sich auf der z-Achse von $-a$ bis $+a$ erstreckt; seine Ladung sei q.

75. Welche Form haben die Äquipotentialflächen des in der vorigen Aufgabe betrachteten gleichförmig geladenen Drahtes?

76. Man bestimme das Potential φ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer Kugel, deren Volumen gleichförmig geladen ist. Der Radius der Kugel sei R, ihre Ladung q.

77. Man bestimme das Potential φ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer Kugel mit dem Radius R, deren Oberfläche gleichförmig geladen ist. Die Ladung der Kugel sei q.

78. In einer Kugel mit dem Radius R und konstanter Raumladungsdichte ϱ befinde sich ein ungeladener kugelförmiger Hohlraum mit dem Radius R_1, dessen Mittelpunkt den Abstand a vom Kugelmittelpunkt habe $(a + R_1 < R)$. Man bestimme das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ im Hohlraum.

79. Der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugeln mit den Radien R_1 und R_2 $(R_1 < R_2)$ sei mit der räumlichen Dichte $\varrho = \alpha/r^2$ geladen. Man bestimme die Gesamtladung q, das Potential φ und die elektrische Feldstärke E und untersuche den Grenzfall $R_2 \to R_1$.

80. Man bestimme die Energie W des elektrostatischen Feldes für die in den Aufgaben 76, 77 und 79 angegebenen Ladungsverteilungen. Die Rechnungen sind auf zwei Wegen durchzuführen [vgl. (2.15)].

81. Vorgegeben sei eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\varrho = \varrho(r)$. Durch Zerlegung in Kugelschalen sind das Potential φ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ durch $\varrho(r)$ auszudrücken (φ und $\mathfrak{E}$ sind als einfache Integrale über r zu schreiben).

82. Man löse die Aufgaben 76 und 79 mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 81.

83. Die Ladung des Elektrons ist im Wasserstoffatom (Grundzustand) mit der Dichte

$$\varrho(\mathrm{r}) = -\frac{e_0}{\pi a^3} \mathrm{e}^{-2r/a}$$

verteilt, wobei $a = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm den Bohrschen Atomradius und $e_0 = 4{,}80 \cdot 10^{-10}$ esE die Elementarladung bedeuten. Man bestimme das Potential φ_e und die elektrische Feldstärke E_e der Elektronenladung sowie das Gesamtpotential φ und die elektrische Gesamtfeldstärke $\mathfrak{E}$ im Atom unter der Annahme, daß die Protonenladung im Koordinatenursprung konzentriert ist. Man stelle die r-Abhängigkeit von φ und E näherungsweise graphisch dar.

Hinweis: Man benutze die Lösungsmethode der Aufgabe 81.

84. Man betrachte einen Atomkern als gleichförmig geladene Kugel und bestimme seine maximale elektrische Feldstärke $E_{\max}$. Der Kern habe den Radius $R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ [cm] und die Ladung $Z e_0$ (A ist das Atomgewicht, e_0 die Elementarladung).

85. Die Aufgabe 77 ist mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 81 zu lösen.

86. Die Ebenen zweier gleichförmig geladener dünner koaxialer Ringe mit gleichem Radius R mögen sich im Abstand a voneinander befinden. Die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um eine Punktladung q aus dem Unendlichen in das Zentrum eines der Ringe zu bringen, sei gleich A_1 bzw. gleich A_2. Wie groß sind die Ladungen q_1 bzw. q_2 auf den Ringen?

87. Man bestimme das Potential φ und das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ auf der Achse einer dünnen kreisförmigen Scheibe mit dem Radius R und der Ladung q. Man zeige, daß die Normalkomponente von $\mathfrak{E}$ auf der Scheibenoberfläche den Sprung $4\pi\sigma$ erfährt. Das Feld ist in großem Abstand von der Scheibe zu betrachten.

88. Ein dünner Kreisring mit dem Radius R bestehe aus zwei gleichförmig und entgegengesetzt geladenen Halbringen mit den Ladungen q und $-q$. Man bestimme das Potential φ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ auf der Ringachse in der Nähe des Ringes. Welche Form hat das Feld in großen Abständen vom Ring?

89. Man drücke das Potential φ eines gleichförmig geladenen dünnen Kreisrings mit der Ladung q und dem Radius R durch das vollständige elliptische Integral erster Gattung

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\beta}}$$

aus.

Hinweis: Bei der Integration über das Azimut ist $\alpha' = \pi - 2\beta$ zu substituieren.

90. Aus der allgemeinen Formel für das Potential eines dünnen Kreisrings (vgl. Aufgabe 89) berechne man das Potential φ

a) auf der Ringachse,

b) in großen Abständen vom Ring,

c) in der Nähe des Ringes.

Hinweis: Im Falle **c)** sind die Formeln 6.113 aus [72] zu benutzen.

91. Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R habe die Ladungsdichte $\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$. Man bestimme das Potential φ des elektrischen Feldes unter Anwendung der Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten.

92. Die Quellen eines elektrischen Feldes seien axialsymmetrisch verteilt. In der Nähe der Symmetrieachse des Systems gebe es keine Quellen des Feldes. Man drücke das Potential φ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in der Nähe der Symmetrieachse durch die Werte des Potentials φ und seiner Ableitungen auf der Achse aus.

93. Man bestimme das Potential φ eines gleichförmig geladenen dünnen Kreisrings unter Benutzung der Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten. Die Ladung des Ringes sei q, der Radius R.

94. Man bestimme die Potentiale φ in großen Abständen von den folgenden Ladungssystemen:

a) die Ladungen q, $-2q$, q sind in den Abständen a auf der z-Achse angeordnet (linearer Quadrupol);

b) die Ladungen $\pm q$ sind so auf den Ecken eines Quadrates der Seitenlänge a angeordnet, daß benachbarte Ladungen verschiedene Vorzeichen haben und sich im Koordinatenursprung die Ladung $+q$ befindet. Die Seiten des Quadrates sollen der x- bzw. y-Achse parallel sein (ebener Quadrupol).

95. Man bestimme die Potentiale φ in großen Abständen von den folgenden Ladungssystemen:

a) linearer Oktupol (Abb. 8*a*),

b) räumlicher Oktupol (Abb. 8*b*).

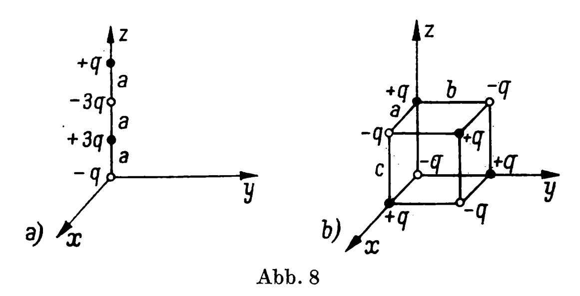


Abb. 8

96. Eine Punktladung q befinde sich im Punkt mit den Kugelkoordinaten $r_0, \vartheta_0, \alpha_0$. Man entwickle das Potential φ dieser Ladung nach Multipolen.

97. Das Volumen eines Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, c sei gleichförmig geladen; seine Gesamtladung sei q. Man bestimme das Potential φ in großen Abständen vom Ellipsoid mit einer Genauigkeit, die den Quadrupolterm einschließt. Man betrachte die Spezialfälle eines Rotationsellipsoids mit den Halbachsen $a = b$ und c[1]) und einer Kugel ($a = b = c$).

Hinweis: Bei der Integration über das Ellipsoidvolumen sind die verallgemeinerten Kugelkoordinaten $x = a\,r \sin\vartheta \cos\alpha$, $y = b\,r \sin\vartheta \sin\alpha$, $z = c\,r \cos\vartheta$ zu benutzen.

98. Zwei gleichförmig geladene dünne koaxiale Kreisringe mit den Radien a und b ($a > b$) und den Ladungen q und $-q$ seien in einer Ebene angeordnet. Man bestimme das Potential φ in großem Abstand von diesem Ladungssystem und vergleiche es mit dem Potential des linearen Quadrupols (s. Aufgabe 94).

99*. Man zeige, daß die Ladungsverteilung $\varrho = -(\mathfrak{p}'\vec{V})\,\delta(\mathfrak{r})$ einen elementaren Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}'$ beschreibt, der sich im Koordinatenursprung befindet. Man erkläre das Ergebnis mit Hilfe der anschaulichen Vorstellung über die δ-Funktion (s. Anhang I).

Hinweis: Man gehe von der Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten aus.

---

[1]) Atomkerne, die ein Quadrupolmoment besitzen, kann man in gewisser Näherung als Rotationsellipsoide ansehen.

100. Man zeige, daß die Ladungsverteilung

$$\varrho = q \prod_{i=1}^{n} (\mathfrak{a}_i \vec{V})\, \delta(\mathfrak{r})$$

das Potential

$$\varphi(\mathfrak{r}) = q \prod_{i=1}^{n} (\mathfrak{a}_i \vec{V}) \frac{1}{r}$$

erzeugt.

101. Man berechne das Potential φ in großem Abstand von einem linearen Quadrupol, dessen Achsenrichtung durch die Polarwinkel γ, β bestimmt wird, unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Aufgabe 94 und der Tatsache, daß das Quadrupolmoment ein Tensor zweiter Stufe ist. Nach welchem Verfahren kann man diese Aufgabe außerdem lösen?

102. Ein räumlicher Oktupol (Abb. 8*b*) sei um den Winkel β um die z-Achse gedreht. Man bestimme das Potential φ in großem Abstand von ihm durch Transformation der Komponenten des Oktupolmomentes. Man vergleiche mit anderen Lösungsmethoden.

103. Man bestimme das Potential φ in großen Abständen von einem ebenen Quadrupol, dessen Ebene die z-Achse enthält (Abb. 9). Die Komponenten des Quadrupolmoments lassen sich direkt sowie durch Drehung des in der Aufgabe 94b betrachteten ebenen Quadrupols berechnen.

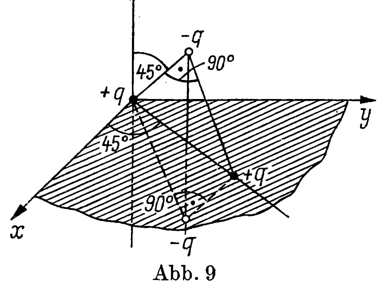


Abb. 9

104. Eine Kugel mit dem Radius R sei gleichförmig polarisiert. Das Dipolmoment der Volumeneinheit sei $\mathfrak{P}$. Man bestimme das Potential φ.

105. Eine zweidimensionale Ladungsverteilung wird durch eine Ladungsdichte $\varrho(\mathfrak{r})$ charakterisiert, die nicht von der Koordinate z abhängt. Ist in einem begrenzten Gebiet S der $x\,y$-Ebene $\varrho(\mathfrak{r}) \neq 0$, so kann man das Potential φ außerhalb der Ladungsverteilung nach Multipolen entwickeln (zweidimensionale Multipole). Wie lautet diese Entwicklung?

Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe 73, das Superpositionsprinzip sowie die Entwicklung

$$\ln(1 + u^2 - 2u\cos\varphi) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} u^k \quad \text{für} \quad |u| < 1;$$

vgl. [72], 1.514.

106. Man entwickle das Potential φ einer linearen Ladung $\varkappa$ nach zweidimensionalen Multipolen. Die geladene Linie sei der z-Achse parallel und gehe durch den Punkt (r_0, α_0) der $x\,y$-Ebene.

107. Man bestimme das Potential φ in großem Abstand von zwei dicht benachbarten parallelen linearen Ladungen $\varkappa$ und $-\varkappa$, die sich im Abstand a voneinander befinden (zweidimensionaler Dipol).

108. Auf einer Scheibe mit dem Radius R befinde sich eine elektrische Doppelschicht vom Moment $\tau = \text{const}$. Man bestimme das Potential φ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ auf der zur Scheibenebene senkrechten Symmetrieachse.

109. Man bestimme die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer elektrischen Doppelschicht vom Moment $\tau = \text{const}$ in der Halbebene $y = 0$, $x > 0$. Man vergleiche mit dem Magnetfeld eines unendlich langen geradlinigen Stromes, der in Richtung der z-Achse fließt. Man löse die Aufgabe durch zwei Methoden:

a) durch direkte Summierung der Feldstärken, die durch kleine Elemente der Doppelschicht erzeugt werden,

b) durch vorherige Bestimmung des elektrostatischen Potentials φ.

110. Man bestimme die Gleichung der Kraftlinien eines Systems zweier Punktladungen, der Ladung $+q$ im Punkt $z = a$ und der Ladung $\pm q$ im Punkt $z = -a$; man zeichne die Kraftlinien. Gibt es Gleichgewichtspunkte im Feld?

Hinweis: Aus Symmetriegründen liegen die Kraftlinien in den Ebenen $\alpha = \text{const}$, während E_z und E_r nicht von α abhängen (Zylinderkoordinaten). In der Differentialgleichung (2.14) der Kraftlinien werden die Variablen durch die Substitutionen

$$u = \frac{z + a}{r}, \qquad v = \frac{z - a}{r}$$

separiert.

111. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorigen Aufgabe ist die Gleichung der Kraftlinien eines im Koordinatenursprung befindlichen punktförmigen Dipols zu bestimmen.

112. Man bestimme die Gleichung der Kraftlinien eines linearen Quadrupols (s. Aufgabe 94a) und zeichne den genäherten Verlauf der Kraftlinien.

113. Man zeige, daß der Fluß des elektrischen Feldes einer Punktladung q durch die Fläche S gleich $q\Omega$ ist. Dabei bedeutet Ω den Raumwinkel, unter dem die Berandung der Fläche S von dem Punkt aus, in dem sich die Ladung q befindet, gesehen wird ($\Omega > 0$, wenn von diesem Punkt aus die negative Seite der Fläche gesehen wird).

114. Auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe mit dem Radius a befinde sich im Abstand a von der Scheibenebene die Ladung q_1. Welche Ladung q_2 muß man in dem bezüglich der Scheibe symmetrischen Punkt anbringen, damit der Fluß des elektrischen Feldes durch die Scheibe in Richtung der Ladung q_1 gleich Φ wird?

115*. Ohne die Differentialgleichungen der Kraftlinien zu integrieren, bestimme man die Gleichung der Kraftlinien eines Systems aus n kollinearen Ladungen $q_1, q_2, \ldots, q_n$, die sich in den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ auf der z-Achse befinden. Man wende den in der Aufgabe 113 bewiesenen Satz auf die Kraftröhre an, die durch Rotation einer Kraftlinie um die Symmetrieachse gebildet wird.

116. Mit Hilfe des Ergebnisses der vorigen Aufgabe bestimme man die Gleichung der Kraftlinien eines Systems zweier Punktladungen (s. Aufgabe 110) und eines linearen Quadrupols (s. Aufgabe 112).

117. Zwei homogen geladene parallele Drähte mit den Ladungen $\varkappa_1$ bzw. $-\varkappa_2$ je Längeneinheit befinden sich im Abstand h voneinander. Bei welchem Verhältnis $\varkappa_1/\varkappa_2$ sind unter den Äquipotentialflächen dieses Systems Kreiszylinder mit endlichem Radius? Man bestimme Radius und Achsenlage der Zylinder.

118. Die Punktladungen q_1 und $-q_2$ befinden sich im Abstand h voneinander. Man zeige, daß es unter den Äquipotentialflächen dieses Systems eine Kugel mit endlichem Radius gibt und bestimme ihre Mittelpunktskoordinaten sowie ihren Radius. Man bestimme den Wert des Potentials φ auf der Kugeloberfläche, falls $\varphi(\infty) = 0$ ist.

119. Welche Ladungsverteilung erzeugt ein Potential, das in Kugelkoordinaten die Form

$$\varphi(r) = q\,\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

hat, wobei α und q Konstanten sind?

120. Welche Ladungsverteilung erzeugt ein Potential, das in Kugelkoordinaten die Form

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{a}\,e^{-2r/a}\left(\frac{a}{r} + 1\right)$$

hat? e_0 und a bedeuten Konstanten.

121. Man bestimme die Wechselwirkungsenergie U der Elektronenwolke mit dem Kern eines Wasserstoffatoms. Die Ladung des Elektrons sei im Atom mit der räumlichen Dichte

$$\varrho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3}\,e^{-2r/a}$$

verteilt, wobei e_0 die Elementarladung ist (s. Aufgabe 83) und a eine Konstante (den Bohrschen Atomradius) bedeutet.

122. In gewisser Näherung kann man annehmen, daß die Elektronenwolken der beiden Elektronen im Heliumatom von gleicher Form sind und durch die räumliche Dichte

$$\varrho = -\frac{8e_0}{\pi a^3}\,e^{-4r/a}$$

beschrieben werden, wobei a der Bohrsche Atomradius und e_0 die Elementarladung sind. Man bestimme die Wechselwirkungsenergie U der Elektronen im Heliumatom in dieser Näherung (nullte Näherung der Störungstheorie).

123. Die Mittelpunkte zweier Kugeln mit den Ladungen q_1 und q_2 befinden sich im Abstand a voneinander. Die Ladungen seien kugelsymmetrisch verteilt. Man bestimme die Wechselwirkungsenergie U der Kugeln und die zwischen ihnen wirkende Kraft F.

124. Eine Seifenblase, die an einem offenen Röhrchen hängt, zieht sich unter der Wirkung der Oberflächenspannung α zusammen. Unter der Annahme,

daß die dielektrische Festigkeit der Luft (die Feldstärke, bei der der elektrische Durchschlag erfolgt) gleich E_0 ist, soll untersucht werden, ob man durch starke Aufladung der Seifenblase ihr Zusammenschrumpfen verhindern kann. Wie groß ist der minimale Gleichgewichtsradius R?

125*. Zwei dünne parallele koaxiale Ringe mit den Radien a und b haben die gleichförmig verteilten Ladungen q_1 und q_2. Der Abstand zwischen den Ringebenen sei c. Man bestimme die Wechselwirkungsenergie U der Ringe und die zwischen ihnen wirkende Kraft F.

126. Man bestimme die Kraft $\mathfrak{F}$ und das Drehmoment $\mathfrak{N}$, die an einem elektrischen Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}$ im Feld der Punktladung q angreifen.

127. Ein Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}_1$ befinde sich im Koordinatenursprung und ein zweiter mit dem Moment $\mathfrak{p}_2$ im Punkt mit dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$. Man bestimme die Wechselwirkungsenergie U dieser Dipole und die zwischen ihnen wirkende Kraft $\mathfrak{F}$. Bei welcher Orientierung der Dipole ist $\mathfrak{F}$ maximal?

128. Ein Ladungssystem werde durch die räumliche Dichte $\varrho(\mathfrak{r})$ charakterisiert und befinde sich in einem begrenzten Gebiet in der Umgebung des Punktes O. Auf das System wirke ein äußeres elektrisches Feld, das in der Umgebung des Punktes O in der Form

$$\varphi_1(\mathfrak{r}) = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, a_{lm}\, r^l\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$$

geschrieben werden kann. Man bestimme die Wechselwirkungsenergie U_1 mit dem äußeren Feld φ_1, indem man sie durch a_{lm} und die Multipolmomente Q_{lm} des Systems ausdrückt (s. Aufgabe 166).

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[10] Becker, R., und F. Sauter: Theorie der Elektrizität, Bd. 1 und 2. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1957.

[25] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 1: Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Springer-Verlag, Berlin 1926 (Übers. aus dem Russ.); Ausgewählte Werke Bd. 1. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1956 (Собрание избранных трудов, т. I).

[43] Gurewitsch, L. E.: Elektrodynamik. Verlag der Staatlichen Universität Leningrad, Leningrad 1940 (*Л. Э. Гуревич:* Электродинамика).

[67] Panofsky, W., und M. Phillips: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.

[78] Smythe, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.

[83] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.

[84] Tamm, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).

3. ELEKTROSTATIK DER LEITER UND DIELEKTRIKA

3.1. Grundbegriffe und Methoden der Elektrostatik

Das elektrostatische Feld in einem Dielektrikum wird durch den Vektor $\mathfrak{E}$ der elektrischen Feldstärke und den Vektor $\mathfrak{D}$ der dielektrischen Verschiebung charakterisiert, die den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{D} &= 4\pi\,\varrho\,, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left.\begin{aligned} \oint_S D_n\,\mathrm{d}S &= 4\pi\,q\,, \\ \oint_l E_l\,\mathrm{d}l &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

genügen, wobei ϱ die Dichte der wahren Ladungen im Dielektrikum bedeutet. Die Dichte der Polarisationsladungen im Dielektrikum kann man durch den Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ (das durch die Polarisationsladungen erzeugte elektrische Dipolmoment je Volumeneinheit des Dielektrikums) beschreiben:

$$\varrho_{\mathrm{P}} = -\operatorname{div} \mathfrak{P}\,. \tag{3.2}$$

Der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ kann durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ ausgedrückt werden:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\,\mathfrak{P}\,. \tag{3.3}$$

Für isotrope Dielektrika in genügend schwachen Feldern gilt

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}\,, \tag{3.4}$$

wobei ε die Dielektrizitätskonstante des Mediums ist. In anisotropen Medien ist ε ein Tensor zweiter Stufe, d.h.

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k \tag{3.5}$$

(über k wird summiert).

Für die Beschreibung des Feldes benutzt man zweckmäßigerweise eine skalare Größe, das Potential φ:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi\,, \qquad \varphi(\mathfrak{r}) = \int_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}_0} \mathfrak{E}\,\mathrm{d}\mathfrak{r}\,. \tag{3.6}$$

Dabei ist $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor des Aufpunktes, und es gilt $\varphi(\mathfrak{r}_0) = 0$.

Das Potential genügt der Gleichung

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\,\varrho\,, \tag{3.7}$$

die in den Gebieten, in denen das Dielektrikum homogen ist, zur Poissonschen Gleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\,\varrho}{\varepsilon} \tag{3.8}$$

führt.

Auf den Trennflächen von Medien mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten müssen die Grenzbedingungen[1])

$$E_{1t} = E_{2t}, \qquad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \tag{3.9}$$

oder

$$\varphi_1 = \varphi_2, \qquad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma \tag{3.10}$$

erfüllt sein. Der Normaleneinheitsvektor $\mathfrak{n}$ zeigt vom ersten Medium in das zweite; $\mathfrak{t}$ ist der Einheitsvektor auf der Trennfläche in Tangentialrichtung und σ die Flächendichte der wahren Ladungen. Die Flächendichte σ_P der Polarisationsladungen auf den Trennflächen wird durch die Gleichung

$$\sigma_P = P_{1n} - P_{2n} \tag{3.11}$$

bestimmt.

Die Grundaufgabe der Elektrostatik besteht in der Bestimmung des Potentials φ. Sie kann mit Hilfe verschiedener Methoden gelöst werden. Die Lösung der Differentialgleichungen (3.7) oder (3.8) mit den Grenzbedingungen (3.9) oder (3.10) bildet die Hauptmethode. Vielfach gelingt es aber auch, ein System scheinbarer Punktladungen so zu wählen, daß sein Feld im betrachteten Gebiet sowohl der Differentialgleichung als auch den Grenzbedingungen genügt (Methode der elektrischen Bilder). In einer Reihe von Fällen kann man die elektrischen Bilder sehr einfach finden (siehe z.B. die Aufgaben 142, 146, 153, 155).

Innerhalb von Leitern, die sich in einem statischen elektrischen Feld befinden, gilt $E = 0$. Die Grenzbedingungen auf der Oberfläche eines Leiters sind also

$$E_t = 0, \qquad \varphi = \text{const.} \tag{3.12}$$

Befindet sich in einem Raumgebiet ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε und ist das elektrostatische Feld im ganzen Raum bekannt, so nimmt das Feld für $\varepsilon \to \infty$ die Form an, die es hätte, wenn das betrachtete Raumgebiet von einem Leiter eingenommen würde.

Die Bestimmung des elektrischen Feldes, das von einem gegebenen System geladener, in einem Dielektrikum eingebetteter Leiter erzeugt wird, ist eindeutig möglich, wenn die Gesamtladung oder das Potential jedes Leiters bekannt ist. Im ersten Fall muß man neben den Bedingungen (3.12) die Randbedingung

$$q = \oint_S \sigma \, \mathrm{d}S = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, \mathrm{d}S \tag{3.13}$$

benutzen, wobei q die Ladung des Leiters ist und das Integral über die Leiteroberfläche erstreckt wird.

---

[1]) Die Grenzbedingungen (3.9) gelten sowohl in isotropen als auch in anisotropen Medien.

Als Kapazität C eines Kondensators bezeichnet man das Verhältnis der Ladung auf einer (der ersten) Belegung zur Potentialdifferenz zwischen den Belegungen:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \tag{3.14}$$

Als Kapazität eines einzelnen Leiters bezeichnet man das Verhältnis seiner Ladung zu seinem Potential (wobei angenommen wird, daß das Potential φ im Unendlichen gleich Null ist).

Die Energie eines elektrostatischen Feldes im Volumen V wird durch ein Integral über V ausgedrückt:

$$W = \int w \, \mathrm{d}V. \tag{3.15}$$

Dabei ist $w = \mathfrak{D}\,\mathfrak{E}/8\pi$ die Energiedichte des Feldes.

Bringt man in ein isotropes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1, in dem das elektrische Feld $\mathfrak{E}_1$ besteht, einen dielektrischen Körper mit dem Volumen V und der Dielektrizitätskonstanten ε_2, so ändert sich die Energie des elektrostatischen Feldes um die Größe

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, \mathfrak{E}_2\, \mathfrak{E}_1 \, \mathrm{d}V, \tag{3.16}$$

wobei $\mathfrak{E}_2$ das elektrische Feld nach dem Einbringen des dielektrischen Körpers ist (dabei bleiben die Quellen des Feldes $\mathfrak{E}_1$ ungeändert). Man kann U als Wechselwirkungsenergie des dielektrischen Körpers mit dem äußeren Feld $\mathfrak{E}_1$ auffassen (s. [83]).

Ist das Dielektrikum isotrop und seine Dielektrizitätskonstante eine Funktion der Massendichte τ allein, so wirkt das elektrische Feld auf das Dielektrikum mit einer Kraft, deren räumliche Dichte durch

$$\mathfrak{f} = \varrho\, \mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad}\left(E^2 \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} \tau\right). \tag{3.17}$$

ausgedrückt wird.

Die Volumenkräfte, die in einem Volumen V an den wahren Ladungen und den Polarisationsladungen angreifen, können durch ein äquivalentes System von Oberflächenspannungen ersetzt werden, die an der Oberfläche S des Volumens V wirken:

$$\mathfrak{F} = \int_V \mathfrak{f} \, \mathrm{d}V = \oint_S \mathfrak{T}_\mathfrak{n} \, \mathrm{d}S. \tag{3.18}$$

Dabei ist $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ die Oberflächenkraft, die an der Oberflächeneinheit mit der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$ angreift.

Die Oberflächenspannungen werden durch den Spannungstensor T_{ik} beschrieben. Die Größe $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ in (3.18) stellt die Komponente von T_{ik} in Rich-

tung der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$ des Elementes dS dar:

$$(\mathfrak{T}_\mathfrak{n})_i = T_{ik}\, n_k,$$

$$T_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_i E_k - \frac{1}{8\pi} E^2 \left(\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau\right) \delta_{ik}. \qquad (3.19)$$

Der Term in (3.17) oder (3.19) mit $\tau\, \partial\varepsilon/\partial\tau$ (Striktionsterm) ist im allgemeinen nicht klein. Bei der Berechnung der resultierenden Kraft im dielektrischen Körper liefert er jedoch keinen Beitrag und kann vernachlässigt werden (siehe z.B. [84], § 34, und die Aufgaben 140, 141). In diesem Fall kann man an Stelle des (vollständigen) Spannungstensors (3.19) den einfacheren MAXWELLschen Spannungstensor

$$\mathfrak{T}_n' = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_n \mathfrak{E} - \frac{1}{2}\, \mathfrak{n} E^2\right) \qquad (3.20)$$

benutzen.

An der Oberflächeneinheit eines Leiters greift im elektrostatischen Feld die Kraft

$$\mathfrak{f}_{\text{Ob}} = \mathfrak{T}_\mathfrak{n}' = \mathfrak{n} \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\sigma \mathfrak{E}}{2} \qquad (3.21)$$

an.

In einer dielektrischen Flüssigkeit, die sich mit dem elektrischen Feld im Gleichgewicht befindet, wird die elektrische Spannung durch den hydrostatischen Druck im Gleichgewicht gehalten. Bezeichnet man mit $p(\tau)$ den Druck in der Flüssigkeit — er wird durch ihre Dichte τ bestimmt —, so erhält man die Gleichgewichtsbedingung

$$p\, \mathfrak{n} + \mathfrak{T}_\mathfrak{n} = \text{const.} \qquad (3.22)$$

Insbesondere ist der Druck $p(\tau)$ in der Flüssigkeit an der Grenze zwischen Flüssigkeit und der Luft ($\varepsilon = 1$) um den Betrag

$$p(\tau) - p_{\text{atm}} = \frac{\tau E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} (\varepsilon E_n^2 + E_t^2) \qquad (3.23)$$

größer als der Atmosphärendruck. Dabei ist $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke in der Flüssigkeit (E_n bedeutet die Normal- und E_t die Tangentialkomponente von $\mathfrak{E}$). Die Gleichung (3.23) bestimmt die Flüssigkeitsdichte in der Nähe ihrer Oberfläche in Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke. Der Druck in der Flüssigkeit (im Gas) wird durch die Gleichung

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\tau(p)} = \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \qquad (3.24)$$

ausgedrückt (p_0 ist der Druck im Punkt mit $E = 0$).

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so folgt

$$p - p_0 = \frac{\tau E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}. \qquad (3.25)$$

Aufgaben:

129. Die Punktladung q befinde sich in der Trennebene zweier homogener unendlich ausgedehnter Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2. Man bestimme das Potential φ, die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ des elektrischen Feldes.

130. Von einer Geraden, auf der sich die Punktladung q befindet, gehen fächerförmig drei Halbebenen aus, die die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ miteinander bilden $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. In den Räumen, die durch die Winkel bestimmt werden, befinden sich homogene Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Man bestimme das Potential φ, das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ und die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ des elektrischen Feldes.

131. Der Mittelpunkt einer leitenden Kugel mit der Ladung q befinde sich in der Trennebene zweier unendlich ausgedehnter homogener Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2. Man bestimme das elektrische Feld sowie die Ladungsverteilung σ auf der Kugel.

132. Der Raum zwischen den Belegungen eines Kugelkondensators sei zum Teil mit einem Dielektrikum gefüllt, das sich innerhalb des Raumwinkels Ω mit dem Mittelpunkt der Belegungen als Scheitel befindet. Die Radien der Belegungen seien a und b, und die Dielektrizitätskonstante des Mediums sei ε. Man bestimme die Kapazität C des Kondensators.

133. Innerhalb eines Kugelkondensators mit den Radien a und b der Belegungen ändere sich die Dielektrizitätskonstante nach dem Gesetz

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \text{const} & \text{für} \quad a \leqq r < c, \\ \varepsilon_2 = \text{const} & \text{für} \quad c \leqq r \leqq b, \end{cases}$$

wobei $a < c < b$ ist.

Man bestimme die Kapazität C des Kondensators, die Verteilung σ_P der Polarisationsladungen und die gesamte Polarisationsladung im Dielektrikum.

134. Ein Kugelkondensator mit den Radien a und b der Belegungen sei mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen Dielektrizitätskonstante nach dem Gesetz $\varepsilon(r) = \varepsilon_0\, a^2/r^2$ von dem Abstand vom Mittelpunkt abhängt. Man zeige, daß die Kapazität dieses Kondensators gleich der Kapazität eines Plattenkondensators ist, der ein homogenes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_0 enthält, wobei die Fläche einer Belegung gleich $4\pi\, a^2$ und der Abstand zwischen den Belegungen gleich $b - a$ ist (Randeffekte sind zu vernachlässigen).

135. Ein Plattenkondensator sei mit einem Medium der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon = \varepsilon_0 (x + a)/a$ gefüllt, wobei a der Abstand zwischen den Belegungen ist und die x-Achse senkrecht auf den Belegungen steht, deren Flächeninhalt gleich S sein soll. Unter Vernachlässigung des Randeffektes bestimme man die Kapazität C dieses Kondensators und die Verteilung der Polarisationsladungen in ihm, wenn an den Belegungen die Potentialdifferenz V liegt.

136.

a) Mit welcher Kraft f_0 je Flächeneinheit ziehen sich im Vakuum die Belegungen eines Plattenkondensators an, wenn der Abstand zwischen ihnen gleich a ist und die Potentialdifferenz V besteht?

b) Welchen neuen Wert f nimmt diese Kraft an, wenn der geladene Kondensator von der Batterie getrennt und danach entweder mit einem flüssigen Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ε gefüllt oder in ihn eine Platte eines festen Dielektrikums derselben Dielektrizitätskonstanten ε gebracht wird, deren Dicke ein wenig kleiner als a ist, damit sie nicht die Belegungen berührt?

c) Wie groß ist die Anziehungskraft f zwischen den Belegungen, wenn man den Kondensator zunächst mit einem flüssigen Dielektrikum übergießt bzw. in ihn eine Platte eines Dielektrikums einführt und danach auflädt?

137. Die Belegungen eines Plattenkondensators befinden sich im Abstand h_1 voneinander und haben beide die Form eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b. Zwischen den Belegungen befinde sich parallel zu ihnen eine Platte eines Dielektrikums mit der Dielektrizitätskonstanten ε in Form eines Parallelepipeds der Dicke h_2 und der Grundfläche $a\,b$, die mit dem Teil x der Seite a außerhalb des Kondensators liege. Man bestimme die Kraft F, mit der die Platte in den Kondensator hineingezogen wird, in den folgenden beiden Fällen:

a) Auf den Belegungen werde die Potentialdifferenz V aufrechterhalten.

b) Die Ladung q der Belegungen sei konstant.

Randeffekte werden nicht berücksichtigt.

138*. Ein Plattenkondensator sei in einer inkompressiblen Flüssigkeit mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Dichte τ derart angeordnet, daß seine Belegungen senkrecht stehen. Der Abstand zwischen den Belegungen sei d, die Potentialdifferenz sei V. Man bestimme die Höhe h, auf die die Flüssigkeit im Kondensator emporgehoben wird.

Hinweis: Man benutze die Beziehungen (3.23) und (3.25).

139. Welche Richtung hat die MAXWELLsche Spannung $\mathfrak{T}'_{\mathfrak{n}}$, die an einer Fläche dS angreift, deren Normale $\mathfrak{n}$ mit der Richtung des Feldes $\mathfrak{E}$ den Winkel ϑ bildet? Wie groß ist $\mathfrak{T}'_{\mathfrak{n}}$? Welche Richtung hat die Striktionsspannung $\mathfrak{T}''_{\mathfrak{n}}$?

140. Zwei gleiche Punktladungen q befinden sich in einem homogenen flüssigen Dielektrikum ε im Abstand a voneinander. Man berechne mit Hilfe des MAXWELLschen oder des vollständigen Spannungstensors die Kraft $\mathfrak{F}$, die an jeder der Ladungen angreift. Aus welchen Komponenten setzt sich die elektrische Wechselwirkungskraft $q^2/a^2\,\varepsilon$ der Ladungen zusammen? Zum Vergleich berechne man die Kraft, die

a) an der senkrecht auf der Verbindungsgeraden stehenden Symmetrieebene,

b) an der Oberfläche einer Kugel, in deren Mittelpunkt sich eine der Ladungen befindet,

angreift.

141. Eine ungeladene leitende Kugel mit dem Radius R und der Masse m schwimme in einer Flüssigkeit mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Dichte τ und tauche in sie mit einem Viertel ihres Volumens ein. Auf welches Potential φ_0 muß man die Kugel aufladen, damit sie zur Hälfte eintaucht?

Man löse die Aufgabe mit Hilfe

a) des MAXWELLschen Spannungstensors,

b) des vollständigen Spannungstensors, der den Striktionsterm enthält.

142. Die Ladung q befinde sich im Punkt A im Abstand a von der Trennebene zweier unendlich ausgedehnter homogener Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 (Abb. 10). Man bestimme das Potential φ des elektrischen Feldes mit der Methode der elektrischen Bilder.

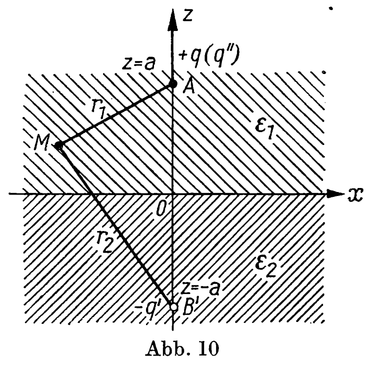


Abb. 10

Hinweis: Die Lösung ist in der Form

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} - \frac{q'}{\varepsilon_1 r_2} \quad \text{für} \quad z \geqq 0,$$

$$\varphi_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r_1} \quad \text{für} \quad z < 0$$

anzusetzen, wobei $-q'$ und q'' die gesuchten effektiven Ladungen sind, die sich in den Punkten B' und A befinden; zur Bedeutung von r_1 und r_2 vgl. Abb. 10.

143. Man bestimme die Dichte σ_P der Oberflächen-Polarisationsladungen, die an der Trennebene zweier homogener Dielektrika mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 durch die Punktladung q induziert werden (s. Aufgabe 142). Welches Ergebnis erhält man für $\varepsilon_2 \to \infty$, und was ist seine physikalische Bedeutung?

144. Man bestimme die Kraft F, die in Aufgabe 142 an der Punktladung angreift (elektrische Bildkraft). Man löse das Problem mit Hilfe mehrerer Methoden, insbesondere mit dem MAXWELLschen Spannungstensor. Kann sich die Ladung durch das Dielektrikum hindurchbewegen, so ist diese Bewegung qualitativ zu beschreiben.

145*. Zwei homogene Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 sollen den ganzen Raum erfüllen und sich auf einer unendlich ausgedehnten Ebene berühren. Beiderseits der Trennebene befinden sich auf einer Geraden, die auf ihr senkrecht steht, im Abstand a von der Trennebene die Ladungen q_1 und q_2. Man bestimme die Kräfte F_1 und F_2, die an jeder der Ladungen angreifen. Wodurch ist die Ungleichheit dieser Kräfte zu erklären?

146. Die Punktladung q befinde sich in einem homogenen Dielektrikum im Abstand a von der Trennebene eines unendlich ausgedehnten Leiters. Man bestimme das elektrische Feld φ im Dielektrikum, die Verteilung σ der im Metall induzierten Ladungen und die Kraft F, die an der Ladung q angreift.

147. Der Winkel zwischen zwei geerdeten leitenden Ebenen sei α_0. Innerhalb des Winkels befinde sich die Ladung q. Man bestimme das elektrische Feld mit der Methode der elektrischen Bilder. Man betrachte die Fälle $\alpha_0 = 90°$, $\alpha_0 = 60°$ und $\alpha_0 = 45°$.

148. Ein elektrischer Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}$ befinde sich in einem homogenen Dielektrikum in der Nähe der Trennebene eines unendlich ausgedehnten Leiters. Man bestimme die potentielle Wechselwirkungsenergie U zwischen dem Dipol und den induzierten Ladungen sowie die Kraft $\mathfrak{F}$ und das Drehmoment $\mathfrak{N}$, die am Dipol angreifen.

149*. Eine homogene Kugel mit dem Radius a und der Dielektrizitätskonstanten ε_1 befinde sich in einem homogenen unbegrenzten Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2. In großem Abstand von der Kugel bestehe im Dielektrikum ein homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke $\mathfrak{E}_0$. Man bestimme das Potentialfeld φ im ganzen Raum, zeichne die Kraftlinien für die beiden Fälle $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ und berechne die Verteilung der Polarisationsladungen.

150. Ein unbegrenztes Dielektrikum sei homogen und gleichmäßig polarisiert (Polarisationsvektor $\mathfrak{P} = \text{const}$). Nun werde ein kugelförmiger Hohlraum ausgeschnitten. Man bestimme das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ im Hohlraum für die beiden Fälle, daß

a) sich bei der Bildung des Hohlraums die Polarisation im umgebenden Dielektrikum nicht ändert, [1])

b) sich die Polarisation infolge der Änderung des Feldes ändert $[\mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\,\mathfrak{E}/4\pi]$.

151. Eine ungeladene Metallkugel mit dem Radius R werde in ein elektrisches Feld gebracht, das bei Abwesenheit der Kugel homogen und gleich $\mathfrak{E}_0$ sei. Die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums sei $\varepsilon_0 = \text{const}$. Man bestimme das resultierende Potential φ und die Flächenladungsdichte σ auf der Kugel.

152*. Zwei gleiche Punktladungen $q_1 = q_2 = q$ befinden sich im Abstand a voneinander in einem festen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1. Die Ladungen seien in den Mittelpunkten kleiner kugelförmiger Hohlräume mit dem Radius R angeordnet. Wie groß sind die Kräfte, die an den Ladungen angreifen? Man vergleiche mit den elektrischen Spannungen, die an der senkrecht auf der Verbindungsgeraden zwischen den Ladungen stehenden Symmetrieebene angreifen.

153*. Eine leitende Kugel mit dem Radius R befinde sich im Feld der Punktladung q, deren Abstand vom Kugelmittelpunkt $a > R$ sei. Das System sei in ein homogenes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε eingebettet. Man bestimme das Potential φ des Feldes und die Verteilung σ der induzierten Ladungen auf der Kugel, falls

a) das Potential V der Kugel (im Unendlichen ist $\varphi = 0$),

b) die Ladung Q der Kugel

vorgegeben ist. Das Potential ist als Summe von Potentialen gewisser Punktladungen (Bildladungen) darzustellen.

---

[1]) Das ist der Fall, wenn das Dielektrikum aus polaren Molekülen mit fester Orientierung besteht („Elektret").

Hinweis: Man benutze die Lösung der LAPLACEschen Gleichung in Form einer Reihe nach Kugelfunktionen (Anhang II) und die in der Aufgabe 96 erhaltene Entwicklung des Feldes einer Punktladung.

154. In einem Leiter mit dem Potential V gebe es einen kugelförmigen Hohlraum mit dem Radius R, in dem sich ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε befinde. Im Abstand a vom Hohlraummittelpunkt ($a > R$) befinde sich die Punktladung q. Man bestimme das Feld im Hohlraum und das äquivalente System von Bildladungen.

155. Eine geerdete leitende Ebene besitze eine Ausbeulung in Form einer Halbkugel mit dem Radius a. Der Kugelmittelpunkt liege in der Ebene. Auf der Symmetrieachse des Systems befinde sich im Abstand $b > a$ von der Ebene die Punktladung q. Mit der Methode der elektrischen Bilder bestimme man das Potential φ sowie die Ladung q', die auf der Halbkugel induziert wird.

156. Eine leitende Kugel mit dem Radius R_1 befinde sich in einem homogenen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1. Innerhalb der Kugel sei ein kugelförmiger Hohlraum mit dem Radius R_2 mit einem homogenen Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ε_2 gefüllt. Im Hohlraum sei im Abstand a von seinem Mittelpunkt ($a < R_2$) die Punktladung q angeordnet. Man bestimme das Potential φ im ganzen Raum.

157*. Eine dielektrische Kugel mit dem Radius R und der Dielektrizitätskonstanten ε_1 befinde sich in einem homogenen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2. Im Abstand $a > R$ vom Kugelmittelpunkt sei die Punktladung q angeordnet. Man bestimme das Potential φ im ganzen Raum. Erhält man durch einen geeigneten Grenzübergang das Potential einer leitenden Kugel?

158. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß sich die Punktladung q innerhalb der dielektrischen Kugel befindet ($a < R$). Insbesondere soll der Fall $a = 0$ (Ladung im Kugelmittelpunkt) betrachtet werden.

159*. Eine isolierte Metallkugel mit dem Radius a befinde sich in einer metallischen Hohlkugel mit dem Radius b. Der Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten sei gleich c mit $c \ll a$, $c \ll b$. Die Gesamtladung der inneren Kugel sei q. Man bestimme die Ladungsverteilung σ auf der inneren Kugel und die auf sie wirkende Kraft F bis auf lineare Terme in c genau.

160. Ein Kugelkondensator werde durch zwei nichtkonzentrische Kugeln gebildet (vgl. die vorige Aufgabe). Man berechne die Korrektion ΔC zur Kapazität, die durch die Abweichung vom konzentrischen Fall hervorgerufen wird, in der ersten nichtverschwindenden Näherung.

161. Man bestimme die Energie U und die Kraft F der Wechselwirkung zwischen der Punktladung q und einer geerdeten leitenden Kugel mit dem Radius R. Die Ladung befinde sich im Abstand a vom Kugelmittelpunkt. Das System sei in ein homogenes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε eingebettet.

162. Die Punktladung q befinde sich in einem Dielektrikum im Abstand a vom Mittelpunkt einer leitenden isolierten Kugel mit dem Radius R. Die

Ladung der Kugel sei Q. Man bestimme die Energie U und die Kraft F der Wechselwirkung zwischen Ladung und Kugel.

163. Welcher Bedingung muß eine Probeladung q genügen (im Sinne ihrer Größe und räumlichen Lage), damit man mit ihrer Hilfe das Feld eines Systems von Ladungen untersuchen kann, die sich auf leitenden und dielektrischen Körpern befinden, insbesondere das Feld einer geladenen Kugel in einem homogenen Dielektrikum?

164*. Der elektrische Dipol $\mathfrak{p}$ befinde sich in einem homogenen Dielektrikum im Abstand r vom Mittelpunkt einer geerdeten leitenden Kugel mit dem Radius R. Man bestimme das System von Bildladungen, das den induzierten Ladungen äquivalent ist, die Wechselwirkungsenergie U des Dipols mit der Kugel sowie die Kraft F und das Drehmoment N, die am Dipol angreifen. Man untersuche den Grenzübergang $r \to R$ $(r > R)$.

165. Im Mittelpunkt eines kugelförmigen Hohlraums mit dem Radius R in einem Leiter befinde sich der elektrische Dipol $\mathfrak{p}$. Man bestimme die Verteilung σ der Ladungen, die auf der Hohlraumoberfläche induziert werden. Welches Feld $\mathfrak{E}'$ wird im Hohlraum durch diese Ladungen erzeugt?

166*. In einem homogenen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε existiere ein elektrisches Feld, dessen Potential in der Umgebung eines Punktes O in der Form

$$\varphi_1 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, a_{lm}\, r^l\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$$

dargestellt werden kann.

In der Umgebung des Punktes O werde nun die Homogenität und Neutralität des Dielektrikums gestört (indem man z.B. dort einen im allgemeinen geladenen Leiter oder ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$ anbringt). Infolgedessen erhält das Potential des elektrischen Feldes außerhalb des Gebietes der Inhomogenität die Form $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, wobei

$$\varphi_2 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, \varepsilon^{-1}\, r^{-(l+1)}\, Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$$

das Potential des Feldes bedeutet, das durch die wahren und die Polarisationsladungen im Gebiet der Inhomogenität erzeugt wird (der Faktor ε wurde aus Zweckmäßigkeitsgründen eingeführt). Man bestimme die potentielle Energie U der Wechselwirkung des Inhomogenitätsgebietes mit dem äußeren Potential φ_1.

Hinweis: Man betrachte die elektrischen Spannungen, die an der geschlossenen Oberfläche um das Inhomogenitätsgebiet angreifen, und benutze das Ergebnis der Aufgabe 128.

167. Man bestimme die Wechselwirkungsenergie U_0 des in der vorigen Aufgabe betrachteten Inhomogenitätsgebietes mit dem äußeren Potential für den Fall, daß es infolge starker Konvergenz genügt, die Terme mit $l = 0$ und $l = 1$ zu berücksichtigen (schwach veränderliches äußeres Feld). Das Ergebnis ist in vektorieller Form darzustellen. Man bestimme in dieser Näherung die Kraft $\mathfrak{F}$ und das Drehmoment $\mathfrak{N}$, die am Inhomogenitätsgebiet angreifen.

168. Man zeige, daß ein ungeladener dielektrischer Körper mit der Dielektrizitätskonstanten ε_0, der sich in einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε befindet, in das Gebiet mit der größeren elektrischen Feldstärke hineingezogen wird, falls $\varepsilon_0 > \varepsilon$ ist, und aus diesem Gebiet hinausgestoßen wird, falls $\varepsilon_0 < \varepsilon$ gilt.

Hinweis: Man benutze die Formel (3.16).

169. Im allgemeinen kann man die Komponenten des Dipolmomentes $\mathfrak{p}$, das ein dielektrischer Körper im äußeren homogenen Feld $\mathfrak{E}$ erhält, in der Form $p_i = \beta_{ik} E_k$ darstellen, wobei β_{ik} der symmetrische Polarisierbarkeitstensor des Körpers ist. Welche Orientierung nimmt der Körper im äußeren homogenen Feld ein? Der Körper sei ungeladen, der Tensor β_{ik} definit [$\beta_{ik}\, x_i\, x_k > 0$, $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) ist ein beliebiger Vektor].

170. Ein Stab aus einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1 befinde sich in einem homogenen flüssigen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2. Welche Orientierung nimmt der Stab in einem homogenen äußeren Feld ein? Welche Orientierung erhält eine dünne Scheibe im flüssigen Dielektrikum?

171. Man bestimme die Kraft F, die eine Punktladung q auf eine dielektrische Kugel ausübt (s. die Bedingung der Aufgabe 157).

Man untersuche den Grenzfall einer leitenden Kugel und löse die Aufgabe mit Hilfe der Methode der Aufgabe 166 sowie der Gleichung (3.16).

172. Ein elektrostatisches Feld werde durch zwei leitende Zylinder mit parallelen Achsen, den Radien R_1 und R_2 und den Ladungen $\pm\varkappa$ je Längeneinheit erzeugt. Der Abstand der Zylinderachsen sei $a > R_1 + R_2$. Man bestimme die gegenseitige Kapazität C_g der Zylinder je Längeneinheit [$C_g = \varkappa/(\varphi_1 - \varphi_2)$, wobei φ_1 und φ_2 die Zylinderpotentiale sind].

Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe 117.

173. Die Achsen zweier gleicher leitender Zylinder mit den Radien R befinden sich im Abstand a voneinander. Die Zylinder haben die Ladungen $\pm\varkappa$ je Längeneinheit. Man bestimme die Ladungsverteilung σ auf den Zylinderoberflächen.

174. Zwei zylinderförmige leitende Flächen mit den Radien R_1 und $R_2 > R_1$ bilden einen Kondensator. Der Abstand der Zylinderachsen sei $a < R_2 - R_1$. Man bestimme die Kapazität C dieses Kondensators.

175. Man bestimme das Potential φ einer Punktladung im homogenen anisotropen Medium, das durch den dielektrischen Tensor ε_{ik} charakterisiert wird.

176. Im Vakuum befinde sich ein Plättchen mit parallelen Ebenen aus einem anisotropen homogenen Dielektrikum mit dem dielektrischen Tensor ε_{ik}. Außerhalb des Plättchens bestehe ein homogenes elektrisches Feld $\mathfrak{E}_0$. Mit Hilfe der Randbedingungen für den Feldvektor ist das Feld $\mathfrak{E}$ innerhalb des Plättchens zu bestimmen.

177. Man bestimme die Kapazität C eines Plattenkondensators mit den Belegungsflächen S und dem Abstand a zwischen ihnen, wenn sich zwischen den

Belegungen ein anisotropes Dielektrikum mit den Dielektrizitätskonstanten ε_{ik} befindet. Der Randeffekt ist zu vernachlässigen.

178. Man bestimme die Änderung der Richtung der Vektorlinien von $\mathfrak{E}$ beim Übergang vom Vakuum in ein anisotropes Dielektrikum. Dabei ist das Ergebnis der Aufgabe 176 zu benutzen.

3.2. Potential- und Kapazitätskoeffizienten

Die Potentiale V_i eines Systems aus n Leitern sind lineare homogene Funktionen der Ladungen q_k auf den Leitern:

$$V_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}\, q_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.26}$$

Die s_{ik} bezeichnet man als Potentialkoeffizienten. Sie hängen von der gegenseitigen Lage, der Form und den geometrischen Abmessungen der Leiter sowie von der Dielektrizitätskonstanten des umgebenden Mediums ab. Die Matrix $\boldsymbol{s}$ ist symmetrisch:

$$s_{ik} = s_{ki}. \tag{3.27}$$

s_{ik} ist das Potential, das der i-te Leiter erhält, wenn dem k-ten Leiter die Ladung q_k zugeführt wird und die übrigen Leiter ungeladen bleiben. Alle s_{ik} sind positiv.

Offensichtlich sind auch die Ladungen der Leiter lineare homogene Funktionen ihrer Potentiale:

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} V_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.28}$$

Die Größen c_{ik} bezeichnet man als Kapazitätskoeffizienten. Dabei gilt $c_{ii} > 0$ (eigentliche Kapazitätskoeffizienten oder kurz eigentliche Kapazitäten) und $c_{ik} = c_{ki} < 0$ für $i \neq k$ (Influenzierungskoeffizienten, Koeffizienten der gegenseitigen Kapazität oder kurz gegenseitige Kapazitäten). c_{ik} ist die Ladung, die der i-te Leiter erhält, wenn alle Leiter außer dem k-ten geerdet sind und der k-te Leiter das Potential $V_k = 1$ hat. Die Matrizen s_{ik} und c_{ik} sind zueinander invers.

Im Falle eines homogenen Leiters gibt es nur einen einzigen Kapazitätskoeffizienten c_{11}, den man kurz als die Kapazität des Leiters bezeichnet. Die Kapazität eines Kondensators (3.14) kann durch die Kapazitätskoeffizienten seiner Belegungen ausgedrückt werden (s. Aufgabe 180).

Die Energie eines Leitersystems ist

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} V_i V_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} s_{ik}\, q_i\, q_k. \tag{3.29}$$

Die verallgemeinerte Kraft F_a, die der verallgemeinerten Koordinate a entspricht, wird durch die Gleichungen

$$F_a = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial s_{ik}}{\partial a}\, q_i\, q_k = +\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial c_{ik}}{\partial a} V_i V_k \tag{3.30}$$

bestimmt.

Bei der Lösung elektrostatischer Probleme ist es günstig, das GREENsche Reziprozitätstheorem zu benutzen: Sind die Potentiale von n Leitern mit den Ladungen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ gleich $V_1, V_2, \ldots, V_n$ und mit den Ladungen q'_1, $q'_2, \ldots, q'_n$ gleich $V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$, so gilt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} q_i V'_i = \sum_{i=1}^{n} q'_i V_i. \tag{3.31}$$

Aufgaben:

179. Man beweise das GREENsche Reziprozitätstheorem (3.31).

180. Ein System bestehe aus zwei Leitern, die von allen anderen Leitern sehr weit entfernt sind. Der Leiter *1* befinde sich innerhalb des Hohlleiters *2*. Man drücke die Kapazitäten C und C' des Kondensators und des weit entfernten Leiters, die dieses System bilden, durch seine Kapazitätskoeffizienten aus.

181. Für den Fall eines aus zwei Leitern bestehenden Systems drücke man die Potentialkoeffizienten s_{ik} durch die Kapazitätskoeffizienten c_{ik} aus.

182. Die Kapazitäten zweier im Vakuum befindlicher, weit voneinander entfernter Leiter seien C_1 und C_2. Ihr Abstand r sei groß gegen ihre Abmessungen. Man zeige, daß die Kapazitätskoeffizienten des Systems

$$c_{11} = C_1\left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2}\right), \quad c_{12} = -\frac{C_1 C_2}{r}, \quad c_{22} = C_2\left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2}\right)$$

sind.

Hinweis: Zunächst bestimme man die Potentialkoeffizienten mit einer Genauigkeit bis auf Terme der Ordnung $1/r$.

183. Die Kapazitätskoeffizienten eines Systems zweier Leiter seien c_{11}, c_{22}, $c_{12} = c_{21}$. Man bestimme die Kapazität C des Kondensators, dessen Belegungen durch diese beiden Leiter gebildet werden.

184. Vier gleiche leitende Kugeln seien an den Ecken eines Quadrats angeordnet. Die Kugel *1* habe die Ladung q_1 und werde nacheinander mit Hilfe eines dünnen Drahtes jeweils nach einer Zeit, in der sich Gleichgewicht eingestellt hat, mit den Kugeln *2*, *3* und *4* verbunden (zyklische Numerierung). Man bestimme die Ladungsverteilung auf den Kugeln nach Ausführung aller Operationen. Die Potentialkoeffizienten des Systems seien vorgegeben.

185. Drei gleiche leitende Kugeln mit den Radien a befinden sich in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $b \gg a$. Anfangs habe jede Kugel die Ladung q. Die Kugeln werden nun der Reihe nach jeweils nach Einstellung des Gleichgewichts geerdet. Welche Ladung hat jede Kugel nach der Ausführung aller Operationen?

186. Zwei Leiter, die sich in einem homogenen Dielektrikum befinden, haben die eigentlichen Kapazitäten C_1 und C_2 und die Potentiale V_1 und V_2; ihr gegenseitiger Abstand r sei groß gegen ihre Abmessungen. Man bestimme die zwischen ihnen wirkende Kraft F.

187. Innerhalb einer geschlossenen leitenden Oberfläche mit dem Potential V_1 befinde sich ein Leiter mit dem Potential V_0. Dabei sei das Potential

in einem Punkt P zwischen den leitenden Flächen gleich V_P. Welche Ladungen werden auf den Leitern induziert, wenn diese geerdet werden und im Punkt P die Ladung q angebracht wird?

188. Man zeige, daß bei Abwesenheit einer Punktladung der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus eine Einheitsladung in einem geerdeten Leiter dieselbe Ladung induziert, mit einer Äquipotentialfläche des Feldes dieses Leiters übereinstimmt.

189. Zwei Leiter mit den eigentlichen Kapazitäten c_{11} und c_{22} und der gegenseitigen Kapazität c_{12}, die zu einem System isolierter Leiter gehören, seien durch einen dünnen Draht miteinander verbunden. Wie groß sind die eigentliche Kapazität des vereinigten Leiters sowie seine gegenseitigen Kapazitäten gegen die übrigen Leiter des Systems?

190. Zwei gleiche Kugelkondensatoren, deren innere und äußere Belegungen die Radien a bzw. b haben, seien isoliert und weit voneinander entfernt. Auf die inneren Kugeln werden die Ladungen q und q_1 gebracht, danach werden die äußeren Kugeln durch einen Draht miteinander verbunden. Man bestimme (näherungsweise) die Energieänderung ΔW im System.

191. Die geerdete äußere Belegung eines Kugelkondensators sei dünn. Ein isolierter Leiter, der durch eine kleine Öffnung in der äußeren Belegung führt, verbinde die innere Kondensatorbelegung mit einem dritten Leiter, der weit vom Kondensator entfernt sei. Dieser Leiter habe die eigentliche Kapazität C und trage zusammen mit der inneren Kondensatorbelegung die Ladung q. Der Radius der äußeren bzw. inneren Kondensatorbelegung sei b bzw. a. Man bestimme die Kraft F, die am dritten Leiter angreift.

192*. Ein Leiter werde durch aufeinanderfolgende Kontakte mit der geladenen Kugel eines Elektrophors aufgeladen. Die Kugel des Elektrophors werde nach jedem Kontakt erneut aufgeladen und erhalte dabei die Ladung Q. Beim ersten Kontakt werde die Ladung q von der Kugel auf den Leiter übertragen. Welche Ladung erhält der Leiter nach sehr vielen Kontakten?

3.3. Spezielle Methoden der Elektrostatik

Die Aufgaben dieses Abschnitts beziehen sich auf verschiedene Gebiete der Elektrostatik, die in mathematischer Hinsicht schwierig zu behandeln sind. In der Literatur findet man zahlreiche Lösungsmethoden elektrostatischer Probleme (siehe z.B. [40], [55], [58], [78], [83]). In der vorliegenden Aufgabensammlung können nur einige dieser Methoden veranschaulicht werden: die Methode der krummlinigen Koordinaten (für elliptische Flächen und die Oberflächen zweier Kugeln), die Methode der elektrischen Bilder, die Methode der Integraltransformationen und die Methode der Inversion. Ihre Anwendung wird unmittelbar bei der Lösung der Aufgaben erläutert (Näheres findet man z.B. in den Aufgaben 193, 195, 205, 209, 211, 215). Wir beschreiben hier nur kurz die Inversionsmethode.

Als Inversion bezeichnet man die Transformation des Raumes, bei der jeder Raumpunkt in einen Punkt abgebildet wird, der konjugiert zu einer geeignet gewählten Inversionskugel vom Radius R liegt. Sind r, ϑ, α die Kugelkoordinaten des ursprünglichen Punktes (wobei der Ursprung im Mittelpunkt der Inversionskugel, dem sogenannten Inversionszentrum, liegt), so sind $r' = R^2/r$, ϑ, α die Kugelkoordinaten des gespiegelten Punktes. In Vektorschreibweise gilt

$$\mathfrak{r}' = \frac{R^2\,\mathfrak{r}}{r^2} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r} = \frac{R^2\,\mathfrak{r}'}{r'^2}. \tag{3.32}$$

Die Inversion ist eine konforme Transformation, bei der eine Kugel in eine Kugel übergeht. Liegt das Inversionszentrum insbesondere auf der zu transformierenden Kugel, so transformiert sie sich in eine Ebene (und umgekehrt).

Die LAPLACEsche Gleichung ist gegen Inversion invariant: Ist die Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ Lösung der LAPLACEschen Gleichung im ursprünglichen Raum, so ist die Funktion

$$\varphi'(\mathfrak{r}') = \frac{r}{R}\,\varphi(\mathfrak{r}) = \frac{R}{r'}\,\varphi\left(\frac{R^2}{r'^2}\,\mathfrak{r}'\right) \tag{3.33}$$

Lösung der LAPLACEschen Gleichung im gespiegelten Raum.

Die Hauptaufgabe, die sich mit Hilfe der Inversionsmethode lösen läßt, besteht darin, das Feld eines Systems geerdeter Leiter und Punktladungen q_i zu bestimmen, die sich in den Punkten $\mathfrak{r}_i$ befinden. Das Potential im Unendlichen ist $V = \text{const}$. Zur Lösung dieser Aufgabe sucht man eine Inversion, die die Leiteroberflächen in eine einfachere Form überführt.

Die Punktladungen q_i werden dabei durch die Ladungen

$$q_i' = \frac{R}{r_i}\,q_i \tag{3.34}$$

ersetzt, die sich an den Orten $\mathfrak{r}_i' = R^2\,\mathfrak{r}_i/r_i^2$ befinden.

Außerdem erscheint im Punkt $\mathfrak{r}' = 0$ die Punktladung

$$q_0 = -R\,V. \tag{3.35}$$

Man löst das elektrostatische Problem, d.h. bestimmt das Potential $\varphi'(\mathfrak{r}')$, im gespiegelten System. Das Potential $\varphi(\mathfrak{r})$ erhält man dann durch die inverse Transformation. Natürlich kann man auch bei bekanntem φ das Potential φ' bestimmen.

Aufgaben:

193*. Ein leitendes Ellipsoid mit der Ladung q und den Halbachsen a, b, c befinde sich in einem homogenen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε. Man bestimme das Potential φ, die Kapazität C sowie die Flächenladungsdichte σ des Ellipsoids.

Hinweis: Man benutze elliptische Koordinaten (s. Aufgabe 64) und bestimme das Potential in der Form $\varphi(\xi)$.

194. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorigen Aufgabe sind die Potentiale eines gestreckten und eines abgeplatteten Rotationsellipsoids zu bestimmen. Man untersuche die Spezialfälle eines langen dünnen Stabes und einer dünnen Scheibe. Die Kapazität C und das Potential φ eines gestreckten Rotationsellipsoids sind auch mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 75 zu bestimmen.

195*. Im Vakuum befinde sich ein leitendes Ellipsoid mit der Ladung q in einem homogenen äußeren Feld, dessen Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ einer Achse des Ellipsoids parallel ist. Man bestimme das Potential φ des elektrischen Gesamtfeldes.
Hinweis: Man benutze die elliptischen Koordinaten der Aufgabe 64. Die Randbedingungen auf der Oberfläche des Ellipsoids ($\xi = 0$) können nur dann erfüllt werden, wenn das Potential φ', das durch die induzierten Ladungen hervorgerufen wird, in derselben Weise wie das äußere Feld von η und ζ abhängt: $\varphi' = \varphi_0(\xi, \eta, \zeta)\, F(\xi)$.

196. Die Feldstärke in einem Plattenkondensator sei E_0. Die geerdete Belegung habe eine leitende Ausbeulung in der Form eines halben gestreckten Rotationsellipsoids, dessen Symmetrieachse senkrecht auf den Belegungen stehe. Der Abstand zwischen den Belegungen sei groß gegen die Abmessungen des Ellipsoids. Um wieviel ist die maximale Feldstärke $E_{\max}$ größer als E_0?[1])

197. Ein leitendes ungeladenes Ellipsoid befinde sich in einem äußeren homogenen Feld $\mathfrak{E}_0$, das bezüglich der Achsen des Ellipsoids beliebig orientiert sei. Man bestimme das elektrische Gesamtpotential φ. Das Feld ist in großen Abständen vom Ellipsoid zu betrachten und dabei durch die Depolarisationskoeffizienten

$$n^{(x)} = \frac{a\,b\,c}{2} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s + a^2)\, R_s}, \qquad n^{(y)} = \frac{a\,b\,c}{2} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s + b^2)\, R_s},$$

$$n^{(z)} = \frac{a\,b\,c}{2} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s + c^2)\, R_s} \qquad \left(R_s = \sqrt{(s + a^2)\,(s + b^2)\,(s + c^2)}\right)$$

auszudrücken.

198. Man bestimme die Ausdrücke für die in der vorigen Aufgabe eingeführten Depolarisationskoeffizienten im Falle eines gestreckten Rotationsellipsoids ($a > b = c$) und untersuche die Spezialfälle eines stark gestreckten (Stab) und eines nahezu kugelförmigen Ellipsoids.

199. Man bestimme die Depolarisationskoeffizienten für ein abgeplattetes leitendes Ellipsoid ($a = b > c$) und untersuche insbesondere den Fall einer Scheibe.

200*. Ein dielektrisches Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c befinde sich in einem homogenen äußeren Feld der Stärke $\mathfrak{E}_0$. Die Dielektrizitätskonstante des Ellipsoids sei ε_1 und die des ihn umgebenden homogenen Dielektrikums ε_2. Man bestimme das Potential φ des resultierenden elektrischen Feldes (s. den Hinweis zur Aufgabe 195). Außerdem sind die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ im

---

[1]) Das Resultat der Aufgabe erklärt das Arbeitsprinzip des Blitzableiters.

Ellipsoid und das Potential φ_2 in großem Abstand vom Ellipsoid zu berechnen, das durch die Komponenten der Polarisierbarkeit des Ellipsoids in den Hauptachsenrichtungen ausgedrückt werden soll.

201. Ein Rotationsellipsoid mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1 befinde sich in einem äußeren homogenen Feld $\mathfrak{E}_0$ innerhalb eines homogenen dielektrischen Mediums ε_2. Man bestimme die Energie U des Ellipsoids in diesem Feld und das an ihm angreifende Drehmoment N. Man untersuche außerdem den Fall eines leitenden Rotationsellipsoids.

202*. Man zeige, daß ein leitender kugelförmiger Flüssigkeitstropfen bei Zuführung einer genügend großen Ladung seine Stabilität verliert. Man bestimme die kritische Ladung q_{kr}. Der Radius des Tropfens sei R, seine Oberflächenspannung α.

Hinweis: Man vergleiche die Energien eines kugelförmigen Tropfens und eines deformierten Tropfens, der die Form eines gestreckten Rotationsellipsoids hat. Die Oberfläche dieses Ellipsoids ist

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos\frac{b}{a} \qquad (a > b = c).$$

203*. Ein zur z-Achse paralleles homogenes elektrisches Feld $\mathfrak{E}_0$ im Halbraum $z < 0$ werde durch die leitende geerdete Ebene $z = 0$ mit einer Öffnung vom Radius a begrenzt. Man bestimme das Potential φ im ganzen Raum und untersuche insbesondere das Potential in großen Abständen von der Öffnung (im Halbraum $z > 0$).

Hinweis: Man benutze die Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids (s. Aufgabe 65) mit $c = 0$. Die Lösung im ganzen Raum ist in der Form $\varphi = -E_0 z F(\xi)$ anzusetzen.

204. Man bestimme die Ladungsverteilung σ auf der leitenden Ebene der vorigen Aufgabe.

205*. Innerhalb eines keilförmigen Raumgebietes, das durch zwei sich unter dem Winkel β schneidende geerdete leitende Halbebenen OA und OB begrenzt wird, befinde sich im Punkt $N(\mathfrak{r}_0)$ die Punktladung q (Abb. 11). Die Zylinderkoordinaten der Ladung seien $(r_0, \gamma, 0)$; die z-Achse habe die Richtung einer Winkelkante, und der Azimutwinkel α werde von der Grenzebene OA aus gerechnet. Man zeige, daß das Potential $\varphi(r, \alpha, z)$ in der Form

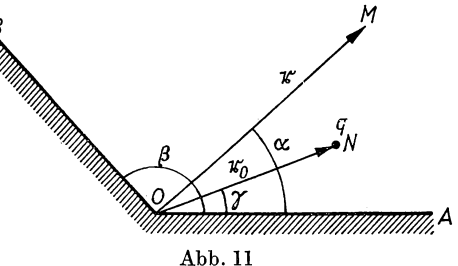


Abb. 11

$$\varphi(r, \alpha, z) = \int_0^\infty \varphi_k(r, \alpha) \cos kz \, \mathrm{d}k$$

geschrieben werden kann, wobei

$$\varphi_k(r,\alpha) = \frac{8q}{\beta}\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{\frac{n\pi}{\beta}}(k r_0)\, I_{\frac{n\pi}{\beta}}(k r) \sin\frac{n\pi\gamma}{\beta}\sin\frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{für} \quad r < r_0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\frac{n\pi}{\beta}}(k r_0)\, K_{\frac{n\pi}{\beta}}(k r) \sin\frac{n\pi\gamma}{\beta}\sin\frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{für} \quad r > r_0 \end{cases}$$

ist (I_ν und K_ν sind Zylinderfunktionen).

Hinweis: Man benutze die Formel (A I.11) und Anhang III.

206. Man zeige, daß man das in der vorigen Aufgabe bestimmte Potential einer Punktladung, die sich in einem keilförmigen Raumgebiet befindet, in der Form

$$\varphi(r,\alpha,z) = \frac{q}{\beta\sqrt{2 r r_0}}\int\limits_{\eta}^{\infty}\left[\frac{\sinh\frac{\pi\zeta}{\beta}}{\cosh\frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos\frac{\pi(\alpha-\gamma)}{\beta}} - \frac{\sinh\frac{\pi\zeta}{\beta}}{\cosh\frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos\frac{\pi(\alpha+\gamma)}{\beta}}\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{\cosh\zeta - \cosh\eta}}$$

schreiben kann, wobei

$$\cosh\eta = \frac{r_0^2 + r^2 + z^2}{2 r r_0}, \quad \eta > 0$$

ist.

Hinweis: Man benutze die Beziehungen

$$\int\limits_0^{\infty} K_\nu(k r)\, I_\nu(k r_0) \cos kz \, dk = \frac{1}{2\sqrt{2 r r_0}}\int\limits_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-\xi\nu}\, d\xi}{\sqrt{\cosh\xi - \cosh\eta}}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \cos n x = \frac{1}{2}\left(\frac{1-p^2}{1-2p\cos x + p^2} - 1\right).$$

207. Man bestimme das Potential φ einer Ladung q, die sich in der Nähe der leitenden Halbebene $\alpha = 0$ im Punkt $\mathfrak{r}_0$ mit den Zylinderkoordinaten $r_0, \gamma, z = 0$ befindet.

Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe 206. Bei der Berechnung des Integrals ist die Variable $\cosh(\zeta/2) = \cosh(\eta/2)\cosh u$ mit $0 < u < \infty$ zu substituieren.

208. Man bestimme die Flächenladungsdichte σ der in der Nähe der Kante eines Keils mit dem Winkel β (der Winkel wird außerhalb des Leiters gezählt). Der Keil befinde sich im Feld einer beliebig verteilten Ladung.

Hinweis: Zunächst betrachte man den Fall, daß sich in der Nähe des Keils eine Punktladung befindet, und benutze das Ergebnis der Aufgabe 205, die

Entwicklungen (A III.6) und die Beziehung

$$\int_0^\infty K_\nu(k\,\varrho)\,k^\nu \cos kz\,\mathrm{d}k = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\varrho^\nu}{(\varrho^2+z^2)^{\nu+1/2}}.$$

209*. Im Abstand a von einer homogenen dielektrischen Platte der Dicke c mit parallelen Begrenzungsebenen befinde sich die Punktladung q. Man bestimme das elektrische Feld unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sowohl das Produkt $J_0(k\,r_1)\,\mathrm{e}^{\pm kz}$ (r_1, z sind die Zylinderkoordinaten des Aufpunktes und J_0 die Bessel-Funktion) als auch

$$\int_0^\infty A(k)\,J_0(k\,r_1)\,\mathrm{e}^{\pm kz}\,\mathrm{d}k$$

[$A(k)$ ist eine beliebige Funktion von k] der Laplaceschen Gleichung genügen.

Hinweis: Man benutze die im Anhang III angegebene Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2+z^2}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-k|z|}\,J_0(k\,r_1)\,\mathrm{d}k.$$

210. In einem Plattenkondensator mit dem Abstand a der Belegungen befinde sich eine Platte der Dicke $a/2$ mit parallelen Begrenzungsebenen, die aus einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ε bestehe. Die Platte berühre eine der Belegungen. Beide Belegungen seien geerdet. Auf der Oberfläche des Dielektrikums befinde sich eine Ladung q, die man als punktförmig ansehen kann. Man bestimme das Potential φ im Kondensator und untersuche insbesondere, welche Form es in der Nähe der Ladung besitzt. Das Potential ist als Superposition von elektrischen Bildern darzustellen.

211*. Die Radien der Belegungen eines nichtkonzentrischen Kugelkondensators seien a_1 und a_2, ihre Mittelpunkte sollen den Abstand b ($a_1 + b < a_2$) haben. Die äußere Belegung sei geerdet, die innere werde auf dem Potential V gehalten. Man bestimme das Potential φ innerhalb des Kondensators und seine Kapazität C.

Hinweis: Man löse die Aufgabe mit Hilfe von räumlichen Bipolarkoordinaten (s. Aufgabe 67), führe die Substitution

$$\varphi = \sqrt{2\cosh\xi - 2\cos\eta}\;\psi$$

durch, separiere in der Gleichung für ψ die Variablen und benutze den Anhang II, insbesondere die Formel (A II.16).

212. Vom Ergebnis der vorigen Aufgabe ausgehend, ist die Kapazität eines schwach nichtkonzentrischen Kugelkondensators ($b \ll a_1, a_2$) bis auf Terme zweiter Ordnung in b genau zu bestimmen (s. Aufgabe 160).

213. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier leitender Kugeln mit den Radien a_1 und a_2 sei b ($b > a_1 + a_2$). Man bestimme die Kapazitätskoeffizienten c_{ik} des Systems mit Hilfe räumlicher Bipolarkoordinaten.

214. Der Abstand zwischen den beiden leitenden Kugeln, die in der vorigen Aufgabe betrachtet wurden, sei sehr groß $(b \gg a_1, a_2)$. Man bestimme die Kapazitätskoeffizienten c_{ik} bis auf Terme mit $1/b^4$ genau.

215*. Zwei leitende Kugeln mit gleichem Radius a berühren sich. Man bestimme die Kapazität C des Systems mit der Methode der Inversion sowie das elektrische Potential φ des Systems, wenn die Kugeln die Ladung q haben.

Hinweis: Man benutze das Ergebnis der Aufgabe 210.

216. Mit der Inversionsmethode berechne man das Feld einer geerdeten Kugel mit dem Radius R, in deren Nähe sich im Abstand a $(a > R)$ vom Kugelmittelpunkt die Punktladung q befinde (s. Aufgabe 153).

Hinweis: Das Potential einer gleichförmig geladenen Kugel bei Abwesenheit der Punktladung ist als bekannt anzunehmen.

217*. Die Oberfläche eines Leiters werde durch zwei Kugelschalen mit den Radien R_1 und R_2 gebildet, die sich auf einem Kreis mit dem Radius a schneiden. Man bestimme die Kapazität C dieses Leiters. Dabei ist von der Lösung der Aufgabe 206 (keilförmiger Leiter im Felde einer Punktladung) auszugehen und die Inversionsmethode anzuwenden.

Hinweis: Die Oberfläche des betrachteten Leiters wird in Ringkoordinaten (s. Aufgabe 68) durch die Gleichungen

$$\xi = \xi_1 = \text{const}, \qquad \xi = \xi_2 = \text{const} \qquad \left(\sin\xi_1 = \pm\frac{a}{R_1},\ \sin\xi_2 = \pm\frac{a}{R_2}\right)$$

beschrieben. Es genügt, eine Koordinatentransformation in der Ebene zu betrachten, die auf einer Kante des Keils senkrecht steht und durch das Inversionszentrum hindurchgeht, das auf der Schnittlinie der Kugeln zu wählen ist. Zur Bestimmung der Ladung q des Leiters bei vorgegebenem Leiterpotential berücksichtigt man, daß das Feld in großen Abständen vom Leiter die Form $\varphi = q/r - V$ hat, wobei V das Potential im Unendlichen ist.

218. Man bestimme die Kapazitäten der folgenden Leiter:

a) Hohlkugelsegment mit dem Radius R und dem Öffnungswinkel 2Θ,

b) Halbkugel mit dem Radius R.

219. Ein Leiter werde durch zwei Kugeln mit gleichem Radius a gebildet, deren Oberflächen sich unter dem Winkel $\pi/3$ schneiden. Man bestimme die Kapazität C des Leiters.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[26] FRENKEL, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[40] GRINBERG, G. A.: Ausgewählte Probleme der mathematischen Theorie elektrischer und magnetischer Erscheinungen. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1948 (*Г. А. Гринберг:* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений).

[55] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSHITZ: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).
[58] LEBEDEW, N. N., I. P. SKALSKAJA und JA. S. UFLJAND: Aufgabensammlung zur mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*Н. Н. Лебедев*, *И. П. Скальская* и *Я. С. Уфлянд:* Сборник задач по математической физике).
[67] PANOFSKY, W., und M. PHILLIPS: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.
[78] SMYTHE, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.
[80] SOMMERFELD, A.: Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 4. Aufl., Leipzig 1964.
[83] STRATTON, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.
[84] TAMM, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).
[89] WLASSOW, A. A.: Makroskopische Elektrodynamik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*А. А. Власов:* Макроскопическая электродинамика).

4. STATIONÄRER STROM

Die Verteilung stationärer Ströme in einem leitenden Medium mit der spezifischen Leitfähigkeit $\varkappa(\mathfrak{r})$ wird durch die räumliche Stromdichte $\mathfrak{j}(\mathfrak{r})$ beschrieben, die der Gleichung

$$\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0 \tag{4.1}$$

genügt. Die Gleichung (4.1) ist eine Folgerung aus dem Ladungserhaltungssatz. Die Stromdichte in einem Medium ist der Summe aus der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}_\mathrm{a}$ der äußeren elektromotorischen Kräfte (EMK) proportional (OHMsches Gesetz):

$$\mathfrak{j} = \varkappa(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_\mathrm{a}). \tag{4.2}$$

Das Feld der äußeren elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{E}_\mathrm{a}$ berücksichtigt die Wirkung der Kräfte nichtelektrischen Ursprungs auf die Ladungen des Mediums.

Zur Beschreibung des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ und der Verteilung $\mathfrak{j}$ der Ströme in einem Leiter führt man wie in der Elektrostatik das skalare Potential φ ein, das mit der elektrischen Feldstärke durch die Beziehung $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ zusammenhängt. Mit Hilfe dieser Definition und der Gleichungen (4.1) und (4.2) ergibt sich die fundamentale Differentialgleichung für φ:

$$\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{div}\varkappa\, \mathfrak{E}_\mathrm{a}. \tag{4.3}$$

Auf den Sprungflächen von $\varkappa$ oder $\mathfrak{j}_\mathrm{a} = \varkappa\, \mathfrak{E}_\mathrm{a}$ wird die Gleichung (4.3) durch die Randbedingungen

$$\varkappa_2 E_{2n} - \varkappa_1 E_{1n} = j_{\mathrm{a}1n} - j_{\mathrm{a}2n}, \tag{4.4}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{4.5}$$

ersetzt. Auf den Oberflächen von Isolatoren ($\varkappa = 0$) lautet die Bedingung (4.4)

$$j_n = 0 \quad \text{oder} \quad \varkappa E_n + j_{\mathrm{a}n} = 0. \tag{4.6}$$

Besteht ein Medium aus einer Reihe homogener Gebiete und enthält es keine äußeren elektromotorischen Kräfte, so gilt innerhalb jedes homogenen Gebietes

$$\Delta\varphi_k = 0 \tag{4.7}$$

und an den Grenzen zwischen dem i-ten und dem k-ten Gebiet

$$\varphi_i = \varphi_k, \quad \varkappa_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varkappa_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}. \tag{4.8}$$

Die Gleichungen (4.3) bis (4.8) zeigen, daß zwischen der Grundaufgabe bei Anwesenheit eines Stromes — der Bestimmung des Potentials φ — und der

analogen Aufgabe der Elektrostatik bei Vorhandensein eines Mediums ein enger Zusammenhang besteht. Man kann die Lösungen der beiden Probleme auseinander ableiten, indem man die folgenden Substitutionen vornimmt:

Elektrostatische Größe		Stromgröße
ε	$\rightarrow$	$\varkappa$,
$\mathfrak{D}$	$\rightarrow$	$-\varkappa \operatorname{grad} \varphi$,
$4\pi\varrho$	$\rightarrow$	$-\operatorname{div} \mathfrak{j}_a$,
$4\pi\sigma$	$\rightarrow$	$j_{a1n} - j_{a2n}$.

(4.9)

Die elektrostatischen Methoden (s. Kap. 3) können also auch benutzt werden, um die Grundaufgabe bei Anwesenheit eines Stromes zu lösen.

Enthält ein Medium mit endlicher Leitfähigkeit $\varkappa(\mathfrak{r})$ ideale Leiter ($\varkappa \rightarrow \infty$), z.B. Elektroden, so gilt auf ihren Randflächen die Bedingung

$$\varphi_{el} = \text{const.} \tag{4.10}$$

Die Aufgabe, die bei Anwesenheit eines Stromes zu lösen ist, ist dann also dem elektrostatischen Problem analog, das Potential eines Leitersystems zu bestimmen, das sich in einem dielektrischen Medium befindet. Wie im elektrostatischen Fall gibt es bei idealen Leitern auch bei Anwesenheit eines Stromes zwei Hauptvarianten: *a*) Vorgabe der Elektrodenpotentiale $\varphi_k = V_k$ und *b*) Vorgabe der aus den Elektroden fließenden Ströme

$$I_k = \oint_{S_k} j_n \, dS_k = -\oint \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS_k. \tag{4.11}$$

Nach (4.11) sind im Sinne von (4.9) die Ladung q_k des k-ten Leiters (elektrostatische Größe) und der Strom $I_k/4\pi$ der k-ten Elektrode (Stromgröße) analog.

Die Potentiale V_k der Elektroden sind Linearkombinationen der Ströme I_k, die von den Elektroden wegfließen:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + \dots + R_{1n} I_n, \\ V_2 &= R_{21} I_1 + R_{22} I_2 + \dots + R_{2n} I_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_n &= R_{n1} I_1 + R_{n2} I_2 + \dots + R_{nn} I_n. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Die Proportionalitätsfaktoren R_{ik} werden als Widerstandskoeffizienten bezeichnet. Sie hängen nicht von V_k und I_k ab und werden ausschließlich durch die Geometrie der Elektroden und die Verteilung der Leitfähigkeit $\varkappa$ bestimmt. Die Koeffizienten R_{ik} sind den Potentialkoeffizienten s_{ik} des elektrostatischen Problems analog (s. Kap. 3, Abschnitt 2).

Bei den in der Praxis häufig vorkommenden Systemen quasilinearer Leiter wird die Stromverteilung durch die KIRCHHOFFschen Regeln bestimmt (siehe z.B. [84]). Für die Berechnung komplizierter Kreise quasilinearer Leiter ist die Methode der Ringströme bequem (siehe z.B. [78]; in Kap. 6 findet man mehrere Aufgaben zu diesem Problem).

Aufgaben:

220. Eine Akkumulatorenbatterie mit kleinem innerem Widerstand und der elektromotorischen Kraft $V^{(e)}$ kann ein Gerät nicht längere Zeit hindurch mit einem Strom i versorgen. Um die Lebensdauer der Batterie zu verlängern, schaltet man Gerät und Batterie über einen Widerstand R parallel in einen stationären Stromkreis. Die Spannung V im Kreis ist instabil und ändert sich von V_1 bis V_2 ($V_1 > V_2 > V^{(c)}$). Der Widerstand R wird so gewählt, daß die Batterie für $V = V_1$ keinen Strom abgibt. Welchen Strom liefert die Batterie bei $V = V_2$?

221. Welche Parameter muß die Wicklung eines Drehspulgalvanometers haben, damit der Ausschlag bei vorgegebener elektromotorischer Kraft des Kreises und dem Außenwiderstand R (Reihenschaltung) maximal ist? Der Ausschlagwinkel des Galvanometerzeigers ist der Zahl n der Windungen in der Spule und dem Strom I des Kreises proportional. Wegen der Begrenztheit des Volumens, das die Spule im Gehäuse des Gerätes einnimmt, ist das Produkt nS angenähert konstant (S bedeutet den Querschnitt des Leiters in der Spule).

222. Ein quadratisches Netz aus homogenem Draht bestehe aus n^2 gleichen quadratischen Zellen. Der Widerstand einer Zelle sei r. Der Strom fließe an einer Ecke in das Netz hinein und aus der entgegengesetzten Ecke heraus. Man bestimme den Gesamtwiderstand R des Netzes für die Fälle $n = 2, 3, 4$.
Hinweis: Zur Reduzierung der Zahl der Ringströme ist die Symmetrie des Netzes zu benutzen.

223*. Eine Telegraphenleitung (Abb. 12) sei in den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit n Isolatoren verbunden (der zweite Leiter ist die Erde). Die Abschnitte

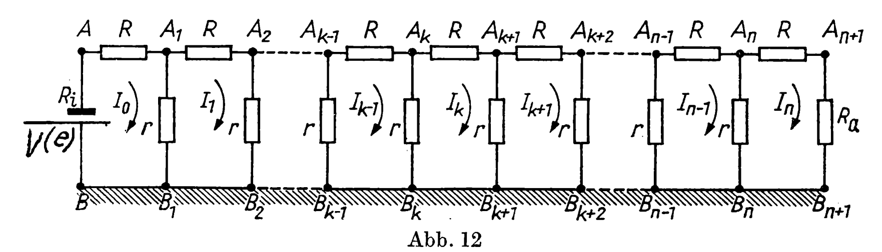


Abb. 12

$AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$ sollen alle denselben Widerstand R besitzen. Bei trockener Isolation ist der Widerstand der Isolatoren unendlich groß. Bei feuchter Isolation fließt ein Strom über die Isolatoren in die Erde. Dabei wird der Widerstand jedes Isolators gleich r. Zwischen den Anfang A der Leitung und Erde werde eine Batterie mit der elektromotorischen Kraft $V^{(e)}$ und dem

inneren Widerstand R_i geschaltet. Das Ende A_{n+1} sei über einen Lastwiderstand R_a ebenfalls mit Erde verbunden. Man bestimme den Strom in jedem Abschnitt der Leitung und den Strom durch den Lastwiderstand. Um das Wievielfache muß die elektromotorische Kraft der Batterie bei feuchter Isolation größer sein als bei trockener Isolation, damit der Strom durch den Lastwiderstand in beiden Fällen gleich groß ist? Man untersuche insbesondere den Fall $R_a = 0$.

Hinweis: Man betrachte die Ringströme in den von den Abschnitten A_{k-1}, A_k der Leitung und den Ableitungen über die Isolatoren A_{k-1} und A_k gebildeten Stromkreisen. Die sich ergebende Differenzengleichung zweiter Ordnung wird durch den hyperbolischen Kosinus gelöst.

224*. Ein unterirdisches Kabel habe je Längeneinheit den konstanten Widerstand ϱ. Die Isolation des Kabels sei unvollständig, es fließe ein Strom in die Erde ab. Die Leitfähigkeit je Längeneinheit des Kabels, mit der dieser Abfluß erfolgt, sei $1/\varrho' = \text{const}$. Die Rolle der Rückleitung spielt die Erde. Wie lautet die Differentialgleichung für die Verteilung des stationären Stromes im Kabel? Man bestimme den Zusammenhang zwischen dem Strom $I(x)$ im Kabel und der Potentialdifferenz $\varphi(x)$ zwischen Kabelader und Erde.

Hinweis: Man benutze die in der Lösung der Aufgabe 223 angegebene Gleichung (1).

225*. Das eine Ende eines Kabels mit der Länge a und dem Widerstand ϱ je Längeneinheit, das eine Ableitung mit der Leitfähigkeit $1/\varrho'$ je Längeneinheit habe, sei mit einer Batterie mit der elektromotorischen Kraft $V^{(e)}$ und dem inneren Widerstand R_i verbunden, deren einer Pol geerdet sei. Das zweite Kabelende sei an einen geerdeten Lastwiderstand R_a angeschlossen. Man bestimme die Stromverteilung $I(x)$ über der Kabellänge. Insbesondere betrachte man den Fall $R_i = R_a = 0$. Zur Prüfung des Ergebnisses ist zum Grenzfall eines Kabels ohne Ableitung überzugehen.

Hinweis: Man gehe entweder von der Differentialgleichung der Aufgabe 224 oder von der Gleichung (7) der Lösung von Aufgabe 223 aus.

226. Zwischen den Belegungen eines Plattenkondensators befinden sich parallel zueinander zwei ebene leitende Platten, die einander und den Kondensatorbelegungen dicht benachbart sind. Die Platten sollen die Dicken h_1, h_2, die Leitfähigkeiten $\varkappa_1, \varkappa_2$ und die Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ haben. An den Kondensatorbelegungen, die aus einem Material mit einer Leitfähigkeit $\varkappa \gg \varkappa_1, \varkappa_2$ bestehen sollen, wird eine Potentialdifferenz V erzeugt. Man bestimme die elektrische Feldstärke E, die dielektrische Verschiebung D und die Stromdichte j in den Platten sowie die Dichten σ der wahren und σ_P der Polarisationsladungen auf allen drei Trennebenen.

227. Wie lautet das Brechungsgesetz für die Stromlinien an der glatten Trennfläche zweier Medien mit den Leitfähigkeiten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$?

228*. In einem unendlich langen geradlinigen Leiter mit dem Radius a und der Leitfähigkeit $\varkappa$ fließe ein Strom I. Der Leiter sei von einem dicken, mit ihm koaxialen leitenden Zylindermantel mit dem inneren Radius b und dem äußeren Radius $c \to \infty$ umgeben, der als Rückleitung dient. Man bestimme

das elektrische Potential φ und das Magnetfeld H im ganzen Raum sowie die Verteilung σ der Oberflächenladungen. Die Dielektrizitätskonstante des Mediums zwischen den Leitern sei ε.

229. Drei Leiter der Längen $l_0, l_1, l_2 \gg r$ und der Leitfähigkeiten $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$ mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius r seien zu einem geschlossenen Stromkreis hintereinandergeschaltet. Im Leiter mit der Leitfähigkeit $\varkappa_0$ sei gleichförmig die von der Zeit unabhängige äußere elektromotorische Kraft $V^{(e)}$ verteilt. Man bestimme das elektrische Feld E_0 und die Verteilung der elektrischen Ladungen im Kreis.

230. Man bestimme die Energieflüsse $\mathfrak{S}$ durch die Oberflächen der drei in der Aufgabe 229 betrachteten Leiter. Davon ausgehend, ist die LENZsche Regel abzuleiten.

231. Die Stromverteilung in einem dreidimensionalen Leiter mit der Leitfähigkeit $\varkappa$ besitze eine solche Symmetrie, daß die elektrische Feldstärke und folglich auch die Stromdichte in allen Punkten jeder seiner Äquipotentialflächen denselben Wert hat. Man zeige, daß dann der Widerstand des Leiters durch dieselbe Formel ausgedrückt wird wie der Widerstand eines quasilinearen Leiters mit veränderlichem Querschnitt.[1])

232. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorigen Aufgabe bestimme man den Widerstand R folgender Kondensatoren:

a) Kugelkondensator mit den Radien a und b $(a < b)$ der Belegungen, gefüllt mit einem homogenen Medium der Leitfähigkeit $\varkappa$,

b) derselbe Kondensator, gefüllt mit zwei homogenen Schichten der Leitfähigkeiten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ (die Schicht mit $\varkappa_1$ befinde sich an der inneren Belegung), deren Trennfläche eine Kugelfläche mit dem Radius c sei,

c) Zylinderkondensator mit den Radien a und b der Belegungen $(a < b)$ und der Länge l, gefüllt mit einem Medium der Leitfähigkeit $\varkappa$ (der Randeffekt wird nicht berücksichtigt).

233. Über eine ideal leitende Kugel mit dem Radius a, die zur Hälfte in die Erde versenkt sei, erfolge eine Erdung. Die Leitfähigkeit der Erde sei $\varkappa_1 = \text{const}$. Die mit der Kugel konzentrische und ihr unmittelbar anliegende Erdschicht vom Radius b habe die künstlich erhöhte Leitfähigkeit $\varkappa_2$. Man bestimme den Widerstand R dieser Erdung.

234*. Ein System idealer Leiter (Elektroden) befinde sich in einem Medium mit der Leitfähigkeit $\varkappa(\mathfrak{r})$ und der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\mathfrak{r})$, die die Eigenschaft besitzen, daß in allen Raumpunkten $\varkappa(\mathfrak{r})/\varepsilon(\mathfrak{r}) = \text{const}$ ist.[2]) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Potentialkoeffizienten s_{ik} und den Widerstandskoeffizienten R_{ik} dieses Leitersystems? Wie sind die Ladungen q_k

---

[1]) Die angegebenen Voraussetzungen sind dieselben, unter denen man beim entsprechenden elektrostatischen Problem den GAUSSschen Satz der Elektrostatik verwenden kann.

[2]) Das kann man auch so formulieren: An Stelle des Mediums mit der Leitfähigkeit $\varkappa$ enthält der Raum ein Dielektrikum zwischen den idealen Leitern, dessen Dielektrizitätskonstante ε in jedem Raumpunkt proportional $\varkappa$ ist, so daß $\varepsilon/\varkappa = \text{const}$ gilt.

der Elektroden und die von ihnen ausgehenden Ströme I_k miteinander verknüpft?

235. In einem Kondensator beliebiger Form befinde sich ein homogenes Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε. Man bestimme die Kapazität dieses Kondensators, wenn bekannt ist, daß er bei einer Füllung mit einem homogenen Leiter der Leitfähigkeit $\varkappa$ im Falle eines stationären Stromes den Widerstand R hat.

236. Ein System von Elektroden sei durch die Widerstandskoeffizienten R_{ik} charakterisiert. Bei bekannten, von den Elektroden ausgehenden Strömen I_k bestimme man die Wärmemenge Q, die von den Strömen im Raum zwischen den Elektroden in der Zeiteinheit abgegeben wird.

237. Zwei ideal leitende Kugeln mit den Radien a und b befinden sich in einem homogenen Medium mit der Leitfähigkeit $\varkappa$ und der Dielektrizitätskonstanten ε. Der Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten sei l. Der Strom I werde einer der Kugeln zugeführt und von der anderen Kugel abgenommen. Man bestimme den Widerstand $R = (V_a - V_b)/I$ des Mediums zwischen den Kugeln, wobei V_a und V_b die Potentiale der Kugeln und I den von der Kugel mit dem Radius a ausgehenden Strom bedeuten.

Hinweis: Man drücke R_{ik} durch die Kapazitätskoeffizienten c_{ik} eines Systems zweier Kugeln aus (s. Aufgabe 213).

238. Die Enden einer Leitung seien mit Hilfe zweier ideal leitender, zur Hälfte in die Erde versenkter Kugeln mit den Radien a_1 und a_2 geerdet. Als zweiter Leiter dient die Erde. Der Abstand zwischen den Kugeln sei $l \gg a_1, a_2$, und die Leitfähigkeit der Erde sei $\varkappa$. Man bestimme den Widerstand R zwischen den Erdungen.

239. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß die Erdung durch zwei gleiche Rotationsellipsoide mit dem Volumen V und der Exzentrizität e_0 erfolgt. Die Rotationsachsen der Ellipsoide sollen senkrecht auf der Erdoberfläche stehen und die Mittelpunkte der Ellipsoide in der Erdoberfläche liegen. Welche Form der Erdung ist günstiger (entspricht dem kleineren Widerstand)?

240*. Unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes kann eine ebene Elektrode $x = 0$ unbegrenzt viele Teilchen der Ladung e und der Masse m emittieren. Die mit der Geschwindigkeit Null emittierten Teilchen sollen in Richtung auf eine zweite ebene Elektrode beschleunigt werden, die der ersten parallel sei und sich im Abstand a von ihr befinde. Die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden sei φ_0. Die Emission aus der ersten Elektrode dauert an, bis das Feld der zwischen den Elektroden entstehenden Raumladung mit der Dichte ϱ das äußere Feld an der Oberfläche der ersten Elektrode kompensiert, so daß die Spannung des resultierenden Feldes $-\partial\varphi/\partial x|_{x=0} = 0$ ist. Wie hängt die Dichte j des stationären Stromes zwischen den Elektroden von der Potentialdifferenz ab?

Hinweis: Das Potential im Raum zwischen den Elektroden wird durch die POISSONsche Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$ mit $\varrho = j/v$ bestimmt, wobei v die Geschwindigkeit der Teilchen im Aufpunkt bedeutet.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[26] FRENKEL, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[40] GRINBERG, G. A.: Ausgewählte Probleme der mathematischen Theorie elektrischer und magnetischer Erscheinungen. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1948 (*Г. А. Гринберг:* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений).

[55] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSHITZ: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[58] LEBEDEW, N. N., I. P. SKALSKAJA und JA. S. UFLJAND: Aufgabensammlung zur mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская* и *Я. С. Уфлянд:* Сборник задач по математической физике).

[78] SMYTHE, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.

[80] SOMMERFELD, A.: Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 4. Aufl., Leipzig 1964.

[84] TAMM, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).

5. STATISCHES MAGNETFELD

Die MAXWELLschen Gleichungen lauten im Falle eines statischen Magnetfeldes

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{j}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \tag{5.1}$$

wobei $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, $\mathfrak{j}$ die Volumenstromdichte und $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s die elektrodynamische Konstante (Vakuumlichtgeschwindigkeit) bedeuten.

In isotropen Dia- und Paramagnetika sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mu\, \mathfrak{H} \tag{5.2}$$

miteinander verknüpft, wobei μ die magnetische Permeabilität des Stoffes bezeichnet (Skalar); im Falle anisotroper Medien ist μ ein Tensor zweiter Stufe. Die Dichte $\mathfrak{j}_{\mathrm{Mol}}$ der Molekularströme in einem Stoff, der sich in einem statischen Magnetfeld befindet, hängt durch die Beziehung

$$\mathfrak{j}_{\mathrm{Mol}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{M} \tag{5.3}$$

mit dem Magnetisierungsvektor $\mathfrak{M}$ zusammen. $\mathfrak{M}$ ist mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ durch

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\, \mathfrak{M} \tag{5.4}$$

verknüpft.

Zur Bestimmung des Magnetfeldes in einem nichtferromagnetischen Medium werden hauptsächlich die folgenden Methoden benutzt:

a) Anwendung des BIOT-SAVART*schen Gesetzes.* Das Stromelement $I\,\mathrm{d}\mathfrak{l}$ erzeugt im Vakuum oder in einem homogenen Medium das Magnetfeld

$$\mathrm{d}\mathfrak{H} = \frac{I}{c\,r^3}\,\mathrm{d}\mathfrak{l} \times \mathfrak{r}. \tag{5.5}$$

Auf Grund des Superpositionsprinzips erhält man das Gesamtfeld in einem vorgegebenen Punkt durch Integration von (5.5) über alle Stromelemente $\mathrm{d}\mathfrak{l}$.

b) Unmittelbare Integration des Gleichungssystems (5.1), (5.2) mit den Grenzbedingungen

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) = 0, \qquad \mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{i}, \tag{5.6}$$

wobei $\mathfrak{i}$ die Dichte des Oberflächenstromes bedeutet und die Normale $\mathfrak{n}$ aus dem ersten in das zweite Gebiet gerichtet ist. Ist die Stromverteilung axialsymmetrisch, so benutzt man am günstigsten die erste der Gleichungen (5.1) in integraler Form:

$$\oint H_l\,\mathrm{d}l = \frac{4\pi}{c}\,I. \tag{5.7}$$

Dabei wird das Integral längs einer beliebigen geschlossenen Linie genommen; I bedeutet den Gesamtstrom, der durch eine beliebige, von der geschlossenen Linie umrandete Fläche fließt.

c) Methode des Vektorpotentials. Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ wird durch die Beziehung

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \tag{5.8}$$

mit der Zusatzbedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \tag{5.9}$$

definiert. In den Gebieten, in denen das Magnetikum homogen ist, genügt $\mathfrak{A}$ der Gleichung

$$\Delta \mathfrak{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \mathfrak{j}. \tag{5.10}$$

Die Grenzbedingungen, denen das Vektorpotential genügen muß, ergeben sich aus den Grenzbedingungen (5.6) für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$.

Das Vektorpotential, das durch eine vorgegebene Stromverteilung erzeugt wird, kann (für ein homogenes Medium mit der magnetischen Permeabilität μ) als Integral über das vom Strom eingenommene Volumen geschrieben werden:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathfrak{j}(\mathfrak{r}')\, dV'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}. \tag{5.11}$$

Der entsprechende Ausdruck für einen linearen Strom ergibt sich durch die Substitution $\mathfrak{j}\, dV' \to I\, d\mathfrak{l}'$. In großen Abständen vom System geht (5.11) in

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{r}}{r^3} \tag{5.12}$$

über, wobei

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \int \mathfrak{r}' \times \mathfrak{j}\, dV' \tag{5.13}$$

das magnetische Dipolmoment bedeutet (es wurde $\mu = 1$ gesetzt).

d) Methode des skalaren Potentials. In den Raumgebieten, in denen $\mathfrak{j} = 0$ ist, gilt $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$, so daß man

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi \tag{5.14}$$

setzen kann, wobei ψ ein skalares Potential ist, das bei $\mu = \text{const}$ der LAPLACEschen Gleichung genügt. Das so eingeführte skalare Potential ist jedoch im allgemeinen keine eindeutige Funktion des Ortes.[1]) Das skalare Potential wird u. a. in den Aufgaben 254, 255 benutzt.

Die Energie eines innerhalb des Volumens V lokalisierten Magnetfeldes wird durch ein Volumenintegral ausgedrückt:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}\, \mathfrak{B}\, dV. \tag{5.15}$$

---

[1]) Näheres hierzu siehe in [84].

Hat das Stromsystem endliche Abmessungen, so kann seine Gesamtenergie auch mit Hilfe der Beziehung

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathfrak{A}\, \mathfrak{j}\, \mathrm{d}V \tag{5.16}$$

berechnet werden, in der über das von den Strömen eingenommene Volumen zu integrieren ist.

Die magnetische Energie eines quasilinearen Leiters, durch den der Strom I fließt, wird durch den Selbstinduktionskoeffizienten (Induktivität) L des Leiters ausgedrückt:

$$W = \frac{1}{2c^2} L I^2. \tag{5.17}$$

Man kann die Induktivität auch durch ein Doppelintegral über das Leitervolumen darstellen:

$$L = \frac{1}{I^2} \iint \frac{\mathfrak{j}(\mathfrak{r})\, \mathfrak{j}(\mathfrak{r}')}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \mathrm{d}V \, \mathrm{d}V'. \tag{5.18}$$

Die Wechselwirkungsenergie zweier stromdurchflossener Leiter ist durch

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H}_1 \mathfrak{B}_2 \, \mathrm{d}V = \frac{1}{c} \int \mathfrak{j}_1 \mathfrak{A}_2 \, \mathrm{d}V_1 \qquad (W_{12} = W_{21}) \tag{5.19}$$

gegeben. Das erste Integral wird über den gesamten Raum und das zweite über das Volumen eines der Leiter genommen. Im Falle quasilinearer Ströme kann die Energie durch den Wechselinduktionskoeffizienten (Gegeninduktivität) L_{12} ausgedrückt werden:

$$W_{12} = \frac{1}{c^2} L_{12} I_1 I_2. \tag{5.20}$$

Man kann diese Gleichung auch in der Form

$$W_{12} = \frac{1}{c} I_1 \Phi_{12} \tag{5.21}$$

schreiben, wobei Φ_{12} den durch den zweiten Strom erzeugten magnetischen Induktionsfluß im ersten Stromkreis bedeutet:

$$\Phi_{12} = \int \mathfrak{B}_2 \, \mathrm{d}\mathfrak{f}_1 = \oint \mathfrak{A}_2 \, \mathrm{d}\mathfrak{l}_1 = \frac{1}{c} L_{12} I_2. \tag{5.22}$$

Der Wechselinduktionskoeffizient kann aus dem Ausdruck (5.20) für die Energie, der Beziehung (5.22) für den magnetischen Induktionsfluß oder im Falle linearer Ströme mit Hilfe der Gleichung

$$L_{12} = \mu \oint \oint \frac{\mathrm{d}\mathfrak{l}_1 \, \mathrm{d}\mathfrak{l}_2}{r_{12}} \tag{5.23}$$

berechnet werden.

Die verallgemeinerten Kräfte F_i, die zwischen zwei nichtbewegten Strömen wirken, können durch Differentiation der Wechselwirkungsenergie W_{12} (oder der Potentialfunktion $U_{12} = -W_{12}$) nach den entsprechenden verallgemeinerten Koordinaten erhalten werden:

$$F_i = \frac{\partial W_{12}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial q_i}. \tag{5.24}$$

Zur Berechnung der Kräfte kann auch die AMPÈREsche Formel

$$d\mathfrak{F} = \frac{I}{c}\, d\mathfrak{l} \times \mathfrak{B} \tag{5.25}$$

benutzt werden, in der $d\mathfrak{l}$ ein Element der von dem Strom I durchflossenen Schleife bedeutet und $d\mathfrak{F}$ die Kraft ist, die vom äußeren Feld $\mathfrak{B}$ an $d\mathfrak{l}$ angreift.

Die Kräfte, die an den Strömen und Magnetika angreifen, kann man mit Hilfe des MAXWELLschen Spannungstensors des Magnetfeldes

$$T_{lm} = \frac{\mu}{4\pi}\left(H_l H_m - \frac{1}{2} H^2 \delta_{lm}\right) \tag{5.26}$$

berechnen, ähnlich wie in Kap. 3 mit Hilfe des Spannungstensors des elektrischen Feldes.

In Raumgebieten, in denen sich Ferromagnetika befinden, ist der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ nichtlinear und nichteindeutig (Hysteresis), so daß die Lösung magnetostatischer Probleme außerordentlich kompliziert wird. Bei der Betrachtung von permanenten Magneten wird jedoch oft angenommen, daß der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ von vornherein linear ist:

$$\mathfrak{B} = \mu\, \mathfrak{H} + 4\pi\, \mathfrak{M}_0. \tag{5.27}$$

Dabei ist $\mathfrak{M}_0$ die „permanente“ (d.h. nicht von $\mathfrak{H}$ abhängige) Magnetisierung, die als bekannte Ortsfunktion anzusehen ist. Ferromagnetika, die der Beziehung (5.27) genügen, bezeichnet man als ideal (s. [84], § 73).

Aufgaben:

241. Innerhalb eines dünnen leitenden Zylindermantels mit dem Radius b befinde sich ein mit ihm koaxialer Leiter mit dem Radius a. Beide Leiter sollen in entgegengesetzten Richtungen von stationären Strömen derselben Stärke I durchflossen werden. Man bestimme das Magnetfeld $\mathfrak{H}$, das von diesem System in allen Raumpunkten erzeugt wird. Die Aufgabe ist

a) durch Integration der MAXWELLschen Differentialgleichungen,

b) mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen in der integralen Form (5.7) zu lösen.

242. Man bestimme die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ und die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$, die von einem stationären Strom durch einen unendlich langen kreiszylinderförmigen Leiter mit dem Radius a erzeugt werden. Die Permeabilität des Leiters sei μ_0 und die des umgebenden Mediums μ. Man löse die

Aufgabe nach dem einfachsten Verfahren, d.h. mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen in der integralen Form (5.7) sowie durch Einführung des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$.

243. Man löse die vorige Aufgabe für einen hohlzylinderförmigen Leiter (Innenradius a, Außenradius b).

244. Durch einen geradlinigen, unendlich langen Streifen der Breite a fließe gleichmäßig über die Breite verteilt ein Strom I. Man bestimme das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ und kontrolliere das Ergebnis durch Betrachtung des Feldes im Grenzfall großer Abstände.

245. Durch zwei dünne, unendlich lange, parallele Platten, die mit den beiden Seiten eines unendlich langen Prismas mit rechteckförmigem Querschnitt übereinstimmen, sollen entgegengesetzt zueinander Ströme derselben Stärke I fließen. Die Breite der Platten sei a, ihr gegenseitiger Abstand b. Man bestimme die Wechselwirkungskraft f je Längeneinheit.

246. Welches Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und Magnetfeld $\mathfrak{H}$ erzeugen zwei geradlinige parallele Ströme I, die in entgegengesetzten Richtungen fließen? Der Abstand zwischen den Strömen sei $2a$.

247. Wie groß ist das Magnetfeld $\mathfrak{H}$, das durch Ströme erzeugt wird, die in zwei parallelen Ebenen fließen und dieselben Flächendichten $i = \text{const}$ haben? Man untersuche zwei Fälle:

a) Die Ströme fließen in entgegengesetzten Richtungen.

b) Die Ströme haben gleiche Richtung.

248. Man bestimme das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ in einem zylinderförmigen Hohlraum, der aus einem unendlich langen zylindrischen Leiter herausgeschnitten wurde. Hohlraum und Leiter haben den Radius a bzw. b, der Abstand zwischen ihren Achsen, die zueinander parallel sein sollen, sei d $(b > a + d)$. Der Strom I sei gleichmäßig über den Querschnitt verteilt.

Hinweis: Man benutze das Superpositionsprinzip für die Felder.

249*. Man bestimme das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und das Magnetfeld $\mathfrak{H}$, die in einem beliebigen Punkt durch einen Strom I erzeugt werden, der in einem dünnen Ring mit dem Radius a fließt. Das umgebende Medium sei homogen, die Permeabilität sei μ. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ sind durch elliptische Integrale auszudrücken.

Hinweis: Man benutze die bei der Lösung der Aufgabe 89 angewandte Lösungsmethode.

250*. Wird ein axialsymmetrisches Magnetfeld in Zylinderkoordinaten durch ein Vektorpotential mit den Komponenten $A_\alpha(r, z)$, $A_r = A_z = 0$ beschrieben, so lautet die Gleichung der magnetischen Induktionslinien

$$r A_\alpha(r, z) = \text{const}.$$

Man beweise diese Gleichung.

Hinweis: Man betrachte den magnetischen Induktionsfluß in das Innere der Röhre, die durch Rotation einer der Induktionslinien um die Symmetrieachse entsteht (vgl. mit der Lösung der Aufgabe 115).

251. Man drücke die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ eines axialsymmetrischen Magnetfeldes außerhalb seiner Quellen durch die magnetische Feldstärke $H(z)$ auf der Symmetrieachse aus.

252. Man bestimme das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ auf der Achse einer dicht gewickelten Zylinderspule mit der Höhe h und dem Radius a. Die Windungszahl je Längeneinheit sei n und die Stromstärke I.

253*. Auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius a sei die Ladung e gleichmäßig verteilt. Die Kugel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um einen ihrer Durchmesser. Man bestimme das Magnetfeld innerhalb und außerhalb der Kugel. Die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Außengebiet ist durch das magnetische Moment $\mathfrak{m}$ der Kugel auszudrücken.

254. Man bestimme das skalare Potential ψ des Magnetfeldes, das der Strom I in einem unendlich langen geradlinigen Leiter erzeugt, und berechne die Komponenten des Magnetfeldes.

255*. Man bestimme das skalare Potential ψ des Magnetfeldes einer geschlossenen stromdurchflossenen Leitung. Das Problem ist

a) durch Integration der LAPLACEschen Gleichung für das Potential,

b) durch Benutzung des bekannten Ausdrucks für das magnetische Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\mathfrak{l}}{r}$$

zu lösen.

Hinweis: Bei der ersten Lösung ist die Darstellung der Lösung der LAPLACEschen Gleichung als Integral über eine geschlossene Fläche zu benutzen (s. [84], § 12).

256. Man bestimme die Kraft $\mathfrak{F}$ und das Drehmoment $\mathfrak{N}$, die an einem geschlossenen, dünnen, stromdurchflossenen Leiter im homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$ angreifen. Die Form des Leiters sei beliebig. Man löse die Aufgabe

a) durch unmittelbare Summierung der Kräfte und Drehmomente, die an den Stromelementen angreifen,

b) mit Hilfe der Potentialfunktion.

$\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ sind durch das magnetische Moment $\mathfrak{m}$ auszudrücken.

257. Man bestimme die Potentialfunktion U zweier kleiner Ströme mit den magnetischen Momenten $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$. Wie groß sind die Wechselwirkungskraft $\mathfrak{F}$ dieser Ströme und die an ihnen angreifenden Drehmomente $\mathfrak{N}$? Man untersuche den Spezialfall $\mathfrak{m}_1 \| \mathfrak{m}_2$.

258. Man zeige, daß die Kräfte, die zwischen kleinen Strömen wirken, bestrebt sind, die magnetischen Momente der Ströme parallel zueinander und zur Verbindungslinie zwischen den Zentren einzustellen.

259. Man bestimme die Potentialfunktion u_{21} (je Längeneinheit) zweier paralleler, unendlich langer, geradliniger Ströme I_1 und I_2 sowie die Wechselwirkungskraft f zwischen ihnen.

260. Ein vom Strom I_2 durchflossener quadratischer Rahmen der Seitenlänge a sei so angeordnet, daß zwei seiner Seiten einem langen, geradlinigen, vom Strom I_1 durchflossenen Leiter parallel sind (Abb. 13). Man bestimme die am Rahmen angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ und das Drehmoment $\mathfrak{N}$ in bezug auf die Achse OO'.

261. Ein vom Strom I_2 durchflossener Rahmen bestehe aus einem Kreisbogen mit dem Winkel $2(\pi - \varphi)$ und einer Sehne zwischen seinen beiden Enden (Abb. 14). Der Radius des Kreisbogens sei a. Senkrecht zur Rahmenebene führe durch den Kreismittelpunkt ein langer geradliniger Leiter mit dem Strom I_1. Man bestimme das Drehmoment $\mathfrak{N}$, das am Rahmen angreift.

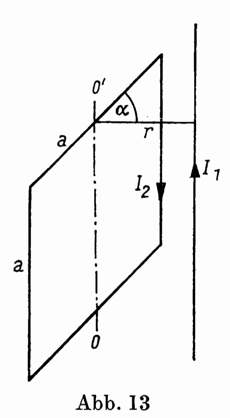


Abb. 13

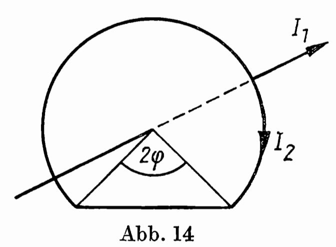


Abb. 14

262. Innerhalb eines dünnen leitenden Zylindermantels mit dem Radius b befinde sich ein koaxialer Leiter mit dem Radius a und der Permeabilität μ_0. Im Raum zwischen Leiter und Zylindermantel befinde sich Materie mit der Permeabilität μ. Man bestimme den Selbstinduktionskoeffizienten L je Längeneinheit dieser Leitung.

263. Eine Leitung bestehe aus zwei koaxialen dünnen Zylindermänteln mit den Radien a und b $(a < b)$. Im Raum zwischen ihnen befinde sich ein Stoff mit der Permeabilität μ. Man bestimme den Selbstinduktionskoeffizienten L je Längeneinheit.

264. Ein langer geradliniger Leiter und ein Ring mit dem Radius a liegen in einer Ebene. Der Abstand zwischen dem Ringmittelpunkt und dem Leiter sei b. Man bestimme den Wechselinduktionskoeffizienten L_{12} und die Wechselwirkungskraft F, wenn die Stromstärke im Leiter I_1 und im Ring I_2 ist.

265*. Zwei dünne Ringe mit den Radien a und b seien so angeordnet, daß ihre Ebenen senkrecht auf der Verbindungslinie der Ringmittelpunkte mit der Länge l stehen. Man bestimme den Wechselinduktionskoeffizienten L_{12} und drücke ihn durch elliptische Integrale aus. Man untersuche insbesondere den Grenzfall $l \gg a, b$.

266. Man bestimme die Wechselwirkungskraft F zwischen den beiden Ringströmen der vorigen Aufgabe.

267. Man bestimme den Selbstinduktionskoeffizienten L je Längeneinheit einer unendlich langen, dicht gewickelten Zylinderspule mit beliebigem (nicht unbedingt kreisförmigem) Querschnitt. Die Querschnittsfläche sei S, die Windungszahl je Längeneinheit n.

268. Man bestimme den Selbstinduktionskoeffizienten L einer Spule endlicher Länge h mit dem Radius a ($h \gg a$) bis auf Terme a/h genau. Der in der Wicklung fließende Strom ist durch den äquivalenten Oberflächenstrom zu ersetzen.

269. Man berechne den Selbstinduktionskoeffizienten L einer Toroidspule. Der Radius des Toroids sei b, die Windungszahl N, und der Querschnitt des Toroids sei ein Kreis mit dem Radius a. Wie groß ist der Selbstinduktionskoeffizient je Längeneinheit der Spule im Grenzfall $b \to \infty$ ($N/b = \text{const}$)? Man löse dieselbe Aufgabe für eine Toroidspule, deren Querschnitt ein Rechteck mit den Seitenlängen a und h ist.

270. Man bestimme den Selbstinduktionskoeffizienten L einer Doppelleitung, die aus zwei geradlinigen parallelen Leitern mit den Radien a und b im Abstand h besteht. In den Leitern sollen Ströme derselben Größe I in entgegengesetzten Richtungen fließen.

271*. Man zeige, daß der Selbstinduktionskoeffizient eines dünnen geschlossenen Leiters mit kreisförmigem Querschnitt näherungsweise in der Form[1])

$$L = \frac{\mu_0 l}{2} + L'$$

geschrieben werden kann, wobei μ_0 die Permeabilität des Leiters, l seine Länge und L' den Wechselinduktionskoeffizienten zweier linearer Kreise bedeuten. Einer der Kreise stimmt mit der Achse des betrachteten quasilinearen Leiters und der andere mit der Linie überein, auf der sich eine beliebige, von der Achse ausgehende geschlossene Fläche S mit der Leiteroberfläche schneidet (Abb. 15).

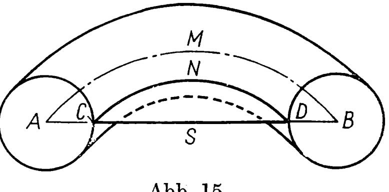


Abb. 15

272. Man bestimme den Selbstinduktionskoeffizienten L eines dünnen Drahtrings mit dem Radius b. Der Radius des Leiters sei $a \ll b$.

Hinweis: Man benutze die in der vorigen Aufgabe bestimmte Formel.

273. Man bestimme den Wechselinduktionskoeffizienten L_{12} zweier paralleler Strecken der Länge a, die sich im Abstand l voneinander befinden und zwei Seiten eines Rechtecks darstellen.[2])

---

[1]) Man kann den ersten und den zweiten Term des Ausdrucks für L als inneren bzw. äußeren Selbstinduktionskoeffizienten bezeichnen, da diese Terme die innerhalb bzw. außerhalb des Leiters enthaltene magnetische Energie bestimmen.

[2]) Der gesuchte Wechselinduktionskoeffizient hat hier keine unmittelbare physikalische Bedeutung, da die Ströme nicht geschlossen sein können. Mit seiner Hilfe kann man jedoch leicht die Induktivität geschlossener Kreise ausdrücken, die parallele geradlinige Teile enthalten (vgl. die Aufgaben 274 und 275).

274. Man bestimme den Wechselinduktionskoeffizienten L_{12} zweier gleicher Quadrate der Seitenlänge a, die sich im Abstand l voneinander befinden und mit zwei gegenüberliegenden Begrenzungsflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds übereinstimmen. Wie groß ist die Wechselwirkungskraft F zwischen ihnen, wenn im ganzen Raum $\mu = 1$ gesetzt wird?

275. Man bestimme den Selbstinduktionskoeffizienten L eines Drahtes in Form eines Quadrates der Seitenlänge b. Der Radius des Leiters sei $a \ll b$, die Permeabilität im umgebenden Raum μ, und im Leiter sei $\mu_0 = 1$.

Hinweis: Man benutze die Gleichungen der Aufgaben 271 und 273.

276. Man bestimme das magnetische Moment $\mathfrak{m}$ einer geladenen Kugel, die um einen ihrer Durchmesser rotiert. Zu untersuchen sind die Fälle homogener Volumen- und homogener Oberflächenladung.

277*. Die Stromdichte, die im Wasserstoffatom durch das magnetische Moment des Elektronenspins hervorgerufen wird, wird durch die Funktion

$$\mathfrak{j} = c \operatorname{rot}[\varrho(r)\, \mathfrak{a}]$$

bestimmt, wobei $\mathfrak{a}$ einen konstanten Vektor, c die Lichtgeschwindigkeit und ϱ die räumliche Dichte der Ladungsverteilung im Atom bedeuten; ϱ hängt nur vom Absolutbetrag des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ ab und wird für $r \to \infty$ Null. Man zeige, daß das Magnetfeld im Koordinatenursprung gleich $-{}^8/_3\pi\, \varrho(0)\, \mathfrak{a}$ ist.

Hinweis: Man benutze die Ergebnisse der Aufgabe 32.

278. Die magnetostatische Aufgabe der Bestimmung eines Feldes, das in einem inhomogenen nichtferromagnetischen Medium durch vorgegebene Ströme hervorgerufen wird, ist auf ein elektrostatisches Problem zurückzuführen. Dazu ist das Magnetfeld als Summe zweier Felder darzustellen:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}',$$

wobei $\mathfrak{H}_0$ das „primäre“ Feld, das dieselbe Stromverteilung im Vakuum hervorrufen würde, und $\mathfrak{H}'$ das Feld, das durch die Anwesenheit von Magnetika verursacht wird, bedeuten. Für $\mathfrak{H}'$ ist das skalare Potential ψ einzuführen. Die Bestimmungsgleichung sowie die Grenzbedingungen für ψ sind anzugeben.

279. Ein Stromkreis liege in der Trennebene zweier Medien mit den Permeabilitäten μ_1 und μ_2. Man bestimme die magnetische Feldstärke im ganzen Raum unter der Annahme, daß das Feld, welches der Kreis im Vakuum hervorruft, bekannt ist.

280. Ein unendlich langer geradliniger Leiter mit dem Strom I sei parallel zur Trennebene zweier Medien mit den Permeabilitäten μ_1 und μ_2 angeordnet. Der Abstand zwischen Leiter und Trennebene sei a. Man bestimme das Magnetfeld.

Hinweis: Man benutze die bereits bei elektrostatischen Problemen angewandte Methode der elektrischen Bilder (Kap. 3).

281. In ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ werde eine Kugel mit dem Radius a und der Permeabilität μ gebracht. Man berechne das resultierende Feld $\mathfrak{H}$, das induzierte magnetische Moment $\mathfrak{m}$ und die Stromdichte $\mathfrak{j}_{\text{Mol}}$, die der Magnetisierung der Kugel äquivalent sind.

282*. Eine anisotrope nichtferromagnetische Kugel werde in ein homogenes Magnetfeld gebracht. Man bestimme das resultierende Feld $\mathfrak{H}$ und das an der Kugel angreifende Drehmoment $\mathfrak{N}$.

283. Ein unendlich langer Hohlzylinder mit dem Innenradius a und dem Außenradius b befinde sich in einem äußeren homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$, das auf seiner Achse senkrecht stehe. Die Permeabilität des Zylinders sei μ_1 und die des umgebenden Raumes μ_2. Man bestimme die magnetische Feldstärke H im Hohlraum. Insbesondere ist der Fall $\mu_1 \gg \mu_2$ zu untersuchen.

284. Eine Hohlkugel mit dem Innenradius a und dem Außenradius b befinde sich in einem äußeren homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$. Die Permeabilität der Hohlkugel sei μ_1 und die des umgebenden Raumes μ_2. Man berechne das Feld H im Hohlraum und betrachte insbesondere den Fall $\mu_1 \gg \mu_2$.

285. Ein unendlich langer Leiter mit dem Radius a und der Permeabilität μ_1 befinde sich in einem äußeren homogenen transversalen Feld $\mathfrak{H}_0$ in einem Medium mit der Permeabilität μ_2. Im Leiter fließe der Gleichstrom I. Man bestimme das resultierende Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters.

286. In einem begrenzten Gebiet sei die Magnetisierungsverteilung $\mathfrak{M}(\mathfrak{r})$ vorgegeben. Man bestimme das skalare Potential ψ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$, die von dieser Verteilung hervorgerufen werden. Durch direkte Rechnung ist zu zeigen, daß die Vektoren $\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi$ durch die Beziehung $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\, \mathfrak{M}$ miteinander zusammenhängen.

287. Ein Körper beliebiger Form sei gleichmäßig magnetisiert. Man zeige, daß das skalare Potential des Magnetfeldes, das durch diesen Körper erzeugt wird, in der Form $\psi = -\mathfrak{M} \operatorname{grad} \varphi$ geschrieben werden kann, wobei $\mathfrak{M}$ die Magnetisierung und φ das elektrostatische Potential eines gleichmäßig (mit der Dichte $\varrho = 1$) geladenen Körpers derselben Form und Größe bedeuten.

288. Ein geradliniger Leiter mit dem Strom I sei im Abstand b parallel zu einem unendlich langen Kreiszylinder angeordnet. Der Radius des Zylinders sei $a < b$, die Permeabilität sei μ. Man bestimme die Wechselwirkungskraft f je Längeneinheit.[1])

Hinweis: Man wende die Methode der Bilder an.

289. Ein geradliniger Leiter mit dem Strom I sei in einem unendlich langen zylinderförmigen Hohlraum vom Radius a angeordnet, der von einem homogenen Magnetikum umgeben sei. Der Leiter sei der Zylinderachse parallel und besitze den Abstand b von ihr. Die Permeabilität des Magnetikums sei μ. Man bestimme die Wechselwirkungskraft f je Längeneinheit.

290. Der Strom I fließe durch einen geradlinigen Leiter, der auf der z-Achse liege. Von dieser Achse gehen fächerförmig drei Halbebenen aus, die die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ miteinander einschließen $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. Die Räume zwischen den Halbebenen seien mit homogenen Magnetika der Permeabilitäten μ_1, μ_2 bzw. μ_3 ausgefüllt. Man berechne das Magnetfeld $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ für jedes Raumgebiet.

---

[1]) Aus den Ergebnissen der Aufgaben 280 und 288 erhält man leicht die Lösung elektrostatischer Probleme zur Bestimmung des von einem geladenen Draht erzeugten Feldes.

291*. Man bestimme das Feld eines gleichförmig magnetisierten permanenten Kugelmagneten. Die Permeabilität des Magneten sei μ_1 und die des umgebenden Mediums μ_2.

292*. Man berechne das Feld, das durch einen unendlich langen Zylinder mit dem Radius a bei homogener Magnetisierung erzeugt wird. Der Magnetisierungsvektor $\mathfrak{M}_0$ stehe senkrecht auf der Zylinderachse. Die Permeabilität des Zylinders sei μ_1 und die des umgebenden Mediums μ_2.

293. Eine gleichmäßig magnetisierte Kugel (idealisiertes Ferromagnetikum) werde in ein äußeres homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ gebracht. Man bestimme das resultierende Feld und das Drehmoment $\mathfrak{N}$, das an der Kugel angreift. Die Permeabilität der Kugel sei μ, die des Außengebietes $\mu = 1$.

294. Ein kleiner permanenter Magnet mit dem Moment $\mathfrak{m}$ befinde sich im Vakuum in der Nähe der Grenzebene eines Stoffes mit der Permeabilität μ. Man bestimme die an dem Magneten angreifende Kraft F und das Drehmoment N.

Hinweis: Man wende die Methode der Bilder an.

295. Ein Ellipsoid aus einem magnetischen Material mit der Permeabilität μ werde in ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ gebracht. Man berechne das innere Feld und das magnetische Moment des Ellipsoids.

296*. Ein Ellipsoid aus einem anisotropen Material mit der Permeabilität μ_{ik} werde in ein äußeres homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ gebracht. Man bestimme das innere Magnetfeld $\mathfrak{H}_1$ im Ellipsoid.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[10] Becker, R., und F. Sauter: Theorie der Elektrizität, Bd. 1 und 2. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1957.

[25] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 1: Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Springer-Verlag, Berlin 1926 (Übers. aus dem Russ.); Ausgewählte Werke Bd. 1. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1956 (Собрание избранных трудов, т. I).

[26] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[34] Goldschtein, L. D., und N. W. Sernow: Elektromagnetische Felder und Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1956 (*Л. Д. Гольдштейн* и *Н. В. Зернов:* Электромагнитные поля и волны).

[40] Grinberg, G. A.: Ausgewählte Probleme der mathematischen Theorie elektrischer und magnetischer Erscheinungen. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1948 (*Г. А. Гринберг:* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений).

[43] Gurewitsch, L. E.: Elektrodynamik. Verlag der Staatlichen Universität Leningrad, Leningrad 1940 (*Л. Э. Гуревич:* Электродинамика).

[53] Landau, L. D., und E. M. Lifschiz: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[55] Landau, L. D., und E. M. Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).
[58] Lebedew, N. N., I. P. Skalskaja und Ja. S. Ufljand: Aufgabensammlung zur mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская* и *Я. С. Уфлянд:* Сборник задач по математической физике).
[67] Panofsky, W., und M. Phillips: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.
[78] Smythe, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.
[80] Sommerfeld, A.: Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 4. Aufl., Leipzig 1964.
[83] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.
[84] Tamm, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).
[89] Wlassow, A. A.: Makroskopische Elektrodynamik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*А. А. Власов:* Макроскопическая электродинамика).

6. ELEKTRISCHE UND MAGNETISCHE EIGENSCHAFTEN DER MATERIE

6.1. Polarisation im statischen Feld

Der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ (elektrisches Dipolmoment der Volumeneinheit) ist im allgemeinen eine nichtlineare Funktion des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$. Für die Mehrzahl der isotropen Dielektrika ist $\mathfrak{P}$ in schwachen Feldern der Feldstärke proportional:

$$\mathfrak{P} = \alpha\,\mathfrak{E}. \tag{6.1}$$

Die dielektrische Suszeptibilität α, auch Polarisierbarkeit genannt, wird durch die Eigenschaften der Dielektrika bestimmt und hängt im allgemeinen von der Temperatur ab. Die Dielektrizitätskonstante hängt mit der dielektrischen Suszeptibilität durch die Beziehung

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\,\alpha \tag{6.2}$$

zusammen. Für alle Stoffe in einem statischen elektrischen Feld gilt $\alpha > 0$, d.h. $\varepsilon > 1$. Für anisotrope Dielektrika sind ε und α Tensoren zweiter Stufe.

Im Falle genügend verdünnter Stoffe (Gase) ist die Polarisierbarkeit α des Dielektrikums der Teilchenzahl N in der Volumeneinheit proportional:

$$\alpha = N\beta, \qquad \varepsilon = 1 + 4\pi N\beta. \tag{6.3}$$

Dabei bedeutet β die mittlere Polarisierbarkeit eines Moleküls. Dieses Ergebnis folgt unter der Annahme, daß das auf ein Molekül wirkende Feld $\mathfrak{E}$ gleich dem mittleren Feld $\overline{\mathfrak{E}}$ ist. Im Falle dichter Materie muß man den Unterschied dieser Felder berücksichtigen. Für Dielektrika, deren Moleküle nichtpolar sind (d.h., die bei Abwesenheit eines äußeren Feldes kein konstantes Dipolmoment besitzen), gilt

$$\mathfrak{E} = \overline{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi}{3}\,\mathfrak{P}. \tag{6.4}$$

Das hat zur Folge, daß die Gleichungen (6.3) durch

$$\alpha = \frac{N\beta}{1 - \frac{4\pi}{3} N\beta}, \qquad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\beta \tag{6.4'}$$

ersetzt werden. Die letzte Beziehung und die Gleichung (6.4) werden als LORENZ-LORENTZsche Gleichungen bezeichnet.

Der Magnetisierungsvektor $\mathfrak{M}$ (magnetisches Dipolmoment der Volumeneinheit) ist bei vielen Stoffen der magnetischen Feldstärke proportional:

$$\mathfrak{M} = \chi\,\mathfrak{H} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\,\mathfrak{H}. \tag{6.5}$$

Die magnetische Permeabilität μ und die magnetische Suszeptibilität χ werden durch die Eigenschaften der Stoffe und die Temperatur bestimmt. Zum Unterschied von der dielektrischen Suszeptibilität kann die magnetische Suszeptibilität sowohl positiv als auch negativ sein. Stoffe mit $\chi > 0$ bezeichnet man als Paramagnetika, solche mit $\chi < 0$ als Diamagnetika. Für Ferromagnetika ist der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ nichtlinear und nicht eindeutig.

Bei der Lösung einiger Aufgaben dieses Abschnitts muß neben Gleichungen der Mechanik und Elektrodynamik die BOLTZMANNsche Formel benutzt werden, deren Herleitung in den Lehrbüchern über statistische Physik zu finden ist. Sie beschreibt die Verteilung der Konzentration nichtwechselwirkender Teilchen, die sich in einem äußeren Potentialfeld befinden:

$$\mathrm{d}N(q_i) = C\,\mathrm{e}^{-U(q_i)/kT}\,\mathrm{d}V. \tag{6.6}$$

Dabei bedeuten $U(q_i)$ die potentielle Energie eines Teilchens im äußeren Feld, q_i die verallgemeinerten Koordinaten, die die Lage und Orientierung der Teilchen charakterisieren, $\mathrm{d}V$ das Volumenelement im Raum der entsprechenden verallgemeinerten Koordinaten, $\mathrm{d}N(q_i)$ die Teilchenzahl im Volumenelement $\mathrm{d}V$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg grd^{-1} die BOLTZMANN-Konstante, T die absolute Temperatur und C eine Normierungskonstante, die durch die Normierungsbedingung

$$\int \mathrm{d}N(q_i) = N_0 \tag{6.7}$$

bestimmt wird, wobei N_0 die Gesamtzahl der Teilchen im System ist und das Integral über das vom System eingenommene Volumen zu erstrecken ist.

Wählt man als verallgemeinerte Koordinaten die Polarwinkel ϑ, α zur Orientierung der Molekülachse, so lautet das Volumenelement

$$\mathrm{d}V = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\alpha.$$

Aufgaben:

297. Die Dichte der Elektronenwolke im Wasserstoffatom wird durch die Funktion

$$\varrho(r) = -\frac{e_0}{\pi a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2r/a_0}$$

beschrieben, wobei e_0 die Elementarladung und a_0 eine Konstante bedeuten. Man berechne die Polarisierbarkeit β des Atoms im schwachen Magnetfeld unter Vernachlässigung der Deformation der Elektronenwolke. Wie ändert sich die Polarisierbarkeit, wenn man annimmt, daß die Elektronenwolke innerhalb der Kugel mit dem Radius a_0 konstante Dichte besitzt?

298. Ein Atom mit kugelsymmetrischer Ladungsverteilung befinde sich im homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Man zeige, daß das durch den diamagnetischen Strom hervorgerufene Zusatzfeld in der Nähe des Kerns

$$\Delta\mathfrak{H} = -\frac{e\,\mathfrak{H}}{3mc^2}\,\varphi(0)$$

ist, wobei $\varphi(0)$ das elektrostatische Potential bedeutet, das durch die Elektronen des Atoms in der Nähe des Kerns erzeugt wird, und e und m Ladung bzw. Masse des Elektrons sind.

299*. Ein Molekül bestehe aus zwei kugelsymmetrischen Atomen mit den Polarisierbarkeiten β' und β'' im Abstand a voneinander. Man bestimme den Polarisierbarkeitstensor für das Molekül unter der Annahme, daß die Atomradien klein gegen a sind. Insbesondere ist der Fall $\beta' = \beta''$ zu untersuchen.

300. Vom Energieerhaltungssatz ausgehend, ist zu zeigen, daß der Polarisierbarkeitstensor eines Moleküls in einem konstanten Feld symmetrisch ist.

301. Ein Dielektrikum bestehe aus gleichen Molekülen, die bei Abwesenheit eines äußeren Feldes keine Dipolmomente besitzen. Der Polarisierbarkeitstensor β_{ik} eines einzelnen Moleküls sei bekannt. Man bestimme die dielektrische Suszeptibilität $\varkappa$ des Dielektrikums und untersuche zwei Fälle:

a) alle Moleküle haben gleiche Orientierung,

b) die Molekülorientierungen seien ungeordnet.[1])

Die Abweichung des auf das Molekül wirkenden Feldes vom mittleren Feld ist mit Hilfe der LORENZ-LORENTZschen Gleichung zu berücksichtigen.

302*. Ist die Polarisierbarkeit eines Moleküls in verschiedenen Richtungen unterschiedlich, so hängt die Wechselwirkungsenergie des Moleküls mit einem äußeren Feld von seiner Orientierung ab. Daher wird neben dem Deformationsmechanismus der Polarisation der Orientierungsmechanismus wirksam, obwohl das Molekül kein permanentes elektrisches Moment besitzt. Das hat zur Folge, daß die Dielektrizitätskonstante eines Stoffes, der aus ungeordnet orientierten, nichtpolaren Molekülen besteht, von der Temperatur abhängt. Man untersuche diesen Effekt am Beispiel eines zweiatomigen Gases, das sich in einem schwachen konstanten elektrischen Feld befindet. Man berechne die dielektrische Suszeptibilität $\varkappa$ des Dielektrikums. Die longitudinale Polarisierbarkeit eines Gasmoleküls sei β_1, die transversale β_2.

303. Zwei Moleküle in einem Gas sollen die Dipolmomente p_1 und p_2 besitzen und den gegenseitigen Abstand R haben. Ihre Orientierungen ändern sich durch Stöße mit anderen Molekülen; die Wahrscheinlichkeit einer vorgegebenen gegenseitigen Orientierung wird durch die BOLTZMANNsche Formel (6.6) bestimmt, in der U die Wechselwirkungsenergie der beiden Dipole bedeutet. Nimmt man die Bedingung $U \ll kT$ als erfüllt an, so kann man zeigen, daß die Energie U, über die BOLTZMANN-Verteilung gemittelt,[2]) die Form

$$U(R) = -\frac{2p_1^2\,p_2^2}{3kTR^6}$$

hat.

---

[1]) Der Fall a) kann nur in amorphen und kristallinen Festkörpern, der Fall b) in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern vorliegen. Man muß jedoch beachten, daß ein Festkörper im Unterschied zu einem Gas ein einheitliches System stark miteinander wechselwirkender Teilchen darstellt. Die Vorstellung einzelner Moleküle innerhalb eines Festkörpers wird sich deshalb häufig als sinnlos erweisen.

[2]) Bei der Mittelung über die Richtungen der Dipolmomente in den Aufgaben 303 und 304 benutze man die Gleichungen, die in der Lösung zu Aufgabe 32 angegeben sind.

304. Ein Molekül mit dem elektrischen Dipolmoment p stehe mit einem nichtpolaren Molekül der Polarisierbarkeit β in Wechselwirkung. Man zeige, daß die Wechselwirkungsenergie, über die möglichen Orientierungen des Dipolmoments gemittelt,[1]) die Form

$$U(R) = -\frac{\beta p^2}{R^6}$$

hat, wobei R den Abstand zwischen den Molekülen bedeutet.

305*. In einem Dielektrikum, das sich in einem statischen elektrischen Feld befindet, gibt es im allgemeinen neben dem Dipolmoment (dem Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$) auch Momente höherer Ordnung. Man bestimme die Dichte der Volumen- und Oberflächenladungen, die der Quadrupolpolarisation Q_{ik} äquivalent sind (Q_{ik} sind die Komponenten des Quadrupolmoments je Volumeneinheit des Dielektrikums).

306. Die Dielektrizitätskonstante polarer Stoffe, für die die LORENZ-LORENTZsche Gleichung nicht gilt, kann mit Hilfe der folgenden, auf ONSAGER zurückgehenden Näherungsmethode berechnet werden.

Wir betrachten eine kleine Kugel, in der nur ein Molekül Platz findet. Es wird angenommen, daß sich außerhalb dieser Kugel ein homogenes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε befindet, innerhalb der Kugel Vakuum herrscht und das Feld hier mit dem effektiven Feld übereinstimmt, das auf das Molekül wirkt. Dieses Feld wird durch Lösung der makroskopischen elektrostatischen Gleichungen bestimmt. Man berechne nach dem angegebenen Verfahren den Zusammenhang zwischen der Dielektrizitätskonstanten ε des Stoffes und der Polarisierbarkeit β seiner Moleküle.

307*. Ein System bestehe aus Teilchen der Ladung e und der Masse m, von denen sich jedes in festem Abstand a von einem bestimmten (seinem eigenen) Zentrum bewegt. Das System befinde sich in einem Magnetfeld im Zustand des statistischen Gleichgewichts. Man zeige, daß die gesamte magnetische Suszeptibilität dieses Systems Null ist.

308*. Ein ionisiertes Gas besteht aus Ionen (Ladung Ze, mittlere Konzentration N_0) und Elektronen (Ladung $-e$, mittlere Konzentration n_0). Das Gas sei insgesamt elektrisch neutral, d.h., es gelte $ZN_0 = n_0$, und befinde sich im Zustand des statistischen Gleichgewichts mit der Temperatur T. Unter der Annahme, daß das Gas durch die klassische Statistik beschrieben werden kann und daß die Wechselwirkungsenergie der Teilchen klein gegen die thermische Energie kT ist, bestimme man die Verteilung der Ladungsdichte in der Nähe eines einzelnen Ions.

309. Eine unendlich ausgedehnte, durch die Ebenen $x = h$ und $x = -h$ begrenzte leitende Platte befinde sich in einem statischen homogenen transversalen elektrischen Feld E_0. Die Platte sei insgesamt elektrisch neutral, die mittlere Konzentration der „freien" Ladungen sei N_0, und die Dielektrizitätskonstante sei ε. Unter der Annahme, daß die Konzentrationsänderung unter

[1]) Bei der Mittelung über die Richtungen der Dipolmomente in den Aufgaben 303 und 304 benutze man die Gleichungen, die in der Lösung zu Aufgabe 32 angegeben sind.

der Wirkung eines angelegten Feldes klein ist ($|N - N_0| \ll N_0$), bestimme man die Feldverteilung innerhalb der Platte und die Dicke der Schicht, in der die „Oberflächen"ladung konzentriert ist.

310. Zwischen zwei bei $x = h$ und $x = -h$ befindlichen unendlich ausgedehnten Elektroden, an denen die Potentialdifferenz $2\varphi_0$ liege, befinde sich eine Elektrolytschicht. Der Elektrolyt bestehe aus zwei Sorten von Ionen mit den Ladungen $+e$ und $-e$, deren mittlere Konzentration bei Abwesenheit eines äußeren Feldes N_0 sei. Die Dielektrizitätskonstante des Elektrolyten sei ε. Man bestimme die Potentialverteilung zwischen den Elektroden.

Hinweis: Man benutze den Lösungsweg der Aufgabe 308.

6.2. Polarisation im zeitlich veränderlichen Feld

Im Falle eines zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feldes hängt die dielektrische Verschiebung zur Zeit t von den Feldgrößen zu allen vorhergehenden Zeitpunkten ab:

$$\mathfrak{D}(t) = \mathfrak{E}(t) + \int_{-\infty}^{t} f(t-u)\, \mathfrak{E}(u)\, \mathrm{d}u. \tag{6.8}$$

Dabei ist $f(t-u)$ eine Funktion, die durch die Eigenschaften des Mediums bestimmt werden kann. (Eine ähnliche Gleichung gilt für die magnetischen Größen.) Die direkte Proportionalität zwischen Induktion und Feldstärke bleibt nur für die FOURIER-Komponenten dieser Vektoren erhalten (d.h. für die Felder, die harmonisch von der Zeit abhängen):

$$\mathfrak{D}_\omega = \varepsilon(\omega)\, \mathfrak{E}_\omega, \qquad \mathfrak{B}_\omega = \mu(\omega)\, \mathfrak{H}_\omega. \tag{6.9}$$

Die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ werden Funktionen der Feldfrequenz. Um die Frequenzabhängigkeit dieser Größen berechnen zu können, muß man bestimmte Voraussetzungen über die Elektronenstruktur der Materie, vor allem der Atome und Moleküle, machen. Eine strenge Theorie der Polarisation kann nur auf der Grundlage der Quantenmechanik entwickelt werden, da die klassische Mechanik und die Elektrodynamik nicht in der Lage sind, den Aufbau der Materie zu erklären. Die klassische Theorie gestattet es jedoch, mit dem Oszillatormodell des Atoms eine Reihe wichtiger qualitativer Schlußfolgerungen über das Verhalten der Materie in einem zeitlich veränderlichen Feld zu erhalten. Nach diesem Modell befindet sich ein Elektron im Atom unter der Wirkung der elastischen Kraft

$$\mathfrak{F} = -k\, \mathfrak{r}, \tag{6.10}$$

wobei $\mathfrak{r}$ den Abstand zum Anziehungszentrum (Kern) und k eine Konstante bedeuten. Um die Dissipation der elektromagnetischen Energie zu berücksichtigen, muß man auch die am Elektron angreifende „Reibungskraft" einführen, die der Geschwindigkeit des Elektrons proportional ist:

$$\mathfrak{F}_\mathrm{R} = -\eta\, \dot{\mathfrak{r}}. \tag{6.11}$$

Die Dielektrizitätskonstante eines aus Oszillatoratomen bestehenden Stoffes ist [9]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\,\gamma\,\omega} \tag{6.12}$$

mit

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\,e^2 N}{m}, \quad \omega_0 = \frac{k}{m}, \quad \gamma = \frac{\eta}{m},$$

wobei N die Zahl der Atome je Volumeneinheit und e und m Ladung bzw. Masse des Elektrons bedeuten.

Abb. 16 zeigt qualitativ die Abhängigkeit des Realteils ε' und des Imaginärteils ε'' der Dielektrizitätskonstanten ε von ω. Der Imaginärteil ε'', der die Absorption der elektromagnetischen Energie bestimmt, ist nur in der Nähe der Eigenfrequenz ω_0 der Oszillatorschwingungen im Medium merklich von Null verschieden. Im Gebiet der Frequenzen in der Nähe von ω_0 nimmt ε' mit wachsendem ω ab (anomale Dispersion). Im übrigen Frequenzbereich nimmt ε' mit wachsendem ω zu (normale Dispersion).

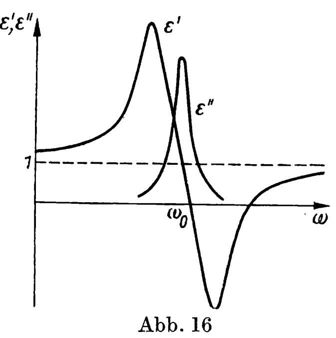


Abb. 16

Die quantenmechanische Betrachtung führt zu einer ähnlichen Beziehung:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\,\gamma_i\,\omega}. \tag{6.13}$$

Dabei bedeuten ω_p, f_i, ω_i und γ_i Konstanten.

Aufgaben:

311. Ein künstliches Dielektrikum bestehe aus gleichen, ungeordnet im Vakuum verteilten, ideal leitenden Metallkugeln mit dem Radius a. Die mittlere Zahl der Kugeln in der Volumeneinheit sei N. In diesem Medium breite sich eine elektromagnetische Welle aus. Unter Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen dem Feld, das auf jede Kugel wirkt, und dem mittleren Feld sind die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ dieses künstlichen Dielektrikums zu bestimmen. Unter welchen Bedingungen kann man es als dichtes Medium auffassen?

Hinweis: Die elektrische und die magnetische Polarisierbarkeit einer ideal leitenden Kugel werden in den Aufgaben 151 und 377 berechnet.

312*. Man bestimme die Dielektrizitätskonstante eines leitenden Mediums unter der Annahme, daß die Ionen nicht beweglich sind und der Einfluß der gebundenen Elektronen vernachlässigbar klein ist. Die Energiedissipation ist durch Einführung der „Reibungskraft“ $-\eta\,\dot{\mathfrak{r}}$, die auf die Elektronen der Konzentration N wirkt, zu berücksichtigen. Wie lautet die Beziehung zwischen dem Koeffizienten η und der spezifischen Leitfähigkeit?

313*. Ein gasförmiges Dielektrikum, das sich im Zustand des statistischen Gleichgewichts mit der Temperatur T befinde, bestehe aus Molekülen der

Konzentration N; die Hauptwerte des Polarisierbarkeitstensors seien $\beta^{(1)} = \beta$ und $\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta'$ (β und β' hängen von der Frequenz ω ab). Es unterliege dem Einfluß eines statischen homogenen elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_a$. Man bestimme den dielektrischen Tensor des Dielektrikums für das harmonisch von der Zeit abhängende elektrische Feld $\mathfrak{E}(t) = E_0 \, e^{-i\omega t}$ unter der Annahme $E_0 \ll E_a$.

314. Ein gasförmiges Dielektrikum bestehe aus polaren Molekülen, deren elektrisches Dipolmoment bei Abwesenheit eines äußeren Feldes gleich p_0 sei. Die Hauptwerte des Polarisierbarkeitstensors des Moleküls im zeitlich veränderlichen Feld seien $\beta^{(1)} = \beta$ und $\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta'$, wobei die x_1-Achse die Richtung von p_0 habe. Am Dielektrikum greifen ein konstantes elektrisches Feld $\mathfrak{E}_a$ und ein zeitlich veränderliches Feld $\mathfrak{E}(t) = E_0 \, e^{-i\omega t}$ an. Unter Vernachlässigung der orientierenden Wirkung des veränderlichen Feldes und des Orientierungseffektes, der mit der anisotropen Polarisierbarkeit eines Moleküls im konstanten Feld zusammenhängt, bestimme man den dielektrischen Tensor für veränderliches Feld. Die Temperatur sei T und die Konzentration der Teilchen N.

315*. Ein System von Ladungen (Molekülen) befinde sich in einem Magnetfeld, das sich nach einem harmonischen Gesetz ändert. Man zeige, daß sein Polarisierbarkeitstensor der Bedingung $\beta_{ik} = \beta_{ki}^*$ genügt, wenn im System keine Dissipation elektromagnetischer Energie stattfindet.

Hinweis: Bei der Berechnung der infinitesimalen Arbeit ist die Formel (7.7) zu benutzen.

316. Man zeige: Ist der Tensor β_{ik} hermitesch, so kann er bei geeigneter Wahl der Koordinatenachsen in der Form

$$\beta_{ik} = \beta^{(i)} \, \delta_{ik} + i \, e_{ikl} \, g_l$$

geschrieben werden, wobei e_{ikl} der antisymmetrische Einheitstensor dritter Stufe ist (zu seiner Definition s. Aufgabe 24) und $\mathfrak{g}$ einen reellen Vektor bedeutet (Gyrationsvektor).[1]

317. Man bestimme die Polarisierbarkeit β_{ik} eines Atoms im Feld einer ebenen monochromatischen Welle bei Anwesenheit eines schwachen äußeren konstanten Magnetfeldes $\mathfrak{H}_0$. Vom Modell des elastisch gebundenen Elektrons ausgehend, wende man die Methode der sukzessiven Näherungen an. Die Wirkung des Magnetfeldes der ebenen Welle und die Verluste elektromagnetischer Energie sind zu vernachlässigen. Man gebe den Gyrationsvektor $\mathfrak{g}$ an.

318. Mit dem Oszillatormodell des Atoms bestimme man den dielektrischen Tensor $\varepsilon_{ik}(\omega)$ eines Dielektrikums, das in der Volumeneinheit N Atome enthält und sich in einem konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ beliebiger Größe befindet. Die Dissipation elektromagnetischer Energie und die Wirkung des Magnetfeldes der ebenen Welle sind zu vernachlässigen. Unter welcher Bedingung geht die exakte Lösung in die Näherungslösung der vorigen Aufgabe über?

---

[1]) Medien, in denen der Gyrationsvektor von Null verschieden ist, bezeichnet man als gyrotrop. Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in gyrotropen Medien wird im Abschnitt 8.3. betrachtet.

Hinweis: Bei der Integration der Bewegungsgleichung des Elektrons gehe man zu den zyklischen Koordinaten

$$x_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (x \pm i\, y), \qquad x_0 = z$$

über.

319*. Man bestimme den dielektrischen Tensor eines Plasmas, das sich in einem äußeren konstanten Magnetfeld H_0 befindet. Die mittlere Konzentration der Elektronen sei N. Die positiven Ionen sind als unbeweglich anzunehmen und die Energieverluste durch Einführung der „Reibungskraft" $-\eta\, \dot{\mathfrak{r}}$ zu berücksichtigen.

320. In dem in der vorigen Aufgabe beschriebenen Plasma bestehe ein statisches elektrisches Feld $\mathfrak{E}$. Man bestimme den Zusammenhang zwischen der Stromdichte $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{E}$ in der bezüglich H_0 linearen Näherung. Wie lautet der Tensor der elektrischen Leitfähigkeit?

Hinweis: Die Bewegungsgleichung des Elektrons ist mit der Methode der sukzessiven Näherungen zu lösen.

321*. Man bestimme die Dielektrizitätskonstante eines ionisierten Gases in einem konstanten Magnetfeld unter Berücksichtigung der Bewegung der positiven Ionen und unter der Annahme, daß die Masse des Ions groß gegen die Masse des Elektrons ist. Die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von ω ist zu untersuchen und mit dem Fall zu vergleichen, daß die Ionen als unbeweglich angenommen werden. Die Konzentration der Ionen und Elektronen sei N.

Hinweis: Man betrachte das System der Bewegungsgleichungen von Elektron und Ion und berücksichtige, daß am Elektron die „Reibungskraft" $-\eta(\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}})$ und am Ion die „Reibungskraft" $-\eta(\dot{\mathfrak{R}} - \dot{\mathfrak{r}})$ angreift, wobei $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{R}$ die Radiusvektoren von Elektron bzw. Ion sind.

322. In einem unbegrenzten homogenen Medium existiere nur eine ausgezeichnete Richtung (z.B. die eines äußeren Feldes). Ferner sei T_{ik} irgendein tensorieller Parameter dieses Mediums, z.B. die Dielektrizitätskonstante oder die Permeabilität. Die Tensorkomponenten T_{ik} müssen offenbar gegenüber beliebigen Drehungen des Koordinatensystems um die ausgezeichnete Richtung invariant sein. Welche Einschränkungen ergeben sich aus dieser Invarianzbedingung für die Form des Tensors T_{ik}?

323. In einigen Fällen kann die Funktion $f(t)$, die den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ bestimmt [s. Gleichung (6.8)], in der Form $f(t) = f_0\, e^{-t/\tau}$ geschrieben werden, wobei f_0 und τ Konstanten bedeuten. Man zeige, daß dann die Beziehung

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{1 - i\,\omega\,\tau}$$

gilt, wobei ε_0 die statische Dielektrizitätskonstante ist.

324*. Ausgehend von der Kausalitätsbedingung, nach der in einem Medium erst nach Beginn der Einwirkung eines elektrischen Feldes eine Polarisation

entstehen kann, ist zu zeigen, daß zwischen dem Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\,\varepsilon''(\omega)$ der Zusammenhang

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega}\, d\omega', \qquad \varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega'$$

besteht (KRAMERS-KRONIGsche Dispersionsbeziehungen).[1] Das Symbol $\fint$ bezeichnet den Hauptwert des Integrals.

Hinweis: Man betrachte die Polarisation $\mathfrak{P}(t)$, die im Medium unter dem Einfluß des Feldes $\mathfrak{E}(t) = \mathfrak{E}_0\,\delta(t)$ entsteht, und benutze die Formel (A I.17).

325. Mit Hilfe der KRAMERS-KRONIGschen Dispersionsbeziehungen (s. Aufgabe 324) bestimme man den Realteil der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon'(\omega)$ aus dem bekannten Imaginärteil

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_0 - 1)\,\omega\,\tau}{1 + \omega^2\,\tau^2},$$

wobei ε_0 und τ Konstanten sind.

6.3. Ferromagnetische Resonanz

Der Ferromagnetismus kann im Rahmen klassischer Vorstellungen nicht konsequent erklärt werden. Die Hauptrolle spielen bei ihm die magnetischen Eigen- (Spin-) Momente der Elektronen und die spezifischen Wechselwirkungskräfte zwischen ihnen, die quantentheoretischen Ursprungs sind. Man kann jedoch einige auf den Ferromagnetismus bezügliche Erscheinungen hinreichend genau auf Grund einer klassischen (genauer: quasiklassischen) Theorie betrachten. Dazu gehört auch die ferromagnetische Resonanz, die in folgendem besteht:

Ein konstantes Magnetfeld, das das magnetische Moment eines Atoms oder einzelnen Elektrons beeinflußt, hat zur Folge, daß das magnetische Moment um die Feldrichtung eine LARMOR-Präzession ausführt (s. [84], § 68 und 71). Diese Bewegung wird im Laufe der Zeit gedämpft, da die Energie der LARMOR-Präzession in Wärmeenergie übergeht. Ist das äußere Feld genügend stark, so orientieren sich alle elementaren magnetischen Momente in Richtung des äußeren Feldes. Man bezeichnet ein solches Ferromagnetikum als gesättigt und das magnetische Moment der Volumeneinheit als Sättigungsmagnetisierung. In diesem Abschnitt werden wir immer annehmen, daß das Ferromagnetikum bis zur Sättigung magnetisiert ist. Wirkt auf das Ferromagnetikum außer dem

---

[1] Für Metalle, bei denen $\varepsilon(\omega)$ bei $\omega = 0$ einen Pol hat, lautet die zweite Beziehung

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega' + \frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

wobei σ die statische Leitfähigkeit des Metalls bedeutet.

konstanten ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, das auf dem konstanten Feld senkrecht steht, so spielt das veränderliche Feld die Rolle einer erzwingenden Kraft, die die Präzessionsbewegung aufrechterhält. Bei übereinstimmenden Frequenzen des äußeren Feldes und der Präzessionsbewegung kommt es zur ferromagnetischen Resonanz.

Die Bewegung des Magnetisierungsvektors im Ferromagnetikum wird durch die LANDAU-LIFSCHIZsche Gleichung beschrieben [56], die mit Hilfe der folgenden Überlegungen abgeleitet werden kann. Auf das magnetische Moment $\mathfrak{m}$ eines Teilchens (eines Atoms oder einzelnen Elektrons), das sich im Magnetfeld $\mathfrak{H}_{\text{eff}}$ befindet, wirkt das Drehmoment $\mathfrak{N} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}_{\text{eff}}$. Dadurch ändert sich das mechanische Moment (der Drehimpuls) $\mathfrak{L}$ des Teilchens nach dem Gesetz

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{L}}{\mathrm{d}t} = \mathfrak{N} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}_{\text{eff}}. \tag{6.14}$$

Wie die Quantenmechanik zeigt, hängen magnetisches und mechanisches Moment durch die Beziehung

$$\mathfrak{m} = -\gamma\,\mathfrak{L}, \quad \gamma = \frac{e_0}{m\,c}$$

miteinander zusammen, wobei e_0 die Elementarladung, m die Masse des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeuten. Mit Hilfe dieser Beziehung erhält man durch Mittelung beider Seiten der Gleichung (6.14) über ein im physikalischen Sinne unendlich kleines Volumen die LANDAU-LIFSCHIZsche Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\,(\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}_{\text{eff}}). \tag{6.15}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{M}$ den Magnetisierungsvektor und $\mathfrak{H}_{\text{eff}}$ das mittlere Magnetfeld, das auf ein einzelnes elementares magnetisches Moment wirkt. In einem unbegrenzten, bis zur Sättigung magnetisierten isotropen Medium gilt [42]

$$\mathfrak{H}_{\text{eff}} = \mathfrak{H} - \lambda\,\mathfrak{M} + q\,\Delta\,\mathfrak{M}, \tag{6.16}$$

wobei $\mathfrak{H}$ das mittlere Magnetfeld im Medium bezeichnet und λ, q Konstanten sind. Der zweite Term (molekulares WEISSsches Feld) liefert keinen Beitrag zur Gleichung (6.15), da $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} = 0$ ist. Der dritte Term ist bei sehr starken räumlichen Änderungen von $\mathfrak{M}$ von Bedeutung. In diesem Abschnitt betrachten wir keine solchen Änderungen von $\mathfrak{M}$ und setzen daher $\mathfrak{H}_{\text{eff}} = \mathfrak{H}$.

Wenn die Verluste elektromagnetischer Energie im Medium berücksichtigt werden sollen, muß die Gleichung (6.15) durch einen Dissipationsterm ergänzt werden. Gewöhnlich wird angenommen, daß in $\mathfrak{H}_{\text{eff}}$ ein gewisses Feld $-p\,\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t$ der „Reibungskräfte" eingeht, das der Änderungsgeschwindigkeit der Magnetisierung proportional ist. Dann lautet die Gleichung (6.15)

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\,\mathfrak{M} \times \left(\mathfrak{H} - p\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t}\right), \tag{6.17}$$

wobei p ein Parameter (Verlustparameter) ist. Sind die Verluste klein und das magnetische Gesamtfeld als Summe des konstanten Feldes $\mathfrak{H}_0$ und des zeitlich

veränderlichen Feldes $\mathfrak{h}(t)$ darstellbar, d.h. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{h}(t)$, wobei $|\mathfrak{h}| \ll H_0$ ist, so nimmt die Gleichung (6.17) die einfachere Form [42]

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma(\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}) + \omega_r(\chi_0 \mathfrak{H} - \mathfrak{M}) \tag{6.18}$$

an. Dabei gilt $\chi_0 = M_0/H_0$, $\omega_r = p\gamma^2 M_0^2/\chi_0$, während $M_0 = |\mathfrak{M}|$ die Sättigungsmagnetisierung bedeutet. Die LANDAU-LIFSCHIZsche Gleichung ist die Grundgleichung für alle Untersuchungen über die ferromagnetische Resonanz.

In der Höchstfrequenztechnik finden in letzter Zeit Ferromagnetika mit sehr kleiner Leitfähigkeit (Ferrodielektrika, Ferrite) Anwendung. Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Ferriten wird in den Kapiteln 8 und 9 betrachtet.

Aufgaben:

326. Wie lautet das Bewegungsgesetz für den Magnetisierungsvektor $\mathfrak{M}$ bei Abwesenheit von Verlusten in einem unbegrenzten Ferritmedium, das bis zur Sättigung magnetisiert ist? Das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ im Medium sei statisch und homogen.

327. Ausgehend von der LANDAU-LIFSCHIZschen Gleichung in der Form (6.18), löse man die vorige Aufgabe unter Berücksichtigung von Verlusten. Es wird angenommen, daß die Richtung von $\mathfrak{M}$ wenig von der Richtung von $\mathfrak{H}$ verschieden ist und $\omega_r \ll \omega_0 = \gamma H_0$ gilt.

328*. Ein unbegrenztes ferromagnetisches Medium stehe unter dem Einfluß eines homogenen konstanten Feldes $\mathfrak{H}_0$ sowie eines hochfrequenten Feldes $\mathfrak{h}\,e^{-i\omega t}$ mit $\mathfrak{h} = \text{const}$. Unter der Annahme $h \ll H_0$ und unter Vernachlässigung der Verluste bestimme man die erzwungenen Schwingungen des Magnetisierungsvektors $\mathfrak{M}$ in der bezüglich h linearen Näherung. (Die Eigenschwingungen, d.h. die LARMOR-Präzession unter dem Einfluß des konstanten Feldes $\mathfrak{H}_0$, werden durch die Verluste gedämpft, die für alle realen Systeme existieren.)

329. Mit Hilfe des Ergebnisses der vorigen Aufgabe bestimme man den Tensor der magnetischen Suszeptibilität χ_{ik} und der magnetischen Permeabilität μ_{ik} für ein HF-Feld. Die Tensorkomponenten μ_{ik} sind in Abhängigkeit vom konstanten Magnetfeld H_0 für $M_0 = 160\ \mathrm{G} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs/cm^2}$ und $\nu = \omega/2\pi = 9375\ \mathrm{MHz}$ ($\lambda = 3{,}2$ cm) graphisch darzustellen. Man verfolge die Resonanzen in der Änderung dieser Größen und bestimme $(H_0)_{\mathrm{res}}$.

330*. In einem unbegrenzten, bis zur Sättigung magnetisierten Ferritmedium gebe es außer dem konstanten Magnetfeld $H_0 = H_z$ ein veränderliches, zirkular polarisiertes Feld ($H_x = h\cos\omega t$, $H_y = h\sin\omega t$, $h = \text{const}$). Man bestimme die exakte Lösung der LANDAU-LIFSCHIZschen Gleichung, die der erzwungenen Präzession des Vektors $\mathfrak{M}$ mit der Frequenz ω des äußeren Feldes entspricht. Die Energiedissipation ist zu vernachlässigen.

331. Die Aufgabe 328 über die erzwungenen Schwingungen des Magnetisierungsvektors ist unter Berücksichtigung der Verluste zu lösen. Man benutze die LANDAU-LIFSCHIZsche Gleichung in der Form (6.18).

332. Mit Hilfe des Ergebnisses der vorigen Aufgabe berechne man den Tensor μ_{ik} der magnetischen Permeabilität für ein HF-Feld und gebe die Ausdrücke für die Real- und Imaginärteile der Komponenten dieser Tensoren an. Man stelle den Real- und Imaginärteil der Tensorkomponenten der magnetischen Permeabilität in Abhängigkeit vom konstanten Magnetfeld für $M_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Vs/cm², $\nu = \omega/2\pi = 9375$ MHz und $\omega_r = 3 \cdot 10^9$ s^{-1} graphisch dar und bestimme das Resonanzfeld $(H_0)_{\text{res}}$ (d.h. die Werte von H_0, für die die Imaginärteile der Komponenten des Tensors μ_{ik} maximal sind).

333. Man bestimme die Halbwertsbreite ΔH_0 der Resonanzkurve für die Imaginärteile der Tensorkomponenten der Permeabilität unter der Annahme $\omega_r \ll \omega$. Als Halbwertsbreite der Resonanzkurve bezeichnet man den Abstand zwischen den beiden Ordinaten $\mu'' = \mu_{\text{res}}$ und $\mu'' = {}^1/_2 \mu_{\text{res}}$.

334*. Die Frequenz ω_k der LARMOR-Präzession in einer begrenzten ferromagnetischen Probe in Form eines Ellipsoids ist ohne Berücksichtigung der Verluste zu bestimmen. Die Probe befinde sich in einem homogenen äußeren Feld $\mathfrak{H}_0$, das längs einer der Ellipsoidachsen angelegt sei. Die Abweichung des Magnetisierungsvektors $\mathfrak{M}$ von der Gleichgewichtslage wird als klein angenommen.

Hinweis: In die LANDAU-LIFSCHIZsche Gleichung geht hier das innere Feld $\mathfrak{H}_1$ ein, das infolge der entmagnetisierenden Wirkung der Körperform vom äußeren Feld $\mathfrak{H}_0$ verschieden ist:

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_{\text{entmagn}}, \qquad H_{k\,\text{entmagn}} = 4\pi N_{kl} M_l.$$

Dabei beschreibt der Tensor N_{kl} die entmagnetisierende Wirkung der Form (s. Aufgabe 295).

335. Man löse die vorige Aufgabe unter Berücksichtigung der Verluste. (Es sind nur die Terme zu berücksichtigen, die linear bezüglich ω_r sind.)

336*. Man untersuche die erzwungenen Schwingungen bei Anwesenheit von Verlusten in einer ellipsoidförmigen Probe. Man bestimme die Komponenten χ_{ik} des Tensors der magnetischen Suszeptibilität für ein HF-Feld unter der Annahme, daß dessen Amplitude h klein gegen das konstante Feld H_0 ist.

337. In einigen ferromagnetischen Medien (Antiferromagnetika) setzt sich die resultierende Magnetisierung $\mathfrak{M}$ aus zwei Teilen zusammen: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ werden durch verschiedenartige Ionen erzeugt, die im Kristallgitter zwei magnetische Untergitter bilden. Im Gleichgewichtszustand sind die Magnetisierungsvektoren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ antiparallel orientiert, so daß $M = |M_1 - M_2|$ gilt. Bei der Präzession im äußeren Magnetfeld wird die Antiparallelität der Vektoren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gestört. Dadurch beginnt auf jeden der Vektoren ein molekulares WEISSsches Feld zu wirken [s. Gleichung (6.16)]. Man bestimme die Frequenz der Eigenpräzession unter der Annahme $\lambda |M_1 - M_2| \gg H_0$, wobei H_0 das äußere Feld und λ die Konstante des molekularen WEISSschen Feldes ist. Die Abweichungen der Vektoren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ von der Gleichgewichtslage werden als klein angesehen.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[5] ALPERT, JA. L., W. L. GINSBURG und E. L. FEINBERG: Ausbreitung von Radiowellen. Gostechisdat, Moskau 1953 (*Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург* и *Е. Л. Фейнберг:* Распространение радиоволн).

[9] BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. 2: Elektronentheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig–Berlin 1933.

[13] BORN, M.: Ein Besuch bei den Raumfahrern und das Uhrenparadoxon. Phys. Blätter 14 (1957), S. 207.

[26] FRENKEL, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[27] FRÖHLICH, H.: Theory of Dielectrics, Dielectric Constant and Dielectric Loss. Claren don Press, Oxford 1958.

[33] GINSBURG, W. L., und G. P. MOTULEWITSCH: Optische Eigenschaften von Metallen. Usp. fis. Nauk 44 (1951), S. 321 (russ.).

[42] GUREWITSCH, A. G.: Ferrite für höchste Frequenzen. Fismatgis, Moskau 1960 (*А. Г. Гуревич:* Ферриты на сверхвысоких частотах).

[49] KITTEL, CH.: Introduction to Solid State Physics. John Wiley & Sons Inc., New York 1953.

[55] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSHITZ: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[56] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSHITZ: On the Theory of the Dispersion of Magnetic Permeability in Ferromagnetic Bodies. Phys. Z. Sowjetunion 8 (1935), S. 153.

[77] SMOLENSKI, G. A., und A. G. GUREWITSCH: Ferromagnetische Halbleiter, in: Halbleiter in Wissenschaft und Technik, herausgeg. von A. F. IOFFE, Bd. 2. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1958 (*Г. А. Смоленский* и *А. Г. Гуревич:* Ферромагнитные полупроводники, в сборнике: Полупроводники в науке и технике, под ред. *А. Ф. Иоффе*).

[81] SOMMERFELD, A.: Optik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 3. Aufl., Leipzig 1964.

[84] TAMM, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).

[90] WOLKENSTEIN, M. W.: Molekularoptik. Gostechisdat, Moskau 1951 (*М. В. Волькенштейн:* Молекулярная оптика).

7. QUASISTATIONÄRES ELEKTROMAGNETISCHES FELD

7.1. Quasistationäre Erscheinungen in linearen Leitern

Ist die Schwingungsperiode des elektromagnetischen Feldes groß gegen die Zeit, in der sich das Feld durch das System hindurch ausbreitet, d.h.

$$T \gg \frac{l}{c}, \qquad \omega \ll \frac{c}{l}, \tag{7.1}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und l die lineare Ausdehnung des Systems bedeuten, so kann man die Endlichkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Störungen innerhalb des Systems vernachlässigen. Man bezeichnet diese Näherung als quasistationär.[1])

Der Strom in einem geschlossenen Kreis mit der elektromotorischen Kraft $V^{(e)}(t)$, der Kapazität C, der Induktivität L und dem Widerstand R genügt in der quasistationären Näherung der Differentialgleichung

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{1}{c^2} L \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} q = V^{(e)}(t), \tag{7.2}$$

wobei q die Ladung auf der Kondensatorbelegung bezeichnet.

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit der elektromotorischen Kraft, d.h.

$$V^{(e)}(t) = V_0^{(e)} \mathrm{e}^{-i\omega t},$$

und stationärem Betrieb ist der Strom der elektromotorischen Kraft proportional:

$$I = \frac{V^{(e)}}{Z}, \qquad Z = R + i\left(\frac{1}{\omega C} - \frac{\omega L}{c^2}\right). \tag{7.3}$$

Die Größe Z wird als komplexer Widerstand (Impedanz) des Kreises bezeichnet.

Für einen verzweigten Kreis können die Differentialgleichungen, die die Ströme in den einzelnen Teilen bestimmen, mit Hilfe der KIRCHHOFFschen Gesetze aufgestellt werden.

Wird in einem linearen Kreis als Ergebnis einer elektromagnetischen Induktion eine elektromotorische Kraft induziert, so kann sie mit Hilfe der FARADAYschen Formel

$$V_{\mathrm{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{7.4}$$

---

[1]) Manchmal ergibt die quasistationäre Näherung gute Resultate, auch wenn die Bedingungen (7.1) verletzt sind, z.B. in der Theorie der langen Leitungen. Näheres dazu findet man in [84], § 107.

berechnet werden, wobei Φ den Induktionsfluß durch den Kreis bedeutet. Φ kann sich sowohl infolge einer Änderung des Magnetfeldes als auch durch Bewegung oder Deformation des Kreises ändern. Gibt es mehrere induktiv gekoppelte Kreise, so wird der Gesamtfluß Φ_i durch den i-ten Kreis durch die Beziehung

$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_k L_{ik} I_k \tag{7.5}$$

ausgedrückt. Dabei bedeuten I_k den Strom im k-ten Kreis, L_{ik} mit $i \neq k$ den Wechselinduktionskoeffizienten zwischen dem i-ten und dem k-ten Kreis und $L_{ii} \equiv L_i$ den Selbstinduktionskoeffizienten des i-ten Kreises. (Die Induktionskoeffizienten werden im Kapitel 5 behandelt.)

Die verallgemeinerte Kraft, die an einem stromführenden Leiter im quasistationären Feld angreift, kann mit Hilfe der Gleichung

$$F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)_I \tag{7.6}$$

berechnet werden, wobei W die magnetische Energie des Systems und q_i die verallgemeinerte Koordinate bedeuten und die Ableitung bei festen Leiterströmen genommen wird. Die magnetische Energie wird wie im statischen Fall durch die Ströme und die Induktionskoeffizienten ausgedrückt [s. die Gleichungen (5.17), (5.20)].

Bei der Zeitmittelung der Produkte von Größen, die sich nach dem harmonischen Gesetz

$$a(t) = a_0 \, e^{-i\omega t}$$

ändern, kann man die Beziehungen

$$\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2} |a|^2, \quad \overline{a(t)\, b(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(a\, b^*) \tag{7.7}$$

benutzen. Zum Beispiel läßt sich die mittlere Wärmeabgabe in einem Stromkreis mit Hilfe der Gleichung

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V^{(e)} I^*) = \frac{1}{2} |I|^2 \operatorname{Re} Z \tag{7.8}$$

berechnen.

Aufgaben:

338. Eine kreisförmige Drahtschleife mit dem Radius a befinde sich in einem konstanten Magnetfeld H_0 und rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Durchmesser senkrecht zu H_0. Man bestimme die Stromstärke $I(t)$ in der Schleife sowie das Bremsmoment $N(t)$ und die mittlere Leistung $\overline{P}$, die zur Aufrechterhaltung der Rotation erforderlich ist.

339. Ein ebener Stromkreis mit den elektrischen Parametern R, L, C und der Fläche S rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω im konstanten Magnet-

feld H_0 um eine Achse, die in seiner Ebene liege und senkrecht auf H_0 stehe. Man bestimme das auf den Kreis wirkende mittlere Bremsmoment $\bar{N}$.

340. In einem von zwei induktiv gekoppelten Kreisen fließe der Strom $I(t) = I_0 \, e^{-i\omega t}$. Die Induktivitäten und Widerstände der Kreise seien vorgegeben. Man drücke die mittlere verallgemeinerte Wechselwirkungskraft zwischen den Kreisen durch die Ableitung des Wechselinduktionskoeffizienten nach der verallgemeinerten Koordinate q_i aus.

341. In einen von zwei gleichen Kreisen, von denen jeder den Widerstand R und die Induktivität L hat, sei die elektromotorische Kraft $V^{(e)}(t) = V_0^{(e)} \, e^{-i\omega t}$ eingeschaltet. Der Wechselinduktionskoeffizient der Kreise sei L_{12}. Man bestimme die mittlere Wechselwirkungskraft $\bar{F}$ zwischen den Kreisen und drücke sie durch die Ableitung des Wechselinduktionskoeffizienten nach der entsprechenden Koordinate aus.

342. Man bestimme die Eigenfrequenzen ω_1, ω_2 der elektrischen Schwingungen zweier Kreise (Abb. 17), die durch die Kapazität C miteinander gekoppelt sind $(Z = i/\omega C)$.
Hinweis: Man bilde das System algebraischer Gleichungen zur Bestimmung der Ströme und setze die Systemdeterminante Null.

343. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß die Kreise induktiv gekoppelt sind (s. Abb. 17, $Z = -i\,\omega L/c^2$).

344. Man bestimme die Eigenfrequenzen ω_1, ω_2 in zwei induktiv gekoppelten Kreisen mit den Kapazitäten C_1, C_2, den Induktivitäten L_1, L_2 und dem Wechselinduktionskoeffizienten L_{12}.

345. Zwei Kreise seien durch einen Wirkwiderstand miteinander gekoppelt (s. Abb. 17, $Z = R$). Man bestimme die Eigenfrequenzen der Schwingungen unter der Annahme, daß die Kopplung schwach ist $(R \gg 1)$.

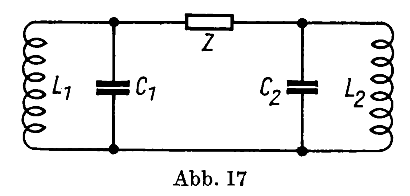


Abb. 17

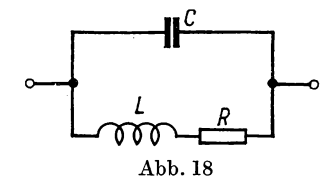


Abb. 18

346. In einen Kreis mit der Induktivität L_1, der Kapazität C_1 und dem Widerstand R_1 sei die äußere elektromotorische Kraft $V^{(e)}(t) = V_0^{(e)} \, e^{-i\omega t}$ eingeschaltet. Mit diesem Kreis sei ein zweiter induktiv gekoppelt, dessen Parameter L_2, C_2, R_2 seien. Der Wechselinduktionskoeffizient sei L_{12}. Man bestimme die Ströme I_1 und I_2 in beiden Kreisen. Insbesondere ist der Fall zu untersuchen, daß der zweite Kreis nur eine Induktivität enthält (d.h. $R_2 = 0$, $C_2 \to \infty$); wie groß ist die Frequenz ω, bei der der Strom I_2 maximal wird?

347. Man bestimme den komplexen Widerstand Z des in Abb. 18 dargestellten Teiles (Zweipol) eines Stromkreises.

348. Ein Kondensator enthalte Materie mit der Dielektrizitätskonstanten

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

(ionisiertes Gas, s. Aufgabe 312). Die Kapazität des leeren Kondensators sei C_0. Man zeige, daß der komplexe Widerstand des Teiles eines Stromkreises, der diesen Kondensator enthält, gleich dem Widerstand des in Abb. 18 gezeigten Zweipols ist, wenn seine Parameter in geeigneter Weise gewählt werden. Man bestimme R, L und C.

349. Man bestimme den mittleren Energieinhalt $\overline{W}$ und die Wärmeverluste Q je Zeiteinheit in dem in der vorigen Aufgabe beschriebenen Kondensator und drücke diese Größen durch die Spannung $U = U_0\, e^{-i\omega t}$ an den Kondensatorbelegungen aus.

350. Ein Kondensator sei mit einem Stoff mit der Dielektrizitätskonstanten

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}$$

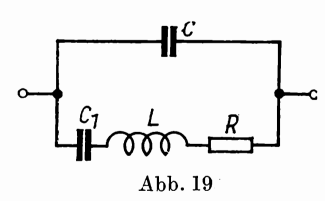


Abb. 19

gefüllt [Dielektrikum mit Verlusten, s. (6.12)]. Die Kapazität des dielektrikumfreien Kondensators sei C_0. Welche Parameter C, C_1, L, R muß der in Abb. 19 dargestellte Zweipol haben, damit sein Wechselstromwiderstand genauso groß ist wie der Widerstand des Kondensators?

351. Man berechne den mittleren Energievorrat $\overline{W}$ und die mittleren Wärmeverluste Q je Zeiteinheit in dem in der Aufgabe 350 betrachteten Kondensator. Die Spannung an den Belegungen sei $U = U_0\, e^{-i\omega t}$.

352. Ein Schwingkreis bestehe aus der Kapazität C und der Induktivität L. In einem bestimmten Zeitpunkt werde an die Kondensatorbelegungen eine Batterie mit der konstanten elektromotorischen Kraft $V^{(e)}$ und dem inneren Widerstand R angeschlossen. Wie hängt der Strom, der durch die Induktivität fließt, von der Zeit ab? Man untersuche die Abhängigkeit dieses Stromes von den Größen R, L und C.

353. Auf einen Stromkreis, der aus hintereinandergeschaltetem R und C besteht, werde der Rechteckspannungsimpuls

$$U_1(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq T, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0,\, t > T \end{cases}$$

gegeben. Man bestimme die Spannung $U_2(t)$ am Widerstand.

354. Auf einen Stromkreis, der aus hintereinandergeschaltetem R und L besteht, werde der Rechteckspannungsimpuls

$$U_1(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq T, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0,\, t > T \end{cases}$$

gegeben. Man bestimme die Spannung $U_2(t)$ an der Induktivität.

355. Ein Stromkreis bestehe aus einem Plattenkondensator mit der Kapazität C und einem Widerstand R (Abb. 20). Zwischen den Kondensatorplatten (Abstand h) soll ein Feld erzeugt werden, das in der Zeit T linear von Null auf E_0 anwächst und anschließend in der Zeit T linear wieder auf Null absinkt. Man bestimme die Form des Impulses, der dazu auf den Eingang des Kreises gegeben werden muß.

Abb. 20

356. In einen Stromkreis, der aus hintereinandergeschaltetem R und L besteht, werde im Zeitpunkt $t = 0$ die elektromotorische Kraft

$$V^{(e)}(t) = V_0^{(e)} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

eingeschaltet. Man berechne die Stromstärke $I(t)$ im Kreis. Bei welcher Phase φ_0 treten keine Einschwingerscheinungen auf?

357*. Eine künstliche lange Leitung (elektrische Kette) bestehe aus N gleichartigen Gliedern ($N \gg 1$) und sei an den Enden offen (Abb. 21). Man bestimme die Frequenzen der Eigenschwingungen dieses Systems.

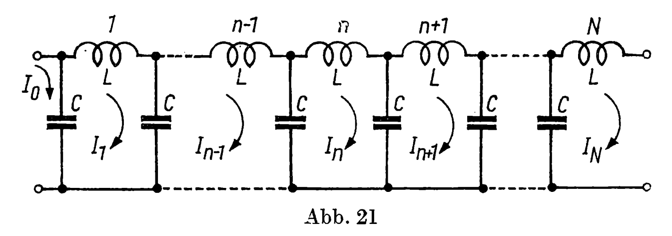


Abb. 21

358. Unter der Annahme, daß die Zahl der Eigenfrequenzen in der in Aufgabe 357 beschriebenen langen Leitung groß ist, bestimme man die Zahl Δr der Schwingungen im Frequenzintervall $\Delta\omega$.

359*. Eine lange Leitung, die aus $2N$ Gliedern abwechselnd mit den Parametern L_1, C und L_2, C besteht, sei an den Enden offen (Abb. 22). Man bestimme das Spektrum der Eigenschwingungen dieses Systems.

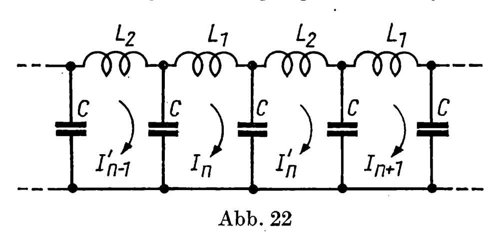


Abb. 22

360*. Eine lange Leitung (Abb. 23) bestehe aus N gleichartigen Gliedern mit den Impedanzen

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2} L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2} L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

An der Leitung liege die Spannung U_1, das Ende der Leitung sei offen. Man bestimme die Spannung U_2 zwischen den Punkten a und b.

Hinweis: Man setze die Lösung der Differenzengleichung für den Strom I_n im n-ten Glied der Leitung in der Form $I_n = \text{const} \cdot q^n$ an.

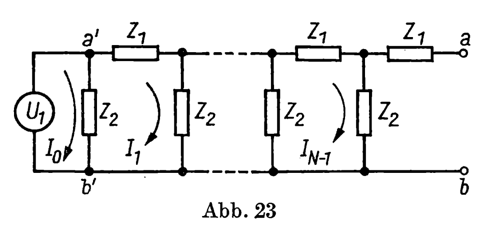


Abb. 23

361. Mit den Ergebnissen der vorigen Aufgabe bestimme man unter der Annahme $N \gg 1$ die Frequenzabhängigkeit des Übertragungskoeffizienten $K = U_2/U_1$. Man berechne das Frequenzintervall, in dem K merklich von Null verschieden ist.

362. Aus der Betrachtung einer langen Leitung mit diskreten Parametern (Aufgabe 357) bestimme man durch Grenzübergang die Differentialgleichung für den Strom in einer langen Leitung mit gleichförmig verteilten (stetigen) Parametern.

363. Eine ideale lange Leitung der Länge l mit verteilten Parametern sei an den Enden offen. Man bestimme das Spektrum der Eigenschwingungen dieses Systems und vergleiche es mit demjenigen des in der Aufgabe 357 untersuchten Systems mit diskreten Parametern.

364*. Eine elektromotorische Kraft, die in einen geschlossenen Kreis eingeschaltet wird, rufe in ihm den Strom $I(t) = I_0\, e^{-i\omega t}$ hervor. Man bestimme den allgemeinen Ausdruck für den komplexen Widerstand des Kreises, ohne die Retardierung innerhalb des Systems zu vernachlässigen.

365. Für einen Stromkreis in Form eines Kreises mit dem Radius a bestimme man die Korrektion an der Induktivität sowie den Widerstand $R_r(\omega)$ in der ersten nichtverschwindenden Näherung (s. die vorige Aufgabe). Man zeige, daß $R_r(\omega)$ gleich dem Proportionalitätsfaktor zwischen der mittleren, in der Zeiteinheit ausgestrahlten Energie und dem mittleren Quadrat der Stromstärke im Stromkreis ist.

7.2. Wirbelströme und Skineffekt

Befindet sich ein Leiter in einem äußeren Magnetfeld, das der Bedingung (7.1) der Quasistationarität genügt, so erfüllt das Feld in der Nähe des Leiters in jedem Zeitpunkt die magnetostatischen Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0 \tag{7.9}$$

und die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{7.10}$$

Innerhalb des Leiters wird das Feld bei genügend großer Leitfähigkeit σ ($\sigma/\omega \gg \varepsilon'$, wobei ε' den Realteil der Dielektrizitätskonstanten bedeutet) durch

die Gleichungen (7.10) und

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\,\mathfrak{E} \tag{7.11}$$

beschrieben. Aus (7.10) und (7.11) erhält man für die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ Gleichungen zweiter Ordnung, die im Falle eines homogenen Mediums die Form

$$\Delta\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi\,\mu\,\sigma}{c^2}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}, \qquad \Delta\,\mathfrak{E} = \frac{4\pi\,\mu\,\sigma}{c^2}\,\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} \tag{7.12}$$

haben.

An der Grenze zweier Leiter oder zwischen einem Leiter und einem Dielektrikum müssen die Feldvektoren den Bedingungen

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad H_{1t} = H_{2t}, \qquad E_{1t} = E_{2t} \tag{7.13}$$

genügen. Die Größe

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\,\mu\,\sigma\,\omega}}$$

(Dicke der Skinschicht) charakterisiert die Eindringtiefe des Feldes in den Leiter (ω bedeutet die Frequenz des Feldes). Bei starkem Skineffekt kann man als Näherung annehmen, daß die Eindringtiefe des Feldes in den Leiter gleich Null ist; dann gilt innerhalb des Leiters $\mathfrak{H} = 0$, während das Feld außerhalb des Leiters an seiner Oberfläche mit der Flächendichte $\mathfrak{i}$ des Stromes durch die Beziehung

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{i} \tag{7.14}$$

verknüpft ist.

Auf Grund der Wirbelströme, die sich in dem Leiter ausbilden, hat ein Leiter in einem Magnetfeld ein magnetisches Moment, selbst wenn für ihn $\mu = 1$ gilt. Zur Charakterisierung dieses magnetischen Momentes führt man mit Hilfe der Beziehungen

$$m_i = \beta_{ik} H_{0k} \tag{7.15}$$

den Tensor β_{ik} der magnetischen Polarisierbarkeit ein, wobei $\mathfrak{m}$ das magnetische Moment des Körpers und $\mathfrak{H}_0$ das periodische äußere Magnetfeld bedeuten. Der Tensor β_{ik} ist symmetrisch ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$), doch sind seine Komponenten im allgemeinen komplex und frequenzabhängig.

Die mittlere Wärmeabgabe je Zeiteinheit innerhalb des Leiters kann mit Hilfe der Beziehungen

$$Q = \int \overline{(\mathfrak{j}\,\mathfrak{E})}\,\mathrm{d}V = \int \sigma\overline{E^2}\,\mathrm{d}V \tag{7.16}$$

oder

$$Q = -\frac{c}{4\pi}\oint \overline{(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H})}\,\mathrm{d}\mathfrak{f} \tag{7.17}$$

berechnet werden.

In der ersten dieser Gleichungen wird über das Volumen und in der zweiten über die Oberfläche des Leiters integriert. Q kann auch durch den Imaginärteil des Tensors der magnetischen Polarisierbarkeit des Körpers ($\beta_{ik} = \beta'_{ik} + i\,\beta''_{ik}$) ausgedrückt werden:

$$Q = \frac{\omega}{2}\,\beta''_{ik}\,\mathrm{Re}\,(H_{0i}H^*_{0k}). \tag{7.18}$$

Die letzte Beziehung gilt nur bei harmonischer Zeitabhängigkeit des Feldes.

Aufgaben:

366. Eine große ebene Platte mit der Leitfähigkeit σ, der magnetischen Permeabilität μ und der Dicke $2h$ sei mit einem sehr dünnen Leiter umwickelt, durch den der Strom $I_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ fließt. Die Windungszahl je Längeneinheit sei n. Man bestimme den Realteil der Magnetfeldamplitude innerhalb der Platte unter Vernachlässigung des Randeffektes. Zu untersuchen sind die Grenzfälle eines starken ($\delta \ll h$) und schwachen Skineffektes ($\delta \gg h$).

367*. Ein unendlich langer Metallzylinder mit der Leitfähigkeit σ und der Permeabilität μ sei so angeordnet, daß seine Achse mit der einer unendlich langen Spule kreisförmigen Querschnitts zusammenfällt, durch die der Strom $I = I_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ fließt. Man berechne das Magnetfeld und das elektrische Feld im ganzen Raum sowie die Stromverteilung j im Zylinder; der Radius des Zylinders sei a, der der Spule b und die Windungszahl je Längeneinheit n.

368. Ein leitender Zylinder befinde sich in einem homogenen, zeitlich veränderlichen Magnetfeld $H = H_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$, das der Zylinderachse parallel sei. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorigen Aufgabe ist die Stromverteilung j innerhalb des Zylinders in den Grenzfällen kleiner und großer Frequenzen zu bestimmen.

369. Man bestimme die Wärmemenge Q, die in der Zeiteinheit von der Längeneinheit des in der Aufgabe 367 beschriebenen Zylinders abgegeben wird. Man untersuche die Grenzfälle kleiner und großer Frequenzen.

370. Wie groß ist die Polarisierbarkeit β (je Längeneinheit) eines Zylinders, der sich in einem veränderlichen, zur Zylinderachse parallelen Magnetfeld befindet? Die Frequenz des Feldes sei ω, der Zylinderradius a, die Leitfähigkeit σ und die Permeabilität $\mu = 1$. Man untersuche die Grenzfälle großer und kleiner Frequenzen.

371*. Ein Metallzylinder befinde sich in einem zur Zylinderachse parallelen äußeren homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Der Zylinder habe den Radius a, die Leitfähigkeit σ und die Permeabilität $\mu = 1$. Man bestimme das resultierende Feld und die Stromdichte $\mathfrak{j}$ im Zylinder.

Hinweis: Man drücke $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ aus und integriere die Differentialgleichung für $\mathfrak{A}$.

372. Man bestimme die Energiedissipation je Längeneinheit eines unendlich langen, in einem zur Zylinderachse transversalen Magnetfeld mit der Frequenz ω befindlichen leitenden Kreiszylinders.

373*. Ein unendlich langer Kreiszylinder mit dem Radius a und der Leitfähigkeit σ befinde sich in einem zur Zylinderachse transversalen Magnetfeld,

das zirkular polarisiert sei:

$$\mathfrak{H}_0(t) = (\mathfrak{H}_{01} + i\,\mathfrak{H}_{02})\,e^{-i\omega t}.$$

Dabei sind $\mathfrak{H}_{01}$ und $\mathfrak{H}_{02}$ orthogonale Vektoren gleicher Länge: $H_{01} = H_{02} = H_0$. (Der Vektor $\mathfrak{H}_0(t)$ beschreibt in der zur Zylinderachse senkrechten Ebene einen Kreis mit dem konstanten Radius H_0.) Man bestimme das mittlere Drehmoment $\overline{\mathfrak{N}}$, das an einer Längeneinheit des Zylinders angreift ($\mu = 1$).

374. Ein unendlich langer Zylinder befinde sich in einem statischen homogenen transversalen Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ und rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse. Man berechne das am Zylinder angreifende Bremsmoment $\overline{N}$ je Längeneinheit.

375*. Ein unendlich langer Metallzylinder mit dem Radius a, der Leitfähigkeit σ und der Permeabilität μ befinde sich in einem konstanten homogenen, zur Achse longitudinalen Magnetfeld H_0. Zu einer gewissen Zeit werde das äußere Feld ausgeschaltet. Wie hängt die Dämpfung des Magnetfeldes im Zylinder von der Zeit ab?

376. Eine Metallkugel mit dem Radius a, der Leitfähigkeit σ und der Permeabilität μ befinde sich im homogenen veränderlichen Magnetfeld $H_0(t) = H_0\,e^{-i\omega t}$. Unter der Annahme, daß die Frequenz klein ist, bestimme man in der ersten nichtverschwindenden Näherung die Verteilung der Wirbelströme in der Kugel und die mittlere von ihnen absorbierte Wärmemenge Q.

377. Eine Metallkugel befinde sich in einem homogenen Magnetfeld, das sich mit der Frequenz ω ändere. Man bestimme das resultierende Feld $\mathfrak{H}$ und die mittlere von der Kugel absorbierte Wärmemenge Q bei hohen Frequenzen. Die Kugel habe den Radius a, die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit σ.

Hinweis: Zur Berechnung des Feldes außerhalb der Kugel nehme man an, daß das Feld im Innern der Kugel Null ist (d.h., man vernachlässige die Eindringtiefe δ gegenüber dem Kugelradius a). Bei der Bestimmung des Feldes im Innern der Kugel kann ihre Oberfläche als eben angenommen werden.

378*. Ein leitendes Ellipsoid befinde sich in einem homogenen veränderlichen Magnetfeld. Man bestimme die magnetische Polarisierbarkeit des Ellipsoids bei starkem Skineffekt (d.h. unter der Voraussetzung, daß die Eindringtiefe des Feldes im Leiter Null ist). Man untersuche die Grenzfälle einer dünnen Kreisscheibe und eines langen dünnen Stabes.

379*. Eine Kugel mit dem Radius a und der Leitfähigkeit σ befinde sich im homogenen Magnetfeld $H(t) = H_0\,e^{-i\omega t}$. Man berechne das resultierende Magnetfeld und die Verteilung der Wirbelströme in der Kugel für den allgemeinen Fall beliebiger Frequenzen. Man zeige, daß sich in den Grenzfällen eines schwachen bzw. starken Skineffektes die Resultate der Aufgaben 376 und 377 ergeben (der Einfachheit halber wird $\mu = 1$ angenommen).

380. Man berechne die mittlere Wärmemenge Q, die durch eine leitende Kugel in einem zeitlich veränderlichen homogenen Magnetfeld bei beliebigen Frequenzen absorbiert wird.

381. Wie groß ist der Wirkwiderstand R eines dünnen zylinderförmigen Leiters beim Skineffekt? Der Leiter habe die Länge l, den Radius a, die Leitfähigkeit σ und die Permeabilität $\mu = 1$. Man untersuche die Grenzfälle kleiner und großer Frequenzen.

382. Auf die Oberfläche eines zylinderförmigen Leiters mit dem Radius a und der spezifischen Leitfähigkeit σ_1 sei eine Schicht aus einem anderen Metall aufgetragen. Die Dicke der Schicht sei $h \ll a$, ihre Leitfähigkeit σ_2. Man berechne den Wirkwiderstand R dieses Leiters gegenüber einem Wechselstrom unter der Annahme, daß die Dicke der Skinschicht klein gegen a ist $(\mu = 1)$.

383. Ein unendlich langer Hohlzylinder mit dem Innenradius a und der Wanddicke h $(h \ll a)$ befinde sich in einem homogenen longitudinalen Magnetfeld $H_0(t) = H_0\, e^{-i\omega t}$. Man bestimme die Amplitude H' des Magnetfeldes im Hohlraum und untersuche ihre Abhängigkeit von ω.

Hinweis: Wegen $h \ll a$ kann man den Mantel bei der Bestimmung des Feldes in seiner Tiefe als eben annehmen.

384. Der Wechselstrom $I(t) = I_0\, e^{-i\omega t}$ fließe durch einen hohlzylinderförmigen Leiter mit dem mittleren Radius a, der Leitfähigkeit σ, der Permeabilität μ und der Dicke $h \ll a$. Man bestimme die Stromverteilung j über den Querschnitt und den Wirkwiderstand R je Längeneinheit. Unter welcher Bedingung ist der Widerstand des Hohlleiters wenig von dem eines vollen Leiters mit demselben Radius verschieden?

Hinweis: Die Krümmung der Leiteroberfläche ist zu vernachlässigen.

385*. Im Innern eines Metallrohres fließe im Abstand l von seiner Achsenlinie der geradlinige Strom I. Das Metallrohr habe den Radius a, die Wanddicke $h \ll a$ und die Leitfähigkeit σ der Wand $(\mu = 1)$. Sowohl der Strom I als auch der Abstand l hängen nach einem beliebigen Gesetz von der Zeit ab, jedoch so, daß zu allen Zeiten $l \ll a$ gilt. Unter der Annahme, daß die Bedingung für die Quasistationarität erfüllt ist, bestimme man die Kraft f je Längeneinheit, die die im Zylindermantel induzierten Wirbelströme auf den Strom I ausüben, für den Fall eines schwachen Skineffektes $(h \ll \delta)$.

386*. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall eines starken Skineffektes $(h \gg \delta)$.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[15] Brillouin, L., und M. Parodi: Propagation des ondes dans les milieux périodiques. Dunod, Paris 1956.

[26] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[51] Kontorowitsch, M. I.: Operatorenrechnung und nichtstationäre Erscheinungen in elektrischen Ketten. Gostechisdat, Moskau 1955 (*М. И. Конторович:* Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях).

[55] Landau, L. D., und E. M. Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).
[70] Ramo, S., und J. R. Whinnery: Felder und Wellen in der modernen Funktechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1960 (Übers. aus dem Amer.).
[78] Smythe, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.
[83] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.
[84] Tamm, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).
[88] Wainschtein, L. A.: Elektromagnetische Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1957 (*Л. А. Вайнштейн:* Электромагнитные волны).
[89] Wlassow, A. A.: Makroskopische Elektrodynamik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*А. А. Власов:* Макроскопическая электродинамика).

8. AUSBREITUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

8.1. Ebene Wellen im homogenen Medium. Reflexion und Brechung von Wellen. Wellenpakete

In einem dielektrischen Medium ohne Ladungen und Ströme genügen die Vektoren des elektromagnetischen Feldes den Gleichungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{8.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}, \tag{8.2}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0, \tag{8.3}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0. \tag{8.4}$$

In einem nichtdispergierenden Medium hängen die Feldvektoren durch die Beziehungen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H} \tag{8.5}$$

miteinander zusammen, wobei ε die Dielektrizitätskonstante und μ die Permeabilität sind. Sind die Verluste elektromagnetischer Energie vernachlässigbar klein, so sind ε und μ reelle Größen. Im Falle eines homogenen Mediums erhält man aus (8.1) bis (8.5) für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta\,\mathfrak{E} - \frac{1}{v_\varphi^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \Delta\,\mathfrak{H} - \frac{1}{v_\varphi^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{8.6}$$

Dabei bedeutet $v_\varphi = c/\sqrt{\varepsilon\,\mu}$ die Phasengeschwindigkeit.

Im allgemeinen Fall gelten die Beziehungen (8.5) nur für die monochromatischen Feldkomponenten, wobei ε und μ von der Frequenz abhängen (Dispersion) und komplex sind. Die Imaginärteile von ε und μ bestimmen die Dissipation elektromagnetischer Energie im Medium.

In einem leitenden Medium wird bei genügend langsamer Änderung des Feldes, bei der zwischen dem Strom und dem elektrischen Feld ein Zusammenhang der Form $\mathfrak{j} = \sigma\,\mathfrak{E}$ mit dem statischen Wert der Leitfähigkeit σ besteht, die Gleichung (8.2) durch die Beziehung

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} \tag{8.7}$$

ersetzt, die auf die Form (8.2) gebracht werden kann, indem man die komplexe Dielektrizitätskonstante einführt, die bei kleinen Frequenzen

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\,\frac{4\pi\,\sigma}{\omega} \tag{8.8}$$

ist, wobei ε' und σ die statischen Werte der Dielektrizitätskonstanten und der Leitfähigkeit bedeuten. Bei hohen Frequenzen ist die Dielektrizitätskonstante eines Mediums eine komplexe Größe, die von der Frequenz abhängt.

Für gute Leiter (Metalle) ist der zweite Term in (8.8) sehr groß, so daß bei kleinen Frequenzen die Beziehung

$$\varepsilon(\omega) = i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{8.9}$$

gilt.

Hat das Feld eine solche Frequenz, daß die Eindringtiefe in das Metall klein gegen den Krümmungsradius der Metalloberfläche und die Wellenlänge im Raum ist, der das Metall umgibt, so kann man bei beliebigem Feld außerhalb des Leiters annehmen, daß die Tangentialkomponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Nähe der Leiteroberfläche durch die Beziehung

$$\mathfrak{E}_t = \zeta\,\mathfrak{H}_t \times \mathfrak{n} \tag{8.10}$$

miteinander zusammenhängen. Dabei bedeuten $\mathfrak{n}$ den normal zur Oberfläche in den Leiter hinein gerichteten Einheitsvektor und ζ die Oberflächenimpedanz des Metalls. ζ hängt von der Frequenz des Feldes ab und wird durch die Eigenschaften des Metalls bestimmt:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,. \tag{8.11}$$

Die Gleichung (8.10) gilt nur für $|\zeta| \ll 1$; man kann sie bei der Bestimmung des Feldes außerhalb des Leiters als Grenzbedingung benutzen (genäherte Grenzbedingung von LEONTOWITSCH).

Ist das Medium inhomogen, jedoch $\mu = 1$, so genügt ein harmonisch von der Zeit abhängiges Feld der Gleichung

$$\Delta\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon\,\omega^2}{c^2}\,\mathfrak{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0\,. \tag{8.12}$$

$\mathfrak{H}$ ist über die MAXWELLsche Gleichung (8.1) mit $\mathfrak{E}$ verknüpft.

Eine monochromatische ebene Welle, die sich in Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}$ ausbreitet ($k = 2\pi/\lambda$, λ ist die Wellenlänge), wird durch die Funktion

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\,e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)} \tag{8.13}$$

beschrieben. Die Amplitude $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}' + i\,\mathfrak{E}''$ ist im allgemeinen ein komplexer Vektor senkrecht zu $\mathfrak{k}$ (Transversalität der Welle). Je nach Größe und Richtung der Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ ist die Welle linear, zirkular oder elliptisch polarisiert.

Neben monochromatischen hat man es häufig mit „fastmonochromatischen" Wellen zu tun, die eine Superposition monochromatischer Wellen darstellen, deren Frequenzen alle in einem kleinen Frequenzintervall $\Delta\omega$ liegen. Solche Wellen werden (in einem vorgegebenen Raumpunkt) durch Funktionen der Form $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0(t)\,e^{-i\omega t}$ beschrieben, wobei ω eine mittlere Frequenz im Intervall $\Delta\omega$ und $\mathfrak{E}_0(t)$ eine Funktion der Zeit bedeuten, die sich wesentlich langsamer ändert als $e^{-i\omega t}$. Solche Wellen sind teilweise polarisiert. Man kann

sie durch den Polarisationstensor

$$I_{ik} = \overline{E_{0i} E_{0k}^*} \tag{8.14}$$

charakterisieren, wobei über die Zeit gemittelt wird. Der Polarisationstensor ist hermitesch: $I_{ik} = I_{ki}^*$, und kann in der Form

$$I_{ik} = I_1 e_i^{(1)} e_k^{(1)*} + I_2 e_i^{(2)} e_k^{(2)*} \tag{8.15}$$

dargestellt werden. Dabei bedeuten I_1 und I_2 positive Größen und $\mathrm{e}^{(1)}$, $\mathrm{e}^{(2)}$ komplexe Vektoren, die zueinander orthogonal sind und der Normierungsbedingung $\mathrm{e}^{(i)} \mathrm{e}^{(k)} = \delta_{ik}$ genügen. I_i und $\mathrm{e}^{(i)}$ lassen sich aus den Gleichungen

$$I_{lk} e_k = I e_l \tag{8.16}$$

bestimmen.

Aus (8.16) folgt, daß eine teilweise polarisierte Welle stets als inkohärente[1]) Superposition zweier elliptisch polarisierter Grundwellen dargestellt werden kann. Form und Orientierung der Polarisationsellipsen dieser Wellen werden durch die Vektoren $\mathrm{e}^{(1)}$ und $\mathrm{e}^{(2)}$ beschrieben. Die Ellipsen der beiden Grundwellen sind einander ähnlich, und ihre entsprechenden Achsen stehen aufeinander senkrecht. I_1 und I_2 sind die Intensitäten der Grundwellen.

Das Verhältnis

$$\varrho = \frac{I_2}{I_1} \qquad (I_2 \leqq I_1) \tag{8.17}$$

bezeichnet man als Depolarisationsgrad der Welle. Für eine vollständig polarisierte Welle gilt $\varrho = 0$, für eine nichtpolarisierte Welle $\varrho = 1$, $I_1 = I_2 = I$. Der Polarisationstensor hat in diesem Fall die Form $I_{ik} = I\,\delta_{ik}$.

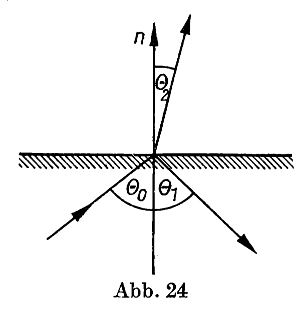


Abb. 24

Trifft eine ebene Welle auf die Trennebene zweier Medien, so sind die Winkel Θ_0, Θ_1 und Θ_2 (Richtung der einfallenden, reflektierten bzw. gebrochenen Welle) durch die Beziehungen

$$\Theta_1 = \Theta_0, \quad \frac{\sin\Theta_2}{\sin\Theta_0} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_i = \sqrt{\varepsilon_i} \tag{8.18}$$

miteinander verknüpft (s. Abb. 24). Dabei bedeuten n_1 und n_2 den Brechungsindex des ersten bzw. zweiten Mediums (es sei $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Die Amplituden der reflektierten Welle (E_1, H_1) und der gebrochenen Welle (E_2, H_2) werden mit Hilfe der FRESNELschen Formeln durch die Amplituden E_0, H_0 der einfallenden Welle ausgedrückt.

a) Ist E_0 normal zur Einfallsebene, so gilt

$$E_1 = \frac{\sin(\Theta_2 - \Theta_0)}{\sin(\Theta_2 + \Theta_0)} E_0, \quad E_2 = \frac{2\cos\Theta_0 \sin\Theta_2}{\sin(\Theta_2 + \Theta_0)} E_0. \tag{8.19}$$

---

[1]) Als inkohärent bezeichnet man Schwingungen, deren Phasendifferenz sich ungeordnet ändert.

b) Ist H_0 normal zur Einfallsebene, so gilt

$$H_1 = \frac{\tan(\Theta_0 - \Theta_2)}{\tan(\Theta_0 + \Theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\Theta_0}{\sin(\Theta_0 + \Theta_2)\cos(\Theta_0 - \Theta_2)} H_0. \quad (8.20)$$

Der Winkel Θ_2 wird mit Hilfe der Gleichungen (8.18) durch die Dielektrizitätskonstante des Mediums ausgedrückt. Die Relationen (8.18) bis (8.20) bleiben auch bei komplexem ε_2 bestehen, wobei der Winkel Θ_2 ebenfalls komplex wird und keine einfache geometrische Bedeutung mehr besitzt. Der Fall des komplexen Θ_2 wird in der Aufgabe 404 betrachtet.

Als Reflexionskoeffizienten R bezeichnet man das Verhältnis des (bezüglich der Zeit) mittleren Energieflusses der reflektierten Welle zum mittleren auf die Oberfläche auftreffenden Energiefluß.

Eine Superposition monochromatischer ebener Wellen mit verschiedenen Wellenvektoren und Frequenzen bezeichnet man als Wellengruppe oder Wellenpaket:

$$\Psi(\mathfrak{r}, t) = \int \psi(\mathfrak{k})\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}\, dk_x\, dk_y\, dk_z. \quad (8.21)$$

Dabei ist $\Psi(\mathfrak{r}, t)$ eine beliebige kartesische Komponente des Vektors $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$. Die Funktion $\psi(\mathfrak{k})$, die den Anteil der einzelnen ebenen Wellen an der Superposition charakterisiert, bezeichnet man als Amplitudenfunktion. Das Maximum der Amplitude eines Wellenpaketes verschiebt sich im Raum mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = d\omega/dk$.

Aufgaben:

387. Längs der z-Achse breiten sich zwei linear polarisierte ebene monochromatische Wellen derselben Frequenz aus. Die erste Welle sei in x-Richtung polarisiert und habe die Amplitude a, die zweite sei in y-Richtung polarisiert, habe die Amplitude b und sei gegenüber der ersten um die Phase χ verzögert. Man bestimme die Polarisation der resultierenden Welle.

388. Man untersuche in der vorigen Aufgabe die Abhängigkeit der Polarisation von der Phasenverschiebung χ für den Fall $a = b$.

389. Zwei sich in derselben Richtung ausbreitende monochromatische Wellen gleicher Frequenz und Phase seien mit entgegengesetztem Drehsinn zirkular polarisiert. Die Amplitude sei a für die rechtspolarisierte und b für die linkspolarisierte Welle. Wie hängt die Polarisation vom Verhältnis a/b ab (a und b können als reell angenommen werden)?

390*. Eine elektromagnetische Welle sei eine Superposition zweier inkohärenter „fastmonochromatischer" Wellen gleicher Intensität I mit angenähert gleichen Frequenzen und Wellenvektoren. Beide Wellen seien linear polarisiert, und die Polarisationsrichtungen seien in der auf den Wellenvektoren senkrecht stehenden Ebene durch die Einheitsvektoren $e^{(1)}(1, 0)$ und $e^{(2)}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ gegeben. Man bestimme den Polarisationstensor I_{ik} der resultierenden Welle und ihren Depolarisationsgrad.

391. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß die Intensitäten der Wellen verschieden sind ($I_1 \neq I_2$) und die Polarisationsrichtungen den Winkel $\pi/4$ bilden.

392. Der Polarisationstensor einer elektromagnetischen Welle ist hermitesch und kann in der Form

$$I_{ik} = \frac{1}{2} I\left(\delta_{ik} + \sum_{l=1}^{3} \xi_l \tau_{ik}^{(l)}\right) = \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\,\xi_2 \\ \xi_1 + i\,\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, wobei I die Gesamtintensität der Welle, ξ_i reelle Parameter, die der Bedingung

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leqq 1$$

genügen (STOKESsche Parameter), und $\boldsymbol{\tau}^{(l)}$ die Matrizen

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bedeuten. Man gebe die physikalische Bedeutung der Parameter ξ_i an. Dazu ist der Depolarisationsgrad ϱ der Welle durch ξ_i auszudrücken und die Polarisation der beiden Grundwellen, in die die teilweise polarisierte Welle zerfällt, in den folgenden drei Fällen zu bestimmen:

a) $\xi_1 \neq 0, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0;$

b) $\xi_2 \neq 0, \quad \xi_1 = \xi_3 = 0;$

c) $\xi_3 \neq 0, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0.$

393. In einer ebenen inhomogenen[1]) Welle sei der Vektor $\mathfrak{E}$ des elektrischen Feldes linear polarisiert. Man bestimme die gegenseitige Lage der Vektoren $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}''$ ($\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ sind Real- und Imaginärteil der komplexen Amplitude $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{k}''$ Real- und Imaginärteil des Wellenvektors $\mathfrak{k}$). Welche Kurve beschreibt die Spitze des Vektors $\mathfrak{H}$ in einem festen Raumpunkt?

Man löse die Aufgabe auch für den Fall, daß der Vektor $\mathfrak{H}$ linear polarisiert ist.

394. Eine zirkular polarisierte ebene monochromatische Welle treffe schräg auf die Grenzebene eines Dielektrikums. Man bestimme die Polarisation der reflektierten und der gebrochenen Welle.

395*. Ein unpolarisiertes fastmonochromatisches Lichtbündel treffe auf die Grenzebene eines Dielektrikums. Man bestimme die Polarisationstensoren $I_{ik}^{(1)}$, $I_{ik}^{(2)}$ und die Depolarisationskoeffizienten ϱ_1, ϱ_2 des reflektierten und des gebrochenen Lichtes.

396. Ein unpolarisiertes fastmonochromatisches Lichtbündel treffe auf die Grenzebene eines Dielektrikums. Man bestimme den Reflexionskoeffizienten R und die Depolarisationskoeffizienten ϱ_1, ϱ_2 des reflektierten und des gebrochenen Lichtes, wenn der Einfallswinkel gleich dem BREWSTERschen Winkel ist.

---

[1]) Als inhomogen bezeichnet man eine Welle, für die der Real- und der Imaginärteil $\mathfrak{k}'$ bzw. $\mathfrak{k}''$ des komplexen Wellenvektors $\mathfrak{k}$ verschiedene Richtungen haben.

397. Man leite die FRESNELschen Formeln für den Fall ab, daß eine elektromagnetische Welle aus dem Vakuum auf die Grenzebene eines leitenden Mediums mit kleiner Oberflächenimpedanz ζ trifft.

398. Man bestimme den Reflexionskoeffizienten R an einer Metalloberfläche mit kleiner Oberflächenimpedanz $\zeta = \zeta' + i\,\zeta''$. Bei welchen Einfallswinkeln Θ_0 ist R minimal?

399. Eine linear polarisierte Welle treffe auf die Grenzebene eines leitenden Mediums mit kleiner Oberflächenimpedanz ζ. Man bestimme die Polarisation der reflektierten Welle, wenn der Neigungswinkel der einfallenden Welle gleich dem in der vorigen Aufgabe bestimmten Winkel Φ_0 ist.

400. Eine linear polarisierte Welle treffe unter dem Winkel Θ_0 auf die Oberfläche eines Metalls. Ihre Polarisationsrichtung bilde mit der Einfallsebene den Winkel $\pi/4$. Experimentell wurden das Verhältnis $E_{\|1}/E_{\perp 1} = \tan\varrho$ der (bezüglich der Einfallsebene) transversalen und longitudinalen Komponenten der reflektierten Welle und die Phasenverschiebung

$$\frac{E_{\|1}}{E_{\perp 1}} = \tan\varrho\, e^{i\delta}$$

zwischen ihnen bestimmt.

Man drücke den Realteil n' des Brechungsindex und den Absorptionskoeffizienten n'' unter der Voraussetzung $|n'^2 - n''^2| \gg \sin^2\Theta_0$ durch ϱ, δ und Θ_0 aus ($n' + i\,n'' = 1/\zeta$ mit $\zeta =$ Oberflächenimpedanz).

401. Man bestimme den Reflexionskoeffizienten R an der Grenzebene eines Leiters bei senkrechtem Einfall im Grenzfall kleiner Leitfähigkeit [s. Gleichung (8.8)].

402*. Man zeige, daß eine linear polarisierte Welle durch Totalreflexion an der Grenze eines Dielektrikums im allgemeinen zu einer elliptisch polarisierten Welle wird. Unter welchen Bedingungen ergibt sich zirkulare Polarisation?

403. Man untersuche die Bewegung der Energie bei vollständiger innerer Reflexion. Wie groß ist der Energiefluß entlang der Grenzfläche und senkrecht dazu in dem Medium, an dem die Reflexion erfolgt? Man bestimme die Linien des POYNTINGschen Vektors $\mathfrak{S}$.

404*. Eine elektromagnetische Welle treffe unter einem schiefen Winkel aus einem Dielektrikum auf die Grenzebene eines leitenden Mediums. Man berechne Ausbreitungsrichtung, Dämpfung und Phasengeschwindigkeit v_φ der Welle im leitenden Medium.

405*. Eine durch die Ebenen $z = 0$ und $z = a$ begrenzte dielektrische Schicht mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2 trenne zwei dielektrische Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). Senkrecht zur Oberfläche der Schicht treffe eine aus dem Gebiet $z < 0$ kommende elektromagnetische Welle auf. Bei welcher Schichtdicke ist die Reflexion minimal? Bei welchem Verhältnis zwischen ε_1, ε_2 und ε_3 findet keine Reflexion statt?

406*. Eine ebene Welle treffe aus dem Vakuum senkrecht auf die Oberfläche eines Dielektrikums. Welchen Einfluß hat die Verwaschung der Grenzfläche auf den Reflexionskoeffizienten? Zur Untersuchung dieser Frage approximiere

man die Dielektrizitätskonstante durch die Funktion

$$\varepsilon(z) = \varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{e^{z/a}+1}, \qquad \varepsilon = 1 + \Delta\varepsilon,$$

wobei ε und $\Delta\varepsilon$ Konstanten sind. Man untersuche die Spezialfälle großer und kleiner a.

Hinweis: In der Differentialgleichung für $E(z)$ [s. (8.12)] ist die unabhängige Variable $\xi = -\exp(-z/a)$ und $E(\xi) = \xi^{-ika}\,\psi(\xi)$ zu setzen, wobei $\psi(\xi)$ der hypergeometrischen Gleichung genügt (s. [72], 7.251).

407*. Bei fehlender Absorption ist die Dielektrizitätskonstante eines Plasmas

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\,\omega^2}$$

(s. Aufgabe 312). Man untersuche die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in einem Plasma, dessen Konzentration sich nach dem Gesetz $N(z) = N_0 z$ linear ändert. Auf die inhomogene Plasmaschicht treffe eine ebene monochromatische Welle senkrecht auf. (Dieser Fall kann z.B. bei der Ausbreitung von Funkwellen in der Ionosphäre vorliegen.)

Hinweis: Die Gleichung für $E(z)$ ist durch Entwicklung der gesuchten Funktion als Fourier-Integral zu lösen.

408. Man konstruiere ein eindimensionales Wellenpaket Ψ für den Zeitpunkt $t = 0$, indem man als Amplitudenfunktion die Gausssche Kurve

$$a(k) = a_0\,e^{-[(k-k_0)/\Delta k]^2}$$

benutzt, wobei a_0, k_0 und Δk Konstanten sind. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Breite Δx des Wellenpaketes und dem Bereich Δk der Wellenzahlen, die den Hauptbeitrag zur Superposition liefern?

409. Das Wellenpaket Ψ werde durch Superposition ebener Wellen mit verschiedenen Frequenzen gebildet. Die Amplitudenfunktion habe die Form einer Gauss-Kurve:

$$a(\omega) = a_0\,e^{-[(\omega-\omega_0)/\Delta\omega]^2},$$

wobei a_0, ω_0 und $\Delta\omega$ Konstanten sind. Man bestimme die Zeitabhängigkeit der Amplitude des Paketes für $x = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Dauer Δt des Wellenimpulses und dem Frequenzintervall $\Delta\omega$?

410. Ein Objekt werde mit Licht der Wellenlänge λ beleuchtet und unter dem Mikroskop betrachtet. Man bestimme die kleinstmögliche Abmessung $\Delta x_{\min}$ des Objektes, die mit der Bedingung $\Delta x\,\Delta k \geqq 1$ verträglich ist.

411. Die Lage eines Objektes werde durch Funkortung bestimmt. Mit welcher maximalen Genauigkeit kann die Messung vorgenommen werden, wenn l der Abstand zum Objekt und λ die Wellenlänge sind?

412. Man bestimme Form und Bewegung eines Wellenpaketes, das sich durch Überlagerung ebener Wellen mit den Amplituden a_0 und den Wellenvektoren $|\mathfrak{k}_0 - \mathfrak{k}| \leqq q$ ergibt ($\mathfrak{k}_0$ und q sind Konstanten). An Stelle des tat-

sächlichen Dispersionsgesetzes ist die genähert gültige Beziehung

$$\omega(\mathfrak{k}) = \omega(\mathfrak{k}_0) + \left.\frac{d\omega}{d\mathfrak{k}}\right|_0 (\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)$$

zu benutzen.

413*. Man untersuche das „Zerfließen" eines eindimensionalen Wellenpaketes in einem dispergierenden Medium. Dazu ist die Amplitudenfunktion als GAUSS-Kurve $a(k) = a_0 \, e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ zu wählen und in der Entwicklung der Frequenz ω nach Potenzen von k der quadratische Term zu berücksichtigen.

414. Man bestimme die Phasengeschwindigkeit v_φ und die Gruppengeschwindigkeit v_g der Ausbreitung in einem Medium, dessen Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ist [s. (6.12)]. Man beschränke sich auf die Fälle (bezüglich ω_0) großer und kleiner Frequenzen ω ($\mu = 1$).

415. Man bestimme die Geschwindigkeit der Energieübertragung durch ein eindimensionales Wellenpaket, das sich in einem dispergierenden Medium bewegt, und zeige, daß sie mit der Gruppengeschwindigkeit v_g übereinstimmt.

Hinweis: Die Geschwindigkeit v der Energieübertragung wird durch die Beziehung $\bar{S} = v\,\bar{w}$ bestimmt, wobei

$$\bar{w} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\,\varepsilon)}{d\omega} E E^* + \frac{d(\omega\,\mu)}{d\omega} H H^*\right]$$

die mittlere Energiedichte im dispergierenden Medium [55] und $\bar{\mathfrak{S}}$ die mittlere Energiestromdichte bedeuten.

8.2. Streuung elektromagnetischer Wellen an makroskopischen Körpern. Beugung

Die exakte Lösung des Beugungsproblems einer elektromagnetischen Welle an einem leitenden oder dielektrischen Körper führt auf eine Integration der MAXWELLschen Gleichungen bei den entsprechenden Grenzbedingungen, die nur in wenigen Fällen möglich ist (siehe z.B. die Aufgaben 418, 423). In einer Reihe von Fällen kann eine Näherungslösung gefunden werden.

Sind die linearen Abmessungen eines Körpers klein gegen die Wellenlänge, so kann man das elektromagnetische Feld in der Nähe des Körpers als homogen annehmen. Ein Körper, der sich in einem homogenen periodischen Feld befindet, erhält ein elektrisches und ein magnetisches Moment, die nach demselben Gesetz wie das äußere Feld von der Zeit abhängen.

Eine gestreute Welle entsteht infolge von Strahlungsemission durch diese veränderlichen Momente. Das Problem der Streuung elektromagnetischer Wellen an einem Körper kleiner Abmessungen führt auf die Bestimmung der Dipolmomente, die der Körper erhält. Die Strahlungsfelder werden mit Hilfe der Gleichungen (12.17) und (12.20) durch die Dipolmomente ausgedrückt.

Als differentiellen Streuquerschnitt in das Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ bezeichnet man das Verhältnis

$$\mathrm{d}\sigma_s = \frac{\mathrm{d}I(\vartheta, \alpha)}{\bar{S}_0}. \tag{8.22}$$

Dabei bedeuten $\mathrm{d}I = \bar{S}\,\mathrm{d}f = \bar{S}\,r^2\,\mathrm{d}\Omega$ die im Zeitmittel in das Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ gestrahlte Intensität und $\bar{S}$ bzw. $\bar{S}_0$ die mittlere Energiestromdichte der gestreuten bzw. einfallenden Welle. Die Energiestromdichte wird durch den POYNTINGschen Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \tag{8.23}$$

beschrieben.

Unter dem Absorptionsquerschnitt versteht man das Verhältnis der mittleren Energie, die der Körper je Zeiteinheit absorbiert, zur mittleren Energiestromdichte in der einfallenden Welle:

$$\sigma_a = \frac{Q}{\bar{S}_0}. \tag{8.24}$$

Im entgegengesetzten Grenzfall, in dem die Wellenlänge klein gegen die Abmessungen des Körpers ist, können die Methoden der geometrischen Optik angewandt werden. Bei der Beugung an einer kleinen Öffnung in einem unendlich großen, undurchsichtigen Schirm wird die Amplitude des Beugungsfeldes in der Näherung der geometrischen Optik durch die Relation

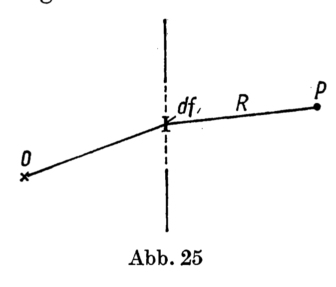


Abb. 25

$$u_P = \frac{k}{2\pi i}\int \frac{u}{R}\,\mathrm{e}^{ikR}\,\mathrm{d}f_n \tag{8.25}$$

beschrieben, die aus dem HUYGENSschen Prinzip abgeleitet werden kann. Dabei bedeuten u_P das Feld im Punkt P hinter dem Schirm (Abb. 25), u das Feld im Flächenelement $\mathrm{d}f$ der Öffnung (dieses Feld wird genauso wie bei fehlendem Schirm als nicht verzerrt angenommen), $\mathrm{d}f_n$ die Projektion des Flächenelementes $\mathrm{d}\mathfrak{f}$ der Öffnung auf die Strahlrichtung vom Punkt O nach $\mathrm{d}f$, R den Abstand zwischen $\mathrm{d}f$ und P und k den Betrag des Wellenvektors der Lichtwelle.

Lichtquelle O und Aufpunkt P können sich sowohl in endlichem als auch in unendlich großem Abstand vom Schirm befinden. Wenn die Punkte O und P oder einer von beiden endlichen Abstand vom Schirm haben, spricht man von FRESNELscher Beugung.

Sind die beiden Punkte O und P sehr weit vom Schirm entfernt, so kann man die Lichtstrahlen von der Quelle zur Öffnung und von der Öffnung zum Aufpunkt als parallel ansehen. In diesem Fall, der als FRAUNHOFERsche Beugung bezeichnet wird, kann die Gleichung (8.25) einfacher geschrieben werden:

$$u_P = \frac{u_0\,\mathrm{e}^{ikR_0}}{2\pi i R_0}\int \mathrm{e}^{i(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\mathfrak{r}}\,\mathrm{d}f_n. \tag{8.26}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ die Wellenvektoren des einfallenden bzw. gebeugten Lichtes, R_0 den Abstand zwischen Öffnung und Aufpunkt und u_0 die Amplitude des Feldes an der Öffnung.

Die Intensität des gebeugten Lichtes ist dem Quadrat $|u_P|^2$ des Betrages von u_P proportional.

Für komplementäre Schirme[1]) gilt das BABINETsche Prinzip [81]: Sind u_1 und u_2 die zwei komplementären Schirmen entsprechenden Wellenfelder in einem Punkt und ist u das nichtverzerrte Wellenfeld in demselben Punkt bei fehlenden Schirmen, so gilt

$$u_1 + u_2 = u. \tag{8.27}$$

Die Formeln (8.25) und (8.26) lassen die Polarisation der elektromagnetischen Wellen unberücksichtigt (die Amplitude u wird nicht als vektorielle, sondern als skalare Größe angenommen). Unter Berücksichtigung der vektoriellen Natur des elektromagnetischen Feldes erhält man die Beugungsformel

$$\mathfrak{E}_P = -\frac{i\,k}{4\pi R} \int \{\mathfrak{n}_0 \times \mathfrak{H} - \mathfrak{n}[\mathfrak{n}(\mathfrak{n}_0 \times \mathfrak{H})] + \mathfrak{n} \times (\mathfrak{n}_0 \times \mathfrak{E})\}\, e^{ikr}\, df. \tag{8.28}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Werte der Felder auf der Öffnung, $\mathfrak{E}_P$ das elektrische Feld in großem Abstand vom Schirm (in der Wellenzone), $\mathfrak{n}$ einen Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung der gebeugten Welle, $\mathfrak{n}_0$ den zum Aufpunkt hin gerichteten Normaleneinheitsvektor der Öffnung, r den Abstand zwischen df und dem Aufpunkt und R den Abstand des Koordinatenursprungs (der in die Öffnung gelegt wird) vom Aufpunkt.

Das Magnetfeld in der Wellenzone wird mit Hilfe der üblichen Beziehung

$$\mathfrak{H}_P = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_P$$

durch das elektrische Feld ausgedrückt.

Aufgaben:

416*. Auf einen unendlich langen, ideal leitenden Kreiszylinder mit dem Radius a, der sich im Vakuum befinde, treffe senkrecht zur Zylinderachse eine ebene monochromatische Welle. Der Vektor $\mathfrak{E}_a$ der einfallenden Welle sei der Zylinderachse parallel. Man bestimme das resultierende Feld, die Stromverteilung auf der Zylinderoberfläche und den Gesamtstrom I durch den Zylinder.

417. Man berechne den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma_s$ einer elektromagnetischen Welle (das Richtungsdiagramm der Sekundärwellen) für den in der Aufgabe 416 betrachteten Zylinder sowie den totalen Streuquerschnitt σ_s.

418*. Eine ebene monochromatische Welle treffe so auf einen im Vakuum befindlichen ideal leitenden Kreiszylinder, daß ihr magnetischer Vektor $\mathfrak{H}_a = \mathfrak{H}_0\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}$ parallel und der Wellenvektor $\mathfrak{k}$ senkrecht zur Zylinderachse ist. Man bestimme das resultierende elektromagnetische Feld. Ins-

[1]) Komplementär zueinander heißen zwei Schirme, deren einer dort eine Öffnung hat, wo der andere undurchsichtig ist, und dort undurchsichtig ist, wo der andere eine Öffnung hat.

besondere berechne man für den Fall eines dünnen Zylinders ($k a \ll 1$) den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma_s$ und den totalen Streuquerschnitt σ_s.

419. Die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Streuung einer ebenen Welle mit dem Vektor $\mathfrak{E}$ parallel bzw. senkrecht zur Zylinderachse an einem unendlich langen Zylinder) seien $d\sigma_{||}$ bzw. $d\sigma_{\perp}$. Man berechne den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma_s'$ für eine Welle, deren Vektor $\mathfrak{E}$ mit der Zylinderachse den Winkel φ bildet, sowie den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma_s''$ einer polarisierten Welle.

Hinweis: Es ist das Superpositionsprinzip für die Felder anzuwenden.

420. Eine unpolarisierte ebene Welle werde an einem ideal leitenden dünnen Zylinder ($k a \ll 1$) gestreut. Man berechne den Depolarisationsgrad ϱ der Streuwellen in Abhängigkeit vom Streuwinkel.

421*. Man löse die Aufgabe 418 (Beugung einer ebenen Welle an einem unendlich langen Zylinder ohne die Annahme, daß der Zylinder ideal leitend ist, sondern unter der Voraussetzung, daß seine Oberflächenimpedanz ζ klein ist. Man benutze die genäherte Randbedingung (8.10) von Leontowitsch.

422. Man berechne den mittleren Energieverlust Q und den Absorptionsquerschnitt σ_a je Längeneinheit des Zylinders der vorigen Aufgabe. Insbesondere soll der Fall $k a \ll 1$ untersucht und das erhaltene Resultat erklärt werden.

423*. Man untersuche die Beugung einer ebenen monochromatischen Welle an einem im Vakuum befindlichen dielektrischen Zylinder mit dem Radius a, der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ. Die Welle falle senkrecht zur Mantellinie des Zylinders ein, und der Vektor $\mathfrak{E}$ sei parallel zur Zylinderachse. Man berechne das resultierende Feld.

424*. Eine linear polarisierte ebene monochromatische Welle werde an einer Kugel gestreut, deren Radius a sehr klein gegen die Wellenlänge λ sei. Man drücke die Komponenten des elektromagnetischen Feldes der Streustrahlung in der Wellenzone durch die elektrische und die magnetische Polarisierbarkeit der Kugel aus und bestimme den differentiellen Streuquerschnitt.

Hinweis: Wegen der Bedingung $a \ll \lambda$ nehme man das äußere Feld in der Nähe der Kugel als homogen an und betrachte die Strahlung der induzierten elektrischen und magnetischen Dipolmomente $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$.

425. Man berechne den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma_s$ und den totalen Streuquerschnitt σ_s sowie den Depolarisationsgrad ϱ der Sekundärstrahlung bei der Streuung einer unpolarisierten Welle an einer Kugel, deren Radius a sehr klein gegen die Wellenlänge λ sei. Das Ergebnis ist durch die elektrische Polarisierbarkeit β_e und die magnetische Polarisierbarkeit β_m der Kugel auszudrücken.

426. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorigen Aufgabe bestimme man den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt $d\sigma_s$ und σ_s für die Streuung von unpolarisiertem Licht an einer kleinen dielektrischen Kugel mit der Dielektrizitätskonstanten ε ($\mu = 1$) sowie den Depolarisationsgrad ϱ des Streulichtes. Diese Größen sind graphisch in Abhängigkeit vom Streuwinkel Θ darzustellen. Man gebe eine Bedingung für die Gültigkeit der erhaltenen Beziehungen an.

Dieselbe Aufgabe ist für den Fall einer ideal leitenden Kugel mit $\mu = 1$ zu lösen.

427. Eine ebene monochromatische Welle treffe unter dem Winkel $\pi/2 - \alpha$ auf eine ideal leitende dünne Scheibe, deren Radius a klein gegen die Wellenlänge λ sei. Man bestimme den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt $d\sigma_s$ und σ_s bei verschiedenen Polarisationen der einfallenden Welle sowie den Streuquerschnitt der unpolarisierten Welle.

428. In einem homogenen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε ($\mu = 1$) befinde sich ein Hohlraum in Form einer dünnen Scheibe mit dem Radius a und der Dicke $2h$. Senkrecht zur Scheibenebene falle unpolarisiertes Licht mit der Wellenlänge $\lambda \gg a$ ein. Man berechne den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt $d\sigma_s$ und σ_s.

429*. Man bestimme den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt einer ebenen Welle mit der Wellenlänge λ für einen ideal leitenden Zylinder der Höhe $2h$ mit dem Radius $a \ll h$ ($h \ll \lambda$). Es sind verschiedene Fälle der Polarisation der einfallenden Welle zu untersuchen. Der Zylinder ist durch ein gestrecktes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a und h zu approximieren.
Hinweis: Man benutze die Lösungen der Aufgaben 198, 200 und 378.

430. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall eines Zylinders, dessen Höhe $2h$ sehr klein gegen die Wellenlänge λ im Zylinder ist.

431*. Eine ebene Welle werde an einem dielektrischen Körper beliebiger Form mit $\mu = 1$ gestreut. Wie lautet die Differentialgleichung, die das resultierende elektrische Feld bestimmt? Man betrachte dazu die von jedem Körperelement emittierte Sekundärstrahlung und stelle die Streuwelle in einem vorgegebenen Punkt durch ein Integral über das Körpervolumen dar.

432*. Mit Hilfe der in der vorigen Aufgabe abgeleiteten Integralgleichung untersuche man in der ersten Näherung bezüglich $\alpha = (\varepsilon - 1)/4\pi \ll 1$ die Streuung einer elektromagnetischen Welle an einer dielektrischen Kugel. Man bestimme den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma_s$ und den Depolarisationsgrad ϱ der Streustrahlung. Welchen Charakter hat die Streuung im Falle einer sehr großen Kugel ($k a \gg 1$)?

433. Man bestimme den totalen Streuquerschnitt σ_s der in der vorigen Aufgabe betrachteten dielektrischen Kugel im Grenzfall $k a \gg 1$ und vergleiche das Ergebnis mit dem im Falle $k a \ll 1$.

434*. Eine ebene monochromatische Welle werde durch ein System von Ladungen (z.B. einen makroskopischen Körper) gestreut. Das elektrische Feld in großem Abstand vom Streuer ist

$$\mathfrak{E} = E_0 \left[\mathfrak{e}\, e^{ikz} + \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \frac{e^{ikr}}{r} \right].$$

Dabei sind $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}/r$, $\mathfrak{e} = \mathfrak{E}_0/E_0$, $k = \omega/c$, $\mathfrak{E}_0$ die Amplitude der einfallenden Welle und $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ eine Funktion, die die Eigenschaften des Streuers charakterisiert und von der Frequenz abhängt (Streuamplitude). Man beweise die Be-

ziehung

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}[\mathfrak{e}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{n}_0)]$$

(„optisches Theorem"). Dabei sind $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$ der Gesamtquerschnitt der Wechselwirkung der Welle mit dem System von Ladungen (σ_s ist der Streu- und σ_a der Absorptionsquerschnitt) und $\mathfrak{F}(\mathfrak{n}_0)$ die Amplitude der Vorwärtsstreuung, d. h. der Streuung in der Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle.

435*. Eine ebene monochromatische Welle treffe auf ein makroskopisches Teilchen, dessen Ausdehnung klein gegen die Wellenlänge λ sei. Die elektrische Polarisierbarkeit $\beta_e = \beta_e' + i\,\beta_e''$ und die magnetische Polarisierbarkeit $\beta_m = \beta_m' + i\,\beta_m''$ seien komplex, so daß neben der Streuung eine Absorption elektromagnetischer Energie stattfindet. Man berechne den Absorptionsquerschnitt σ_a.

Hinweis: Die in der Zeiteinheit absorbierte Energie ist gleich dem Fluß des POYNTINGschen Vektors durch die Oberfläche einer das Teilchen umschließenden Kugel mit großem Radius.

436. Man berechne den Absorptionsquerschnitt σ_a einer elektromagnetischen Welle für eine leitende Kugel mit kleiner Oberflächenimpedanz $\zeta = \zeta' + i\,\zeta''$. Der Kugelradius b sei klein gegen die Wellenlänge λ.

437. Eine ebene monochromatische Welle treffe auf einen makroskopischen Körper. Der Absorptionsquerschnitt σ_a und der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma_s/d\Omega$ seien bekannt. Man drücke die zeitlich gemittelte Kraft $\bar{F}$, die die Welle auf den Körper ausübt, durch diese Größen aus.

438*. Man bestimme die mittlere Kraft $\bar{F}$, die an einer kleinen Kugel mit dem Radius a im Feld einer ebenen monochromatischen Welle angreift. Man untersuche die Fälle einer ideal leitenden Kugel und einer dielektrischen Kugel mit der Dielektrizitätskonstanten ε $(\mu = 1)$. Die Amplitude der einfallenden Welle sei E_0.

439. Auf einer senkrecht durch den Mittelpunkt eines kreisförmigen, undurchsichtigen Schirmes mit dem Radius a gehenden Achse sei eine punktförmige Lichtquelle angeordnet.

Unter der Voraussetzung, daß die Bedingung für die Anwendbarkeit der geometrischen Optik erfüllt ist $(\lambda \ll a)$, bestimme man die Lichtintensität I in dem zum Schirm symmetrisch gelegenen Punkt P.

440. Man untersuche die Beugung an dem dem Schirm der vorigen Aufgabe komplementären Schirm (d.h. an einer kreisförmigen Öffnung in einem unendlich ausgedehnten undurchsichtigen Schirm).

441. Ein paralleles Lichtbündel treffe senkrecht auf eine kreisförmige Öffnung in einem undurchsichtigen Schirm. Man bestimme die Verteilung der Lichtintensität I auf der Mittellinie hinter dem Schirm.

442. Man berechne die Winkelverteilung der Lichtintensität dI bei der FRAUNHOFERschen Beugung an einer ringförmigen Öffnung (Radien $a > b$) in einem unendlich ausgedehnten undurchsichtigen Schirm. Das Lichtbündel falle

senkrecht zur Ebene der Öffnung ein. Man betrachte den Spezialfall der Beugung an einer kreisförmigen Öffnung.

443. Man bestimme die Winkelverteilung der Lichtintensität $\mathrm{d}I$ für den Fall, daß ein paralleles Lichtbündel auf eine kreisförmige Öffnung fällt (FRAUNHOFERsche Beugung).

444. Eine linear polarisierte ebene Welle treffe senkrecht auf die rechteckförmige Öffnung $-a \leqq x \leqq a$, $-b \leqq y \leqq b$ in einem unendlich ausgedehnten dünnen Schirm. Die Amplituden des elektrischen bzw. magnetischen Feldes sollen die Komponenten $E_y = E_0$, $H_x = -E_0$, $H_y = E_x = 0$ haben. Man bestimme das Strahlungsfeld hinter der Öffnung sowie die Winkelverteilung der Strahlungsintensität $\mathrm{d}I$.

445. Die linear polarisierte ebene Welle $\mathfrak{E}_0\, \mathrm{e}^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}$ treffe senkrecht auf eine kreisförmige Öffnung mit dem Radius a in einem unendlich ausgedehnten dünnen Schirm. Man berechne das Strahlungsfeld hinter der Öffnung und die Winkelverteilung der Strahlungsintensität $\mathrm{d}I$.

8.3. Ebene Wellen in anisotropen und gyrotropen Medien

Als optisch anisotrop bezeichnet man Medien, für die Dielektrizitätskonstante und Permeabilität Tensoren sind. Die optische Anisotropie kann eine Folge der Kristallstruktur eines Körpers sein oder durch ein äußeres elektrisches Feld (s. die Aufgaben 313, 314) bzw. äußere mechanische Einwirkungen hervorgerufen werden. Bei Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes sind die Tensoren $\varepsilon_{ik}(\omega)$ und $\mu_{ik}(\omega)$[1]) symmetrisch:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \qquad \mu_{ik} = \mu_{ki}. \tag{8.29}$$

In einem anisotropen Medium können sich in einer vorgegebenen Richtung zwei ebene monochromatische Wellen derselben Frequenz, die in zwei zueinander senkrechten Richtungen polarisiert sind, mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten ausbreiten. Die Richtungen, in denen beide Wellen gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben, bezeichnet man als optische Achsen. Die Ausbreitungsrichtung einer Welle wird durch die Normale zur Wellenfläche bestimmt und stimmt im allgemeinen nicht mit der Strahlrichtung (d.h. mit der Richtung des POYNTINGschen Vektors) überein.

Bei einachsigen Kristallen stimmen zwei Hauptwerte des Tensors der dielektrischen Konstanten miteinander überein ($\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon_\perp$, $\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_{||}$). Ihre optische Achse fällt mit der Achse $x_3 = z$ zusammen. Die Wellenvektoren zweier Wellen, die sich unter dem Winkel Θ zur optischen Achse ausbreiten,

[1]) Von Effekten, die mit der räumlichen Inhomogenität des Feldes zusammenhängen und dazu führen, daß ε_{ik} und μ_{ik} vom Wellenvektor $\mathfrak{k}$ abhängen, werde hier abgesehen (s. [55] sowie Aufgabe 458).

haben dabei den Betrag

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_\perp \mu}\,, \qquad k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_\perp \varepsilon_{||}\mu}{\varepsilon_\perp \sin^2\Theta + \varepsilon_{||}\cos^2\Theta}}\,. \tag{8.30}$$

Man bezeichnet die erste dieser Wellen als ordentliche Welle; in ihr sind der Vektor $\mathfrak{D}$ der dielektrischen Verschiebung und der Vektor $\mathfrak{E}$ der elektrischen Feldstärke gleichgerichtet und beide senkrecht zum Wellenvektor $\mathfrak{k}_1$ und zu der durch den Wellenvektor und die optische Achse aufgespannten Ebene (Hauptschnitt). Die zweite Welle bezeichnet man als außerordentliche Welle. Der Vektor $\mathfrak{D}$ dieser Welle liegt in der Hauptschnittebene und steht auf ihrem Wellenvektor $\mathfrak{k}_2$ senkrecht. Der Vektor $\mathfrak{E}$ liegt ebenfalls in der Hauptschnittebene, hat aber nicht die Richtung von $\mathfrak{D}$.

Bei Anwesenheit eines äußeren konstanten Magnetfeldes bleiben die Tensoren ε_{ik} und μ_{ik} symmetrisch; in nichtabsorbierenden Medien, die wir in diesem Abschnitt ausschließlich betrachten, sind sie jedoch hermitesch:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^*_{ki}, \qquad \mu_{ik} = \mu^*_{ki}. \tag{8.31}$$

In diesem Fall besteht zwischen der Feldstärke und der dielektrischen Verschiebung bzw. Induktion der Zusammenhang

$$\mathfrak{D} = \boldsymbol{\varepsilon}'\,\mathfrak{E} + i\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{g}_e, \qquad \mathfrak{B} = \boldsymbol{\mu}'\,\mathfrak{H} + i\,\mathfrak{H}\times\mathfrak{g}_m \tag{8.32}$$

(s. Aufgabe 316), wobei $\mathfrak{g}_e$ und $\mathfrak{g}_m$ der elektrische bzw. magnetische Gyrationsvektor und $\boldsymbol{\varepsilon}'\,\mathfrak{E}$ ein Vektor mit den Komponenten $\varepsilon'_{ik}E_k$ ist. Medien, in denen die Feldvektoren durch die Gleichungen (8.32) miteinander zusammenhängen, bezeichnet man als gyrotrop.

In einem gyrotropen Medium können sich in einer vorgegebenen Richtung zwei ebene Wellen derselben Frequenz mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten ausbreiten. Diese Wellen sind elliptisch polarisiert mit entgegengesetzten Drehrichtungen; die Polarisationsellipsen haben dasselbe Achsenverhältnis und sind um den Winkel $\pi/2$ gegeneinander gedreht.

Die Randbedingungen an der Oberfläche eines anisotropen oder gyrotropen Körpers haben dieselbe Form wie die an der Grenzfläche isotroper Medien [s. (3.9) und (5.6)].

Aufgaben:

446. Die außerordentliche Welle breite sich in einem einachsigen Kristall unter dem Winkel Θ gegen die optische Achse aus. Man bestimme den Winkel α zwischen dem Wellenvektor $\mathfrak{k}$ und dem Vektor $\mathfrak{E}$ sowie den Winkel ϑ zwischen der Strahlrichtung (dem Poyntingschen Vektor) und der optischen Achse des Kristalls.

447. Eine ebene Welle falle unter dem Winkel Θ aus dem Vakuum auf die ebene Oberfläche eines einachsigen Kristalls. Die optische Achse des Kristalls sei senkrecht zu seiner Oberfläche gerichtet. Man bestimme den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl im Kristall.

448. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß die optische Achse des Kristalls parallel zu seiner Oberfläche ist und mit der Einfallsebene den Winkel α bildet.

449. Eine ebene monochromatische Welle breite sich in einem unendlich ausgedehnten, bis zur Sättigung magnetisierten Ferritmedium unter dem Winkel Θ zu einem konstanten Magnetfeld aus. Die Permeabilität des Ferrits sei durch den Tensor

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\,\mu_a & 0 \\ i\,\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix}$$

gegeben (s. Aufgabe 329; die z-Achse hat die Richtung des konstanten Magnetfeldes).[1] Die Dielektrizitätskonstante ε des Ferrits kann als Skalar angenommen werden.[2] Man bestimme die Phasengeschwindigkeiten v_1, v_2 der Ausbreitung.

450. Eine ebene monochromatische Welle breite sich in einem Dielektrikum mit $\mu = 1$ aus, das sich in einem konstanten und homogenen Magnetfeld befinde. Der dielektrische Tensor (s. Aufgabe 318) sei

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & -i\,\varepsilon_a & 0 \\ i\,\varepsilon_a & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{||} \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Phasengeschwindigkeiten der Ausbreitung.

451. Man untersuche die Polarisation der Wellen, die sich in einem unendlich ausgedehnten, bis zur Sättigung magnetisierten Ferritmedium ausbreiten können. Man betrachte folgende Spezialfälle der Ausbreitung:

a) in Richtung eines konstanten Magnetfeldes,

b) senkrecht zu einem konstanten Magnetfeld.

452. Ein Dielektrikum befinde sich in einem äußeren Magnetfeld. Eine ebene monochromatische Welle breite sich in Richtung des Magnetfeldes (längs der z-Achse) aus und sei im Punkt $z = 0$ linear polarisiert. Man bestimme die Polarisation der Welle in einem Punkt $z \neq 0$.

Hinweis: Man benutze den in der Aufgabe 318 bestimmten dielektrischen Tensor.

453. Eine zirkular polarisierte ebene Welle treffe aus dem Vakuum senkrecht auf die Grenzebene eines Ferrits. Der Ferrit sei in der Einfallsrichtung der Welle magnetisiert. Man bestimme die Polarisation und die Amplituden der reflektierten und der hindurchgehenden Welle.

Hinweis: Man benutze die Grenzbedingungen für die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$.

454. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß die einfallende Welle linear polarisiert ist.

---

[1]) Diese Form hat auch der dielektrische Tensor eines gasförmigen Dielektrikums, das sich in einem homogenen äußeren Magnetfeld befindet (s. Aufgabe 318).

[2]) Das erklärt sich dadurch, daß ein konstantes Magnetfeld die magnetischen Eigenschaften eines Ferrits bedeutend stärker beeinflußt als ein elektrisches.

455*. Ein künstliches Dielektrikum bestehe aus dünnen, im Vakuum befindlichen, ideal leitenden Kreisscheiben gleicher Orientierung. Senkrecht zu den Scheibenebenen sei ein konstantes Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ angelegt und breite sich eine ebene elektromagnetische Welle aus. Man bestimme die Phasengeschwindigkeiten der Ausbreitung, indem man das Dielektrikum als dichtes Medium betrachtet.

Hinweis: Man berücksichtige den infolge der Anwesenheit des äußeren Magnetfeldes entstehenden HALL-Effekt.

456*. Können sich in einem Plasma longitudinale Schwingungen ausbreiten, deren $\mathfrak{E}$-Vektor parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle ist? Wie groß ist die Frequenz solcher Schwingungen?

Hinweis: Man benutze den Ausdruck für die Dielektrizitätskonstante des Plasmas aus Aufgabe 312.

457. Ein ionisiertes Gas befinde sich in einem konstanten Magnetfeld. In Feldrichtung breite sich eine transversale ebene Welle aus. Man bestimme die Phasengeschwindigkeiten der Ausbreitung. Man betrachte insbesondere den Fall kleiner Frequenzen ($\omega \to 0$) und untersuche den Charakter der elektromagnetischen Wellen unter Berücksichtigung der Bewegung der positiven Ionen.

Hinweis: Man benutze den Ausdruck für den dielektrischen Tensor eines ionisierten Gases im konstanten Magnetfeld aus Aufgabe 321.

458. Man bestimme den Tensor $\mu_{ik}(\omega, \mathfrak{k})$ eines Ferrodielektrikums, ohne im Ausdruck (6.16) für das effektive Magnetfeld den Term $q \Delta \mathfrak{M}$ zu vernachlässigen. Dazu betrachte man die Bewegung des Magnetisierungsvektors unter der Wirkung einer ebenen monochromatischen Welle. Das Ferrodielektrikum sei durch ein konstantes Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ bis zur Sättigung magnetisiert.

Hinweis: Man beschränke sich auf den Fall kleiner Amplituden und linearisiere die Bewegungsgleichung für den Magnetisierungsvektor.

459. Man bestimme unter Berücksichtigung des Terms $q \Delta \mathfrak{M}$ im Ausdruck (6.16) für $\mathfrak{H}_{\text{eff}}$ die Dispersionsgleichung der elektromagnetischen Wellen in einem isotropen, bis zur Sättigung magnetisierten ferrodielektrischen Medium. Man zeige, daß sich in einem solchen Medium drei Typen von Wellen mit verschiedenen Dispersionsgesetzen $\omega(\mathfrak{k})$ ausbreiten können. Wie hängt $\omega(\mathfrak{k})$ für den Wellentyp, für den die Bedingung $\omega^2 \varepsilon/(c\,k)^2 \ll 1$ erfüllt werden kann, explizit von $\mathfrak{k}$ ab? Man schätze die relative Größe des elektrischen und des magnetischen Feldes dieses Schwingungstyps ab.

460. Man bestimme die Oberflächenimpedanz ζ eines ferromagnetischen Leiters, der sich in einem konstanten, seiner Oberfläche parallelen Magnetfeld befindet. Der Permeabilitätstensor ist in der Problemstellung zur Aufgabe 449 angegeben. Die Komponenten des Tensors der elektrischen Leitfähigkeit seien $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_1$, $\sigma_{33} = \sigma_3$, $\sigma_{12} = -\sigma_{21} = -i\,\sigma_2$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

Hinweis: Die Oberflächenimpedanz ist in diesem Fall ein Tensor zweiter Stufe und muß mit Hilfe der Bedingung

$$\mathfrak{E}_{t\,i} = \zeta_{ik}(\mathfrak{H}_t \times \mathfrak{n})_k$$

bestimmt werden [s. (8.10)]; dabei ist $i, k = 1, 2, 3$, und $\mathfrak{E}_t$ und $\mathfrak{H}_t$ bedeuten die Tangentialkomponenten der Feldvektoren in der Nähe der Leiteroberfläche, $\mathfrak{n}$ den Normaleneinheitsvektor der Oberfläche.

461. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß das konstante Magnetfeld senkrecht zur Oberfläche des ferromagnetischen Leiters gerichtet ist.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[1] Achieser, A. I., W. G. Barjachtar und M. I. Kaganow: Spinwellen in Ferromagnetika und Antiferromagnetika. Usp. fis. Nauk **71** (1960), S. 533 (russ.).

[4] Alfvén, H.: Cosmical Electrodynamics. Clarendon Press, Oxford 1950.

[5] Alpert, Ja. L., W. L. Ginsburg und E. L. Feinberg: Ausbreitung von Radiowellen. Gostechisdat, Moskau 1953 (*Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург* и *Е. Л. Фейнберг:* Распространение радиоволн).

[7] Bateman, H.: The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion. Dover Publishers Inc., London 1955.

[13] Born, M.: Ein Besuch bei den Raumfahrern und das Uhrenparadoxon. Phys. Blätter **14** (1957), S. 207.

[19] Eichenwald, A. A.: Theoretische Physik, Teil 6: Das elektromagnetische Feld. GONTI, Moskau 1931 (*А. А. Эйхенвальд:* Теоретическая физика, ч. 6: Электромагнитное поле).

[26] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[33] Ginsburg, W. L., und G. P. Motulewitsch: Optische Eigenschaften von Metallen Usp. fis Nauk **44** (1951), S. 321 (russ.).

[34] Goldschtein, L. D., und N. W. Sernow: Elektromagnetische Felder und Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1956 (*Л. Д. Гольдштейн* и *Н. В. Зернов:* Электромагнитные поля и волны).

[36] Gorelik, G. S.: Schwingungen und Wellen. Fismatgis, Moskau 1959 (*Г. С. Горелик:* Колебания и волны).

[42] Gurewitsch, A. G.: Ferrite für höchste Frequenzen. Fismatgis, Moskau 1960 (*А. Г. Гуревич:* Ферриты на сверхвысоких частотах).

[50] Kompaneyets, A. S.: Theoretical Physics. Foreign Languages Publishing House, Moscow 1961.

[53] Landau, L. D., und E. M. Lifschiz: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[55] Landau, L. D., und E. M. Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[63] Mikaeljan, A. L.: Magnetische Drehung der Polarisationsebene bei Zentimeterwellen. Usp. fis. Nauk **51** (1953), S. 205 (russ.).

[67] Panofsky, W., und M. Phillips: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.

[73] Schifrin, K. S.: Lichtstreuung in trüben Medien. Gostechisdat, Moskau 1951 (*К. С. Шифрин:* Рассеяние света в мутной среде).

[78] Smythe, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.

[81] Sommerfeld, A.: Optik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 3. Aufl., Leipzig 1964.

[83] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.

[84] Tamm, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).

[88] Wainschtein, L. A.: Elektromagnetische Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1957 (*Л. А. Вайнштейн:* Электромагнитные волны).

[89] Wlassow, A. A.: Makroskopische Elektrodynamik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*А. А. Власов:* Макроскопическая электродинамика).

9. ELEKTROMAGNETISCHE SCHWINGUNGEN IN BEGRENZTEN KÖRPERN

Einen Raumteil, der von allen Seiten durch Metallwände begrenzt wird, bezeichnet man als Hohlraumresonator. In derartigen Resonatoren können Systeme stehender Wellen mit bestimmten Frequenzen ω (den Eigenfrequenzen des Resonators) existieren. Man bestimmt dieses System (im Falle eines dielektrikumfreien Resonators mit ideal leitenden Wänden) durch Lösung der Gleichungen

$$\Delta\, \mathfrak{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\, \mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \tag{9.1}$$

mit der Grenzbedingung

$$\mathfrak{E}_t = 0. \tag{9.2}$$

Wegen der Verluste in den Wänden unterscheiden sich die Eigenfrequenzen des Resonators von den durch die Gleichungen (9.1) und (9.2) bestimmten um eine Größe $\Delta\omega$; bei schwacher Dämpfung, die durch die Oberflächenimpedanz ζ[1]) der Resonatorwände berücksichtigt wird, gilt

$$\Delta\omega = -\frac{i\,c\,\zeta}{2}\,\frac{\oint |H|^2\,\mathrm{d}f}{\int |H|^2\,\mathrm{d}V}. \tag{9.3}$$

In (9.3) wird im Zähler über die innere Oberfläche und im Nenner über das Volumen des Resonators integriert. Die Größe $\Delta\omega = \Delta\omega' + i\,\Delta\omega''$ hat einen Real- und einen Imaginärteil. Folglich führen Verluste in den Wänden zur Verschiebung der Eigenfrequenzen und zur Dämpfung der Eigenschwingungen.

Im Unterschied zum Hohlraumresonator stellt ein Hohlleiter einen unendlich langen Hohlraum (Rohr) dar. In Richtung der Hohlleiterachse (z-Achse) können sich fortschreitende Wellen ausbreiten, während sich in transversaler Richtung eine stehende Welle ausbildet. Im allgemeinen sind die Wellen im Hohlleiter nicht transversal. Man unterscheidet Wellen vom elektrischen Typ (E-Wellen; $E_z \neq 0$, $H_z = 0$) und solche vom magnetischen Typ (H-Wellen; $H_z \neq 0$, $E_z = 0$). Nur in Hohlleitern mit nichteinfach zusammenhängendem Querschnitt können sich rein transversale elektromagnetische Wellen ausbreiten.

Die Wellentypen, die sich in einem vorgegebenen Hohlleiter ausbreiten können, werden durch Lösung der MAXWELLschen Gleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen bestimmt. Eine in Richtung der Hohlleiter-

---

[1]) Die Definition der Oberflächenimpedanz wird in Kapitel 8, Abschnitt 1, gegeben.

achse fortschreitende Welle wird durch die Funktionen

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) = \tilde{\mathfrak{E}}(x, y)\, e^{i(kz-\omega t)}, \qquad \mathfrak{H}(\mathfrak{r}, t) = \tilde{\mathfrak{H}}(x, y)\, e^{i(kz-\omega t)} \tag{9.4}$$

beschrieben. Dabei bedeuten ω die Frequenz der Welle und k die Komponente des Wellenvektors in Richtung der Hohlleiterachse. Die Größe k bezeichnet man auch als Ausbreitungskonstante.

Bei E-Wellen ist $\tilde{H}_z = 0$, während $\tilde{E}_z$ der Gleichung

$$\Delta \tilde{E}_z + \varkappa^2 \tilde{E}_z = 0, \tag{9.5}$$

wobei $\varkappa^2 = \omega^2 \varepsilon\, \mu/c^2 - k^2$ ist und $\varkappa$ die Transversalkomponente des Wellenvektors, ε die Dielektrizitätskonstante und μ die Permeabilität des Dielektrikums im Hohlleiter bedeuten, sowie der Grenzbedingung

$$\tilde{E}_z = 0 \tag{9.6}$$

in der Wandung des Hohlleiters genügt.

Bei H-Wellen ist $\tilde{E}_z = 0$, während $\tilde{H}_z$ Lösung der Gleichung

$$\Delta \tilde{H}_z + \varkappa^2 \tilde{H}_z = 0 \tag{9.7}$$

ist, die der Grenzbedingung

$$\tilde{E}_t = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} = 0 \tag{9.8}$$

in der Wandung des Hohlleiters genügt.

In den Gleichungen (9.5) und (9.7) ist Δ der zweidimensionale LAPLACE-Operator. Die Grenzbedingungen (9.6) und (9.8) gelten streng nur für Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden.

Mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen kann man die Transversalkomponenten der Vektoren $\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}$ durch ihre Longitudinalkomponenten ausdrücken.

E- oder H-Wellen eines bestimmten Typs (d.h. mit definiertem $\varkappa$) können sich nur dann in einem Hohlleiter mit einfach zusammenhängendem Querschnitt ausbreiten, wenn ihre Frequenz größer als eine gewisse Grenzfrequenz ω_0 ist. Die entsprechende „Vakuumwellenlänge“ $\lambda_0 = 2\pi\, c/\omega_0$ ist von der Größenordnung der linearen Abmessungen des Hohlleiterquerschnitts. Für $\omega < \omega_0$ wird die Ausbreitungskonstante k rein imaginär, so daß sich keine Welle ausbreiten kann. Auch bei $\omega > \omega_0$ ist k jedoch im allgemeinen komplex.

Das hängt damit zusammen, daß die Hohlleiterwände endliche Leitfähigkeit haben, so daß in ihnen eine Energiedissipation stattfindet und die elektromagnetische Welle nach dem Gesetz $e^{-\alpha z}$ abklingt. Der Dämpfungskoeffizient α (Imaginärteil von k) ist gleich dem Verhältnis der Energie, die je Zeiteinheit von der Längeneinheit der Hohlleiterwand durch Dissipation aufgenommen wird, zum doppelten Energiefluß längs des Hohlleiters. Wenn die Oberflächenimpedanz $\zeta = \zeta' + i\,\zeta''$ der Wände klein ist, erhält man Näherungsausdrücke

für den Dämpfungskoeffizienten:

$$\alpha = \frac{\omega \zeta'}{2\varkappa k c} \frac{\oint |\vec{\nabla} \tilde{E}_z|^2 \, \mathrm{d}l}{\int |\tilde{E}_z|^2 \, \mathrm{d}f} \quad \text{für } E\text{-Wellen} \tag{9.9}$$

und

$$\alpha \approx \frac{c \varkappa^2 \zeta'}{2k\omega} \frac{\oint \left[|\tilde{H}_z|^2 + \frac{k^2}{\varkappa^4} |\vec{\nabla} \tilde{H}_z|^2 \right] \mathrm{d}l}{\int |\tilde{H}_z|^2 \, \mathrm{d}f} \quad \text{für } H\text{-Wellen.} \tag{9.10}$$

Dabei bedeuten $\tilde{E}_z$ und $\tilde{H}_z$ die Komponenten der Felder für $\zeta = 0$ (d.h. unter der Annahme idealer Leitfähigkeit der Hohlleiterwände), $\mathrm{d}l$ das Linienelement und $\mathrm{d}f$ das Flächenelement des Hohlleiterquerschnitts.

Aufgaben:

462. Man bestimme die Wellentypen, die sich in einem rechteckigen Hohlleiter (Seitenlängen a und b) mit ideal leitenden Wänden ausbreiten können, sowie ihr Dispersionsgesetz und ihre Konfigurationen (d.h. die Abhängigkeit der Feldkomponenten von den Ortskoordinaten).

463. Man bestimme die Dämpfungskoeffizienten α der verschiedenen Wellentypen in einem rechteckigen Hohlleiter. Die Oberflächenimpedanz ζ der Hohlleiterwände sei vorgegeben.

464. Eine unendlich ausgedehnte dielektrische Schicht mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ erfülle im Vakuum das Gebiet $-a \leqq x \leqq a$. Man zeige, daß diese Schicht als Hohlleiter wirken kann (dazu ist notwendig, daß sich das Feld der fortschreitenden elektromagnetischen Welle im wesentlichen innerhalb der Schicht konzentriert). Man bestimme die Wellentypen, die sich in einem solchen Hohlleiter ausbreiten können. Man beschränke sich auf den Fall, daß die Feldvektoren nicht von der y-Koordinate abhängen.

465. Auf die Oberfläche eines idealen Leiters sei im Gebiet $0 \leqq x \leqq a$ eine dielektrische Schicht mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ aufgetragen. Im Gebiet $x > a$ herrsche Vakuum. Welche Typen elektromagnetischer Wellen mit einer mit der Entfernung von der Schicht abnehmenden Amplitude können sich in der Schicht ausbreiten? Man vergleiche die möglichen Wellentypen mit dem in der vorigen Aufgabe erhaltenen Wellensystem.

466. Man bestimme die möglichen Wellentypen in einem kreisförmigen Hohlleiter mit dem Radius a, dessen Wände als ideal leitend angenommen werden, und berechne die Grenzfrequenz ω_0 des Hohlleiters.

467. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorigen Aufgabe bestimme man die Dämpfungskoeffizienten α der verschiedenen Wellentypen in einem kreisförmigen Hohlleiter. Die Oberflächenimpedanz ζ der Wände sei vorgegeben.

468. Man bestimme die Phasengeschwindigkeit v_φ und die Gruppengeschwindigkeit v_g der Wellen in einem rechteckigen bzw. kreisförmigen Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden und gebe ihre Abhängigkeit von $\lambda = 2\pi\, c/\omega$ an.

469. Man bestimme die Phasengeschwindigkeit v_φ und die Gruppengeschwindigkeit v_g der Wellen in einem Hohlleiter nach der geometrischen Methode. Dazu betrachte man die einfachste Welle vom Typ H_{10} in einem rechteckigen Hohlleiter, entwickle sie nach ebenen Wellen und untersuche ihre Reflexion an den Hohlleiterwänden.

470. Man untersuche die Struktur der transversalen elektromagnetischen Welle in einem ideal leitenden Koaxialleiter (großer Radius b, kleiner Radius a). Wie groß ist der mittlere Energiefluß $\overline{S}$ im Leiter? Man betrachte den Grenzfall eines idealen Einzelleiters.

471. Man bestimme die möglichen Typen nichttransversaler elektromagnetischer Wellen in einem Koaxialleiter mit ideal leitenden Wänden (die Radien seien a und $b > a$).

472. Man bestimme den Dämpfungskoeffizienten α der transversalen elektromagnetischen Welle in einem Koaxialleiter. Die Radien a und $b > a$ sowie die Oberflächenimpedanz $\zeta = \zeta' + i\,\zeta''$ seien vorgegeben.

Hinweis: Man benutze die in der Einführung des Kapitels angegebene Definition des Dämpfungskoeffizienten durch den Energieverlust.

473*. Man untersuche die Ausbreitung einer axialsymmetrischen E-Welle in einem unendlich langen zylindrischen Einzelleiter mit endlicher Leitfähigkeit, der sich im Vakuum befinde. Man bestimme die Phasengeschwindigkeit der Welle und zeige, daß die Welle im Falle eines idealen Leiters in die in der Aufgabe 470 betrachtete transversale elektromagnetische Welle übergeht. Man benutze die genäherte Randbedingung (8.10) von Leontowitsch.

474. Eine axialsymmetrische E-Welle breite sich in einem kreisförmigen Hohlleiter mit dem Radius b aus, der teilweise von einem Dielektrikum erfüllt sei. Das Dielektrikum habe die Dielektrizitätskonstante ε und erfülle das Gebiet $a \leqq r \leqq b$. Unter der Annahme $a \ll b$ bestimme man die Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit und die Grenzfrequenz. Unter welchen Bedingungen wird die Phasengeschwindigkeit kleiner als c sein? Man betrachte den Grenzfall eines vollständig von einem Dielektrikum erfüllten Hohlleiters.

475. In einem rechteckigen Hohlleiter mit dem Querschnitt $a\,b$ und ideal leitenden Wänden befinde sich ein Ferrodielektrikum. Senkrecht zur breiten Hohlleiterwand (in Richtung der y-Achse) sei ein konstantes Magnetfeld angelegt. Der dielektrische Tensor und der Permeabilitätstensor seien

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & -i\,\varepsilon_a \\ 0 & \varepsilon_{\|} & 0 \\ i\,\varepsilon_a & 0 & \varepsilon_\perp \end{pmatrix}, \qquad \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & 0 & -i\,\mu_a \\ 0 & \mu_{\|} & 0 \\ i\,\mu_a & 0 & \mu_\perp \end{pmatrix}$$

(vgl. mit den Ergebnissen der Aufgabe 329). Man bestimme die Komponenten des elektromagnetischen Feldes, die Ausbreitungskonstante und die Grenzfrequenz des Hohlleiters für den Fall, daß das Feld nicht von y abhängt.

476. Das elektrische und das magnetische Feld in einem dielektrikumfreien Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden werden durch die Funktionen

$$\mathfrak{E}_0(\mathfrak{r}, t) = \tilde{\mathfrak{E}}_0(x, y)\, e^{i(k_0 z - \omega t)}, \qquad \mathfrak{H}_0(\mathfrak{r}, t) = \tilde{\mathfrak{H}}_0(x, y)\, e^{i(k_0 z - \omega t)}$$

beschrieben. Befindet sich im Hohlleiter ein zylindrischer dielektrischer Kern mit beliebigem Querschnitt, dessen Achse der des Hohlleiters parallel ist, so ist das Feld im Hohlleiter

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) = \tilde{\mathfrak{E}}(x, y)\, e^{i(kz - \omega t)}, \qquad \mathfrak{H}(\mathfrak{r}, t) = \tilde{\mathfrak{H}}(x, y)\, e^{i(kz - \omega t)}.$$

Das Dielektrikum kann im allgemeinen durch die Tensorparameter ε_{ik} und μ_{ik} charakterisiert werden. Mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen zeige man, daß sich die Ausbreitungskonstante um die Größe

$$\Delta k = k - k_0 = \frac{\omega \int\limits_{\Delta F} (\Delta \varepsilon_{ik} \tilde{E}_k \tilde{E}_{0i}^* + \Delta \mu_{ik} \tilde{H}_k \tilde{H}_{0i}^*)\, dF}{c \int\limits_{F} [\tilde{\mathfrak{E}}_0^* \times \tilde{\mathfrak{H}} + \tilde{\mathfrak{E}} \times \tilde{\mathfrak{H}}_0^*]\, \mathfrak{e}_z\, dF}$$

ändert, wobei $\Delta \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik} - 1$, $\Delta \mu_{ik} = \mu_{ik} - 1$ sind und im Zähler über die Querschnittsfläche des dielektrischen Stabes (ΔF), im Nenner über die Querschnittsfläche des Hohlleiters (F) integriert wird.

477. In einen rechteckigen Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden werde eine ferrodielektrische Platte der Dicke $d \ll a$ gebracht, die längs der Hohlleiterachse magnetisiert sei (Abb. 26). Mit Hilfe der in der vorigen Aufgabe ab-

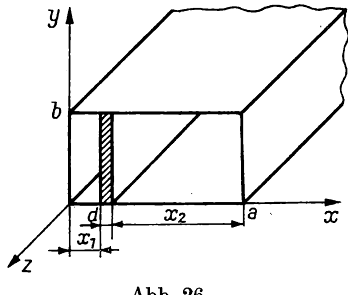


Abb. 26

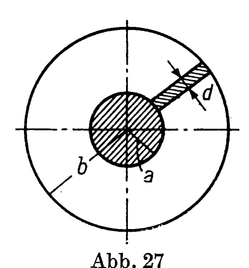


Abb. 27

geleiteten Beziehung bestimme man bis auf Terme der Ordnung d genau die Änderung Δk der Ausbreitungskonstanten der H_{10}-Welle. Die Dielektrizitätskonstante der Platte sei eine skalare Größe. Ihr Permeabilitätstensor ist in der Problemstellung der Aufgabe 449 angegeben.

478. In einen koaxialen Hohlleiter (Abb. 27) werde eine dünne Ferritplatte gebracht ($d \ll a, b$), die in Richtung der Hohlleiterachse magnetisiert sei. Man berechne die Änderung Δk der Ausbreitungskonstanten der transversalen elektromagnetischen Welle.

Hinweis: Die Amplituden der gestörten Felder sind nach der in der vorigen Aufgabe benutzten Methode zu bestimmen.

479. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß das konstante magnetisierende Feld H_0 senkrecht zur Hohlleiterachse gerichtet ist. Man betrachte zwei Richtungen dieses Feldes:

a) H_0 ist senkrecht zur breiten Seite der Platte,

b) H_0 ist senkrecht zur schmalen Seite der Platte.

480. Man bestimme die Typen der Eigenschwingungen in einem Hohlraumresonator mit ideal leitenden Wänden. Der Resonator habe die Form eines rechteckigen Parallelepipeds mit den Abmessungen a, b und h.

481. Man bestimme die Zahl $\Delta N(\omega)$ der Eigenschwingungen, die im Falle des in der vorigen Aufgabe betrachteten Hohlraumresonators mit dem Volumen V auf das Frequenzintervall $\Delta\omega$ entfallen. Es ist $\Delta\omega \ll \omega$ und $\Delta N \gg 1$ vorauszusetzen.

482. Die Wände eines rechteckigen Hohlraumresonators sollen die kleine Impedanz ζ haben. Man bestimme die Eigenfrequenzverschiebung $\Delta\omega'$ und das Dämpfungsdekrement $\Delta\omega''$ für Schwingungen mit $n_1 = 0$, $n_2 = n_3 = 1$.

483. Ein Hohlraumresonator habe die Form eines geraden Kreiszylinders mit der Höhe h und dem Radius a. Unter der Annahme ideal leitender Resonatorwände bestimme man die Eigenschwingungsfrequenzen. Man betrachte die Schwingungen vom elektrischen und magnetischen Typ.

Hinweis: Man benutze die Ergebnisse der Aufgabe 466 für einen kreisförmigen Hohlleiter.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[3] Achieser, A. I., und Ja. B. Fainberg: Langsame elektromagnetische Wellen. Usp fis. Nauk **44** (1951), S. 321 (russ.).

[16] Broglie, L. de: Ondes électromagnétiques centimétriques. Paris 1948.

[34] Goldschtein, L. D., und N. W. Sernow: Elektromagnetische Felder und Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1956 (*Л. Д. Гольдштейн* и *Н. В. Зернов:* Электромагнитные поля и волны).

[41] Gurewitsch, A. G.: Hohlraumresonatoren und Hohlleiter. Sowjetskoe Radio, Moskau 1952 (*А. Г. Гуревич:* Полые резонаторы и волноводы).

[42] Gurewitsch, A. G.: Ferrite für höchste Frequenzen. Fismatgis, Moskau 1960 (*А. Г. Гуревич:* Ферриты на сверхвысоких частотах).

[55] Landau, L. D., und E. M. Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[67] Panofsky, W., und M. Phillips: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.

[69] Petrunkin, W. Ju.: Elektromagnetische Schwingungen, Teil 3. Verlag des Leningrader Polytechnischen Instituts, Leningrad 1959 (*В. Ю. Петрункин:* Электромагнитные колебания, ч. III).

[88] Wainschtein, L. A.: Elektromagnetische Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1957 (*Л. А. Вайнштейн:* Электромагнитные волны).

10. SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

10.1. LORENTZ-Transformationen

Koordinaten und Zeit in zwei Inertialsystemen S und S' hängen durch die LORENTZschen Transformationsgleichungen[1])

$$x = \gamma(x' + V t'), \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{V x'}{c^2}\right) \tag{10.1}$$

miteinander zusammen (die entsprechenden Koordinatenachsen der Systeme S und S' sind einander parallel, die Relativgeschwindigkeit hat die Richtung der x-Achse, und für $t = t' = 0$ stimmen die Ursprünge der Systeme S und S' miteinander überein). Die inversen LORENTZ-Transformationen ergeben sich hier wie in allen übrigen Fällen [z.B. in den Gleichungen (10.4) und (10.11)] durch Umkehrung des Vorzeichens der Geschwindigkeit V:

$$x' = \gamma(x - V t), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V x}{c^2}\right). \tag{10.2}$$

Die Größen x_1, x_2, x_3 und $x_4 = i c t$ sind die Koordinaten eines Weltpunktes:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= (\mathfrak{r}, i c t), \\ \mathfrak{r} &= (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Als vierdimensionalen Vektor (Vierervektor) $A_i = (\mathfrak{A}, A_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ bezeichnet man eine Gesamtheit von vier Größen A_1, A_2, A_3, A_4, die sich beim Übergang von einem Bezugssystem in ein anderes gemäß (10.1) wie die Ortskoordinaten und die Zeit transformieren (s. Abschnitt 2 dieses Kapitels):

$$A_1 = \gamma(A_1' - i\beta A_4'), \; A_2 = A_2', \; A_3 = A_3', \; A_4 = \gamma(A_4' + i\beta A_1'). \tag{10.4}$$

Der Vektor $\mathfrak{A} = (A_1, A_2, A_3)$ heißt die räumliche Komponente und die Größe A_4 die zeitliche Komponente des Vierervektors A_i.

Quadrate und Skalarprodukte von Vierervektoren haben in allen Inertialsystemen den gleichen Wert[2]):

$$A_i^2 = \text{inv}, \qquad A_i B_i = \text{inv}, \tag{10.5}$$

sind also Invarianten der LORENTZ-Transformation.

---

[1]) In diesem und den folgenden Kapiteln werden die Bezeichnungen $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ benutzt, wobei V die Geschwindigkeit des Systems S' gegenüber dem System S bedeutet.

[2]) Wir erinnern daran, daß über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist.

Man bezeichnet einen Vierervektor A_i als raumartig, falls $A_i^2 > 0$, und als zeitartig, falls $A_i^2 < 0$ ist.

Die invariante Größe

$$s_{12} = [(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2]^{1/2} \tag{10.6}$$

bezeichnet man als Intervall zwischen zwei Ereignissen mit den Koordinaten $(\mathfrak{r}_1, t_1)$ und $(\mathfrak{r}_2, t_2)$.

Die von Uhren, die sich mit einem vorgegebenen Objekt mitbewegen, angezeigte Zeit bezeichnet man als Eigenzeit des Objektes. Bewegt sich das Objekt in bezug auf das System S mit der Geschwindigkeit V, so hängt das Eigenzeitintervall $\mathrm{d}\tau$ mit dem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ im System S durch die Beziehung

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{10.7}$$

zusammen. Die Größe $\mathrm{d}t \sqrt{1 - V^2/c^2}$ ist eine Invariante der LORENTZ-Transformation.

Hat ein ruhender Stab die Länge l_0, so hat er bei Bewegung mit der Geschwindigkeit v in Richtung seiner Achse vom Standpunkt eines unbewegten Beobachters die Länge

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{10.8}$$

Als Vierergeschwindigkeit eines Teilchens bezeichnet man den Vierervektor, dessen Komponenten durch die Beziehungen

$$u_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{i\,c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{10.9}$$

bestimmt werden, wobei $\mathfrak{v} = \mathrm{d}\mathfrak{r}/\mathrm{d}t$ die gewöhnliche Geschwindigkeit des Teilchens ist. Aus (10.9) folgt

$$u_i^2 = -c^2. \tag{10.10}$$

Die Vierergeschwindigkeit transformiert sich wie jeder Vierervektor gemäß den Gleichungen (10.4).

Die Komponenten der gewöhnlichen Geschwindigkeit sind keine räumlichen Komponenten eines Vierervektors; sie transformieren sich gemäß den Gleichungen ($\mathfrak{V} \parallel x$-Achse)

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2}, \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v_x' V/c^2}, \quad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v_x' V/c^2}. \tag{10.11}$$

Bildet die Geschwindigkeit eines Teilchens im S- und S'-System mit der x-Achse den Winkel ϑ bzw. ϑ', so gilt

$$\tan\vartheta = \frac{v' \sqrt{1 - V^2/c^2}\,\sin\vartheta'}{v' \cos\vartheta' + V}, \quad v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}. \tag{10.12}$$

Als Viererbeschleunigung bezeichnet man den Vierervektor mit den Komponenten

$$w_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}\tau^2}. \tag{10.13}$$

Wellenvektor $\mathfrak{k}$ und Frequenz ω einer ebenen elektromagnetischen Welle sind Komponenten des Viererwellenvektors

$$k_i = \left(\mathfrak{k}, \frac{i\,\omega}{c}\right). \tag{10.14}$$

Daher ist die Phase $\varphi = k_i\, x_i$ einer ebenen Welle eine LORENTZ-Invariante.

Aus (10.4) folgt die Transformationsformel für den Winkel ϑ, den ein Lichtstrahl mit der x-Achse bildet:

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta'}{\gamma(\cos\vartheta' + \beta)} \quad \text{oder} \quad \cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta' + \beta}{1 + \beta\cos\vartheta'}. \tag{10.15}$$

Aufgaben zur LORENTZ-Transformation von Energie, Impuls und Kraft findet man in 11.1.

Aufgaben:

484. Das System S' bewege sich in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit V in bezug auf das System S. Eine Uhr, die im System S' im Punkt (x_0', y_0', z_0') ruht, bewege sich im Zeitpunkt t_0' am Punkt (x_0, y_0, z_0) im System S vorbei, in dem sich eine andere Uhr befinde, die in diesem Zeitpunkt die Zeit t_0 anzeigt. Wie lauten die Gleichungen der LORENTZ-Transformation in diesem Fall?

485. Das S'-System bewege sich in bezug auf das S-System mit der Geschwindigkeit V. Man zeige, daß beim Vergleich von Uhren in den Systemen S und S' immer diejenigen Uhren in einem der Bezugssysteme nachgehen, die nacheinander mit zwei Uhren im anderen Bezugssystem verglichen werden. Man drücke das eine Zeitintervall durch das andere aus. (Bewegte Uhren werden in dem Zeitpunkt miteinander verglichen, in dem sie sich aneinander vorbeibewegen.)

486. Die Länge eines Stabes, der sich in einem Bezugssystem in Richtung seiner Achse bewegt, kann folgendermaßen bestimmt werden: Man mißt das Zeitintervall, in dem sich der Stab an einem festen Punkt des Bezugssystems vorbeibewegt, und multipliziert es mit der Geschwindigkeit des Stabes. Man zeige, daß sich mit Hilfe dieser Meßvorschrift die LORENTZ-Kontraktion ergibt.

487. Das System S' bewege sich in bezug auf das System S mit der Geschwindigkeit V. Im Zeitpunkt der Übereinstimmung beider Koordinatenursprünge sollen die dort befindlichen Uhren beider Systeme dieselbe Zeit $t = t' = 0$ anzeigen. Welche Koordinaten hat dann in jedem dieser Systeme ein Weltpunkt mit der Eigenschaft, daß die in ihm befindlichen Uhren der Systeme S und S' dieselbe Zeit $t = t'$ anzeigen? Man bestimme das Bewegungsgesetz dieses Punktes.

488. Der „Zug" $A'B'$ (s. Abb. 73 der Lösungen), der in seinem Ruhsystem die Länge $l_0 = 8{,}64 \cdot 10^8$ km hat, bewege sich mit der Geschwindigkeit $V = 240\,000$ km/s an einer „Plattform" vorbei, die in ihrem Ruhsystem dieselbe Länge habe. An der Spitze B' und am Schluß A' des „Zuges" befinden sich zwei gleichartige, synchronisierte Uhren. Die gleichen Uhren befinden sich

am Anfang (A) und Ende (B) der „Plattform“. In dem Augenblick, in dem sich die Spitze des „Zuges“ am Anfang der „Plattform“ befand, zeigten die beiden entsprechenden Uhren übereinstimmend 12 h 00 min an. Man beantworte folgende Fragen:

a) Gibt es ein Bezugssystem, in dem zu diesem Zeitpunkt sämtliche Uhren genau 12 h 00 min anzeigen?

b) Welche Zeit zeigt jede der Uhren an, wenn sich der Schluß des „Zuges“ am Anfang der „Plattform“ befindet?

c) Welche Zeit zeigen die Uhren an, wenn sich die Spitze des „Zuges“ am Ende der „Plattform“ befindet?

489. Welchen Zeitraum Δt beansprucht die Reise mit einer Rakete zum Sternsystem Proxima Centauri [Entfernung 4 Lichtjahre[1])] und zurück nach den Erduhren, wenn sie mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \sqrt{0{,}9999}\,c$ erfolgt? Wie berechnet man die Reisedauer, für die man sich mit Lebensmitteln und anderen Vorräten versorgen muß? Wie groß ist der Vorrat kinetischer Energie einer solchen Rakete, wenn ihre Masse gleich 10 t ist?

490. Zwei Maßstäbe, von denen jeder die Ruhlänge l_0 hat, bewegen sich parallel zur gemeinsamen x-Achse gleichförmig aufeinander zu. Ein mit einem von ihnen verbundener Beobachter stellt fest, daß zwischen der Übereinstimmung der linken und rechten Enden der Maßstäbe die Zeit Δt verstrichen ist. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit v der Maßstäbe? In welcher Reihenfolge stimmen ihre Enden für einen Beobachter überein, für den sich beide Maßstäbe mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzten Seiten bewegen?

491. Wie lautet die LORENTZ-Transformation vom S'-System zum S-System für den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ und die Zeit t, wenn nicht vorausgesetzt wird, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ des Systems S' gegenüber dem System S parallel zur x-Achse ist? Man stelle das Ergebnis in vektorieller Form dar.

Hinweis: Man zerlege $\mathfrak{r}$ in Longitudinal- und Transversalkomponenten bezüglich $\mathfrak{V}$ und benutze die LORENTZ-Transformation (10.1).

492. Man gebe die LORENTZ-Transformation für einen beliebigen Vierervektor $A_i = (\mathfrak{A}, A_4)$ an, ohne vorauszusetzen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ des Systems S' in bezug auf das S-System der x-Achse parallel ist.

493. Wie lauten die Formeln für die Addition von Geschwindigkeiten für den Fall, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ des Systems S' in bezug auf das System S beliebig gerichtet ist? Die Beziehungen sind in vektorieller Form zu schreiben.

494. Vorgegeben seien die drei Bezugssysteme S, S' und S''; S'' bewege sich in bezug auf S' mit der Geschwindigkeit V' parallel zur x'-Achse und S' in bezug auf S mit der Geschwindigkeit V parallel zur x-Achse. Die entsprechenden Achsen aller drei Systeme seien zueinander parallel. Man schreibe die LORENTZ-Transformationen von S'' nach S auf und leite daraus die Formel für die Addition paralleler Geschwindigkeiten ab.

---

[1]) Unter einem Lichtjahr versteht man die Entfernung, die ein Lichtstrahl während eines Jahres im Vakuum zurücklegt.

495. Man beweise die Gleichung

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}\,\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\mathfrak{v}'\mathfrak{V}/c^2},$$

wobei $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeit eines Teilchens im System S bzw. S' und $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit von S' im System S bedeuten.

496. Man beweise die Beziehung

$$v = \frac{\sqrt{(\mathfrak{v}'+\mathfrak{V})^2-(\mathfrak{v}'\times\mathfrak{V})^2/c^2}}{1+\mathfrak{v}'\mathfrak{V}/c^2},$$

wobei $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeit eines Teilchens im System S bzw. S' und $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit von S' gegenüber S bezeichnen.

497. Zwei Maßstäbe, von denen jeder in seinem Ruhsystem die Länge l^0 habe, bewegen sich mit gleichen Geschwindigkeiten v gegen ein festes Bezugssystem aufeinander zu. Wie groß ist die Länge l jedes der Maßstäbe, gemessen im Ruhsystem des jeweils anderen Maßstabs?

498. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß sich die Maßstäbe mit gleichen Geschwindigkeiten v unter dem Winkel 90° zueinander in einem festen Bezugssystem bewegen.

499. Zwei Elektronenbündel fliegen mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}9c$ bezüglich des Laborsystems aufeinander zu. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit V der Elektronen

a) vom Standpunkt eines Beobachters im Laborsystem,

b) vom Standpunkt eines Beobachters, der sich mit einem der Elektronenbündel mitbewegt?

500. Effekte, die bei Zusammenstößen zweier Elementarteilchen entstehen, hängen nicht von einer gleichförmigen Bewegung der Teilchen als Ganzes ab, sondern nur von ihrer Relativgeschwindigkeit. Den stoßenden Teilchen kann auf zwei verschiedenen Wegen dieselbe Relativgeschwindigkeit mitgeteilt werden (der Einfachheit halber werde angenommen, daß alle Teilchen gleiche Masse m besitzen):

a) Dem Teilchen wird in einem Beschleuniger die Energie E verliehen, und anschließend trifft es auf ein ruhendes Target aus Teilchen derselben Sorte.

b) Zwei gleiche Beschleuniger sind so angeordnet, daß die von ihnen erzeugten Teilchenbündel aufeinander zu laufen; dabei muß jeder der Beschleuniger die Teilchen auf die Enregie $E_0 < E$ bringen.

Man vergleiche die Werte E und E_0 und untersuche insbesondere den extrem relativistischen Fall.

501. Man bestimme die Transformationsgleichungen der Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ für den Fall, daß sich das System S' gegen das System S mit der beliebig gerichteten Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bewegt. Man schreibe die Transformationsgleichungen in vektorieller Form.

502. Man drücke die Komponenten w_i der Viererbeschleunigung durch die gewöhnliche Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines Teilchens aus. Man berechne w_i^2. Ist die Viererbeschleunigung raum- oder zeitartig?

503. Man drücke die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}'$ eines Teilchens in seinem momentanen Ruhsystem durch seine Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ im Laborsystem aus. Man untersuche die Fälle, daß sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Teilchens nur dem Betrage bzw. der Richtung nach ändert.

504. Die in Aufgabe 489 betrachtete Rakete werde aus dem Ruhezustand auf die Geschwindigkeit $v = \sqrt{0{,}9999}\, c$ beschleunigt. Die Beschleunigung im momentanen Ruhsystem der Rakete sei $|\dot{\mathfrak{v}}| = 20\ \mathrm{m/s^2}$. Wie lange dauert die Beschleunigung der Rakete nach den Uhren eines unbewegten Bezugssystems und nach den Uhren in der Rakete?

Hinweis: Der mögliche Einfluß von Trägheitskräften auf den Gang der Uhren in der Rakete wird nicht berücksichtigt.[1])

505. In bezug auf das System S sollen sich das System S' mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ und zwei Körper mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ bewegen. Welchen Winkel α bilden die Geschwindigkeiten der Körper bei Beobachtung im S-System und im S'-System?

Hinweis: Man benutze die Resultate der Aufgaben 493 und 495.

506. Was geschieht mit dem Winkel zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Körper in der vorigen Aufgabe, wenn die Geschwindigkeit des S'-Systems relativ zum S-System gegen c strebt?

507. In einem bestimmten Zeitpunkt bilde der Lichtstrahl eines Fixsterns mit der Bahngeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Erde in dem mit der Sonne verbundenen System den Winkel ϑ. Man bestimme die Änderung der Richtung Erde–Stern während eines halben Jahres (Aberration des Lichtes) ohne Benutzung von Näherungen, die mit der Kleinheit von v/c zusammenhängen.

508. Man bestimme die sichtbare Kurve, die ein Fixstern an der Himmelskugel infolge der jährlichen Aberration beschreibt. Die Polarkoordinaten des Sterns seien in dem mit der Sonne verbundenen System gleich ϑ, α (die Polarachse stehe senkrecht auf der Erdbahnebene). Die Bahngeschwindigkeit der Erde ist $v \ll c$.

509. Ein Lichtbündel habe in einem bestimmten Bezugssystem den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$. Wie ändert sich $\mathrm{d}\Omega$ beim Übergang in ein anderes Inertialsystem?

510. Unter der Annahme, daß die Sterne in dem uns umgebenden Teil der Galaxis gleichförmig verteilt sind, ist ihre Verteilung $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega'$ für einen Beobachter in einer Rakete zu bestimmen, die nahezu mit Lichtgeschwindigkeit fliegt.

---

[1]) Das bedeutet, daß vorgeschlagen wird, die Summe der Eigenzeiten $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ in der Aufeinanderfolge der momentanen Ruhsysteme der Rakete zu bilden, die durch das Integral $\int \mathrm{d}\tau$ ausgedrückt wird. Näheres zu dieser Frage findet man in [23], § 62, sowie in [14] und [59].

511. Man bestimme die Transformationsgleichung für die Frequenz ω (DOPPLER-Effekt) und den Wellenvektor $\mathfrak{k}$ einer ebenen monochromatischen Lichtwelle beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes. Die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ habe beliebige Richtung.

512. Man bestimme die Frequenz ω einer Lichtwelle beim transversalen DOPPLER-Effekt. Im Ruhsystem des Lichtempfängers stehe die Ausbreitungsrichtung des Lichtes senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Quelle. Welche Ausbreitungsrichtung hat die betrachtete Welle im Ruhsystem der Quelle?

513. Das von einer Quelle emittierte Licht habe im Ruhsystem der Quelle die Wellenlänge λ_0. Welche Wellenlänge λ mißt

a) ein Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit V der Quelle nähert,

b) ein Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit V von der Quelle entfernt?

514*. Ein Spiegel bewege sich mit der Geschwindigkeit V senkrecht zu seiner Ebene. Man bestimme das Reflexionsgesetz für eine ebene monochromatische Welle am Spiegel (bei $V = 0$ sind Einfalls- und Ausfallswinkel gleich) sowie das Transformationsgesetz für die Frequenz bei der Reflexion. Insbesondere untersuche man den Fall $V \to c$.

515. Man löse die vorige Aufgabe für den Fall, daß sich der Spiegel in Richtung seiner Ebene bewegt.

516. Man führe den Viererwellenvektor ein, der die Ausbreitung einer ebenen monochromatischen Welle in einem mit der Geschwindigkeit V bewegten Medium mit dem Brechungsindex n beschreibt (die Phasengeschwindigkeit einer Welle im unbewegten Medium ist $v' = c/n$), und bestimme die Transformationsgleichungen für die Frequenz, den Ausbreitungswinkel und die Phasengeschwindigkeit.

517. Eine ebene Welle der Vakuumwellenlänge λ breite sich in einem mit der Geschwindigkeit V bewegten Medium in der Bewegungsrichtung des Mediums aus. Man bestimme die Geschwindigkeit v der Welle im Laborsystem (FIZEAUscher Versuch). Der Brechungsindex n wird im Ruhsystem S' des Mediums bestimmt und hängt von der Wellenlänge λ' in diesem System ab. Die Rechnungen sind mit einer Genauigkeit bis zur ersten Ordnung in V/c durchzuführen.

10.2. Viererverktoren und -tensoren

Beim Übergang von einem Inertialsystem (S') zu einem anderen (S) transformieren sich die Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = i\,c\,t$ gemäß

$$x_i = \alpha_{ik}\, x'_k. \tag{10.16}$$

Die Transformationsmatrix ist orthogonal:

$$\alpha_{il}\,\alpha_{kl} = \delta_{ik}, \quad \alpha_{li}\,\alpha_{lk} = \delta_{ik}. \tag{10.17}$$

Daher lautet die inverse Transformation

$$x_i' = \alpha_{k\,i}\, x_k. \tag{10.18}$$

Die Größe $s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ (Intervall) ist eine Invariante der LORENTZ-Transformation.

Die Matrix der Transformationskoeffizienten, die den Gleichungen (10.4) entspricht, ist

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{10.19}$$

Führt man zwei LORENTZ-Transformationen nacheinander aus, so sind die entsprechenden Matrizen nach der üblichen Regel der Matrizenmultiplikation zu multiplizieren (s. Abschnitt 1.1.).

Die Komponenten A_i eines Vierervektors (s. Abschnitt 10.1.) transformieren sich beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes wie die Koordinaten eines Weltpunktes:

$$A_i = \alpha_{ik} A_k', \qquad A_i' = \alpha_{k\,i} A_k. \tag{10.20}$$

Als vierdimensionalen Tensor (Vierertensor) N-ter Stufe bezeichnet man die Gesamtheit der 4^N Größen $T_{ik\ldots l}$, die sich beim Übergang in ein anderes Inertialsystem wie die Produkte der entsprechenden Koordinaten $x_i, x_k, \ldots, x_l$ transformieren:

$$T_{ik\ldots l} = \alpha_{ip}\,\alpha_{kr} \cdot \ldots \cdot \alpha_{ls} T'_{pr\ldots s}. \tag{10.21}$$

Die Determinante $|\alpha_{ik}|$ aus den Elementen der Matrix α der LORENTZ-Transformation kann gleich $+1$ [eigentliche LORENTZ-Transformation, z. B. (10.1)] oder gleich -1 [uneigentliche LORENTZ-Transformation] sein. Jede eigentliche LORENTZ-Transformation läuft auf eine Transformation der Form (10.1) und eine räumliche Drehung hinaus; man kann solche Transformationen als Drehungen im vierdimensionalen Raum auffassen. Uneigentliche LORENTZ-Transformationen enthalten außerdem die Spiegelung einer oder dreier Koordinaten.

Unter einem Pseudovierertensor N-ter Stufe versteht man die Gesamtheit von 4^N Größen $P_{ik\ldots l}$, die sich bei vierdimensionalen Koordinatentransformationen gemäß den Gleichungen

$$P_{ik\ldots l} = \alpha_{ip}\,\alpha_{kr} \cdot \ldots \cdot \alpha_{ls}\,|\alpha_{mn}| P_{pr\ldots s} \tag{10.22}$$

transformieren.

Der vollständig antisymmetrische Pseudovierertensor vierter Stufe (s. Aufgabe 521) ist ein Beispiel für einen Pseudovierertensor. Seine Komponenten e_{iklm} sind folgendermaßen definiert: *a*) e_{iklm} wechselt das Vorzeichen, wenn man zwei beliebige Indizes vertauscht, und *b*) es gilt $e_{1234} = 1$. Daraus folgt, daß die Komponenten e_{iklm} gleich Null sind, falls übereinstimmende Indizes vorkommen, und gleich ± 1, falls alle Indizes verschieden sind.

Aufgaben:

518. Man zeige, daß sich die Komponenten A_1, A_2, A_3 des Vierervektors $A_i = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ bei räumlichen Drehungen wie die Komponenten des dreidimensionalen Vektors $\mathfrak{A} = (A_1, A_2, A_3)$ transformieren und die Komponente A_4 ein dreidimensionaler Skalar ist.

519. In welche dreidimensionalen Tensoren zerfällt ein Vierertensor zweiter Stufe bei räumlichen Drehungen?

520. Man zeige, daß sich die Komponenten eines antisymmetrischen Vierertensors zweiter Stufe bei räumlichen Drehungen wie die Komponenten zweier unabhängiger dreidimensionaler Vektoren transformieren.

521. Man zeige, daß sich die in der Einführung dieses Abschnitts definierte Größe e_{iklm} tatsächlich wie ein Pseudovierertensor transformiert.

522. Man beweise die Gleichungen

a) $e_{iklm}\, e_{lmrs} = 2\,(\delta_{ir}\,\delta_{ks} - \delta_{is}\,\delta_{kr})$,

b) $e_{iklm}\, e_{klmn} = -6\,\delta_{in}$.

523. Man beweise die Beziehung

$$e_{iklm}\, e_{lmrs} A_i B_k C_r D_s = 2(A_i C_i)\,(B_k D_k) - 2(A_i D_i)\,(B_k C_k).$$

524. Wie transformieren sich die Größen

a) $\partial\varphi/\partial x_i$,

b) $\partial A_i/\partial x_k$,

c) $T_{ik} A_k$,

wobei φ einen Skalar, A_i einen Vektor und T_{ik} einen Tensor bezeichnet?

525. Zwei Vierervektoren A_i und B_i heißen parallel, wenn

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4}$$

gilt. Man zeige, daß das Verhältnis gleichnamiger Komponenten paralleler Vierervektoren eine LORENTZ-Invariante ist.

526. Wieviel wesentlich verschiedene Komponenten hat ein Vierertensor dritter Stufe, der gegenüber der Vertauschung eines beliebigen Indexpaares antisymmetrisch ist? Man zeige, daß sie sich bei Drehungen wie die Komponenten eines vierdimensionalen Pseudovektors transformieren.

527. Gegeben seien drei Bezugssysteme S, S' und S''; S'' bewege sich in bezug auf S' mit der Geschwindigkeit V' parallel zur x'-Achse und S' in bezug auf S mit der Geschwindigkeit V parallel zur x-Achse. Die entsprechenden Achsen aller drei Systeme seien einander parallel. Durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen erhält man die Transformationsmatrix von S'' nach S. Man leite daraus die Formel (10.11) für die Addition gleichgerichteter Geschwindigkeiten ab.

528. Man schreibe die LORENTZ-Transformation (10.1) in den Variablen $x_1, x_2, x_3, x_0 = c\,t$ und drücke die Relativgeschwindigkeit V mit Hilfe der Formel $V/c = \tanh\alpha$ durch den Winkel α aus.

529. Man bestimme die Matrix $\boldsymbol{g}$ der Transformation von S' nach S durch Multiplikation der Matrizen der einfachen Transformationen. S' bewege sich in bezug auf S mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ ($V/c = \tanh\alpha$) in der durch die Polarwinkel ϑ, φ bestimmten Richtung. Entsprechende Achsen von S und S' seien parallel.

10.3. Relativistische Elektrodynamik

Wir geben zunächst die Hauptgleichungen der relativistischen Elektrodynamik im Vakuum an. Die dreidimensionale Stromdichte $\mathfrak{j} = \varrho\,\mathfrak{v}$ und die Raumladungsdichte ϱ bilden den Vierervektor der Stromdichte (die Viererstromdichte):

$$j_i = (\mathfrak{j}, i\,c\,\varrho). \tag{10.23}$$

Elektrisches und magnetisches Feld sind Komponenten des antisymmetrischen elektromagnetischen Feldtensors

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.24}$$

Beim Übergang vom S'-System in das S-System transformieren sich die Feldkomponenten gemäß den Gleichungen (x- und x'-Achse sind der Relativgeschwindigkeit parallel):

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta H'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta H'_y),\\ H_x &= H'_x, & H_y &= \gamma(H'_y - \beta E'_z), & H_z &= \gamma(H'_z + \beta E'_y). \end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

Die Größen

$$H^2 - E^2 = \text{inv}, \qquad \mathfrak{E}\,\mathfrak{H} = \text{inv} \tag{10.26}$$

sind LORENTZ-invariant. Vektor- und skalares Potential $\mathfrak{A}$ bzw. φ bilden den Vierervektor des Potentials (das Viererpotential)

$$A_i = (\mathfrak{A}, i\,\varphi). \tag{10.27}$$

Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors im Vakuum werden durch die Gleichungen

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl} - \frac{1}{4}\,\delta_{ik}F_{lm}^2\right) \tag{10.28}$$

definiert.

Die neun räumlichen Komponenten des Tensors T_{ik} bilden den MAXWELLschen Spannungstensor

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta\right) + \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right)\delta_{\alpha\beta}. \tag{10.29}$$

Die Raum-Zeit-Komponenten von T_{ik} sind den Komponenten der Energiestromdichte $\mathfrak{S}$ und der Impulsdichte $\mathfrak{g}$ des Feldes proportional:

$$\left.\begin{aligned} T_{4\alpha} &= \frac{i}{c} S_\alpha, \quad \mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}), \\ T_{\alpha 4} &= i\,c\,g_\alpha, \quad \mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) = \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{S}. \end{aligned}\right\} \tag{10.30}$$

Die zeitliche Komponente von T_{ik} hängt durch die Beziehung

$$T_{44} = -w = -\frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \tag{10.31}$$

mit der Dichte der Energie W des Feldes zusammen.

Die Divergenz des Tensors T_{ik} bestimmt die räumliche Kraftdichte

$$f_i = \left[\mathfrak{f}, \frac{i}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{f})\right],$$

die an den Ladungen angreift:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -f_i = -\frac{1}{c} F_{ik}\, j_k. \tag{10.32}$$

In der relativistischen Elektrodynamik in Medien bilden die Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ zwei antisymmetrische Vierertensoren zweiter Stufe, den Feldtensor

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \tag{10.33}$$

und den Induktionstensor

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.34}$$

Polarisations- und Magnetisierungsvektor $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ bilden ebenfalls einen Vierertensor:

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & iP_x \\ -M_z & 0 & M_x & iP_y \\ M_y & -M_x & 0 & iP_z \\ -iP_x & -iP_y & -iP_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.35}$$

Die Gleichungen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\,\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}$$

werden zu der Beziehung

$$H_{ik} = F_{ik} - 4\pi M_{ik} \tag{10.36}$$

zusammengefaßt.

Die Viererkraft f_i, die seitens des Feldes an der Volumeneinheit des Mediums angreift, wird durch die Beziehung

$$f_i = \left\{\mathfrak{f}, \frac{i}{c}[Q + (\mathfrak{f}\,\mathfrak{v})]\right\} \tag{10.37}$$

definiert. Dabei bedeuten $\mathfrak{f}$ die an der Volumeneinheit angreifende ponderomotorische Kraft und Q die JOULEsche Wärme, die je Zeit- und Volumeneinheit abgegeben wird.

Aufgaben:

530. Wie lauten die Transformationsgleichungen für die Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und den Polarisations- und Magnetisierungsvektor $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ beim Übergang zum System S', das sich relativ zum System S mit der beliebig gerichteten Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bewegt? Die Transformationsgleichungen sind in vektorieller Form zu schreiben.

Hinweis: Man benutze die in der Aufgabe 529 berechneten Ausdrücke für die Transformationskoeffizienten und die Antisymmetrie der Tensoren F_{ik}, H_{ik} und M_{ik}.

531. Im Bezugssystem S bestehe ein homogenes elektromagnetisches Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$. Mit welcher Geschwindigkeit relativ zu S muß sich ein System S' bewegen, in dem $\mathfrak{E}' \parallel \mathfrak{H}'$ gilt? Ist das Problem immer lösbar, und besitzt es immer eine eindeutige Lösung? Wie groß sind die Beträge von $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$?

532. Im Bezugssystem S sollen ein elektrisches und ein magnetisches Feld aufeinander senkrecht stehen: $\mathfrak{E} \perp \mathfrak{H}$. Mit welcher Geschwindigkeit gegenüber S muß sich ein System S' bewegen, in dem nur ein elektrisches bzw. nur ein magnetisches Feld vorhanden ist? Existiert immer eine Lösung, und ist sie immer eindeutig?

533. Ein unendlich langer Kreiszylinder sei gleichförmig mit der Liniendichte $\varkappa$ geladen. Auf der Zylinderachse fließe der gleichförmig verteilte Strom I. Im ganzen Raum sei $\varepsilon = \mu = 1$. Man bestimme ein Bezugssystem, in dem es nur ein elektrisches bzw. nur ein magnetisches Feld gibt, und berechne die Größe dieser Felder.

534. Man bestimme die Induktionsspannung, die bei der Bewegung eines Leiters im Magnetfeld $\mathfrak{B}$ entsteht. Man benutze entweder die Transformationsformeln für die Feldstärken oder die Transformationsformeln für die Potentiale.

535. Man bestimme die Felder φ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ der gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bewegten Punktladung e durch LORENTZ-Transformation aus dem Ruhsystem der Punktladung.

536. Man zeige, daß das elektrische Feld einer sich gleichförmig bewegenden Punktladung in der Bewegungsrichtung „abgeplattet" wird. Dabei schwächt

sich das Feld in der Bewegungsbahn der Ladung im Vergleich zum COULOMB-Feld ab. Wie hängt diese Abschwächung mit der Transformationsgleichung $E_{||} = E'_{||}$ zusammen?

537. Ein elektrischer Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}_0$ bewege sich im Ruhsystem gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$. Man bestimme das durch ihn erzeugte elektromagnetische Feld φ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$.

538. Man bestimme die Transformationsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Dipolmomente $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{m}$ eines polarisierten und magnetisierten Körpers durch Übergang vom Inertialsystem, in dem der Körper ruht, in ein anderes Inertialsystem.

Hinweis: Man gehe von den Transformationsgleichungen für den Polarisations- und den Magnetisierungsvektor $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ aus.

539. Eine ungeladene rechteckige Drahtschleife (Seitenlängen a und b) mit dem Strom I' bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ parallel zur Seite a. Die Leitung habe einen endlichen Querschnitt. Man bestimme die Verteilung der elektrischen Ladungen in der Schleife sowie ihr elektrisches und ihr magnetisches Moment im Laborsystem.

540. Mit Hilfe der Definition der Viererkraftdichte bestimme man das relativistische Transformationsgesetz für die JOULEsche Wärme Q.

541. Man bestimme die Transformationsgleichungen für die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors T_{ik} bei einer LORENTZ-Transformation [s. (10.1)].

542. Wie groß ist die Summe der Diagonalelemente (Spur) des Energie-Impuls-Tensors [s. (10.28)]?

543*. Ein elektromagnetisches Feld sei nur innerhalb eines endlichen Volumens V, in dem keine Ladungen vorhanden sind, von Null verschieden. Man zeige, daß Gesamtenergie und -impuls des Feldes einen Vierervektor bilden.

544*. Der Gesamtdrehimpuls eines Systems, das aus einem elektromagnetischen Feld im Vakuum und Punktladungen besteht, kann mit Hilfe der Gleichung[1])

$$L_{ik} = -\frac{i}{c}\int\limits_t (x_i T_{kl} - x_k T_{il})\, \mathrm{d}S_l + \sum (x_i\, p_k - x_k\, p_i)$$

bestimmt werden, in der über die Hyperebene $x_4 = i\,c\,t = \text{const}$ integriert wird. Die Summe erstreckt sich über alle Teilchen; dabei sind die Werte x_i, p_k in den Schnittpunkten der Weltlinien der entsprechenden Ladungen mit der

---

[1]) Mit Hilfe der Definition des Tensors T_{ik} kann man leicht unmittelbar zeigen, daß der räumliche Anteil $L_{\alpha\beta}$ des Tensors L_{ik} einen antisymmetrischen Tensor bildet, der dem Vektor

$$\mathfrak{L} = \int \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}\, \mathrm{d}V + \sum \mathfrak{r} \times \mathfrak{p}$$

äquivalent ist, wobei $\mathfrak{g} = (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})/4\pi\, c$ die Impulsdichte des Feldes ist.

Hyperebene $x_4 = \text{const}$ zu nehmen. Unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} F_{ik} j_k$$

beweise man, daß der Gesamtdrehimpuls L_{ik} des Systems erhalten bleibt.

545*. Ein System bestehe aus Teilchen und einem elektromagnetischen Feld im Vakuum und nehme ein endliches Volumen ein. Aus der Bilanz des Gesamtdrehimpulses $L_{\alpha\beta}$ dieses Systems bestimme man den Ausdruck für die Drehimpulsdichte $\mathfrak{R}$ des Feldes. Dabei ist der in der vorigen Aufgabe angegebene Ausdruck für L_{ik} zu benutzen.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[9] Becker, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. 2: Elektronentheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig–Berlin 1933.

[11] Bergmann, P. G.: Introduction to the Theory of Relativity. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs/N.J. 1942.

[14] Born, M.: Optik. Springer-Verlag, Berlin 1933.

[20] Einstein, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956.

[23] Fock, V.: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Akademie-Verlag, Berlin 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[25] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 1: Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Springer-Verlag, Berlin 1926 (Übers. aus dem Russ.); Ausgewählte Werke Bd. 1. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1956 (Собрание избранных трудов, т. I).

[26] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[43] Gurewitsch, L. E.: Elektrodynamik. Verlag der Staatlichen Universität Leningrad, Leningrad 1940 (*Л. Э. Гуревич:* Электродинамика).

[44] Heitler, W.: The Quantum Theory of Radiation. Clarendon Press, Oxford 1954.

[50] Kompaneyets, A. S.: Theoretical Physics. Foreign Languages Publishing House, Moscow 1961.

[53] Landau, L. D., und E. M. Lifschiz: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[55] Landau, L. D., und E. M. Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[59] Leffert, C. B., und T. M. Donahne: Clock Paradox and the Physics of Discontinuous Gravitational Fields. Amer. J. Phys. **26** (1958), S. 515.

[61] Mandelschtam, L. I.: Gesammelte Werke, Bd. 5: Vorlesungen über Relativitätstheorie. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1950 (*Л. И. Мандельштам:* Полное собрание трудов, т. V: Лекции по теории относительности).

[64] Minkowski, H.: Raum und Zeit. Phys. Z. **10** (1909), S. 104.

[67] Panofsky, W., und M. Phillips: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.

[68] Pauli, W.: Relativitätstheorie, in: Handbuch der Physik, Bd. V/19. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1921.

11. RELATIVISTISCHE MECHANIK

11.1. Energie und Impuls

Der Impuls $\mathfrak{p}$ eines relativistischen Teilchens hängt durch die Beziehung

$$\mathfrak{p} = \frac{m\,\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.1}$$

mit dessen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zusammen, wobei m die Teilchenmasse bedeutet. Die Gesamtenergie E eines sich frei bewegenden Teilchens kann durch die Geschwindigkeit oder durch den Impuls ausgedrückt werden:

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11.2}$$

$$E = c\,\sqrt{p^2 + m^2\,c^2}. \tag{11.3}$$

Die kinetische Energie eines Teilchens unterscheidet sich von seiner Gesamtenergie um die Ruhenergie $E_0 = m\,c^2$:

$$T = E - m\,c^2. \tag{11.4}$$

Energie, Impuls und Geschwindigkeit eines Teilchens hängen durch die Beziehung

$$E\,\mathfrak{v} = c^2\,\mathfrak{p} \tag{11.5}$$

miteinander zusammen. Energie und Impuls sind zeitliche bzw. räumliche Komponenten des Energie-Impuls-Vierervektors (Viererimpulses)

$$p_i = \left(\mathfrak{p}, i\frac{E}{c}\right). \tag{11.6}$$

Beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes transformieren sich Energie und Impuls gemäß den Gleichungen (10.4). Das Quadrat des Viererimpulses ist eine relativistische Invariante:

$$p_i^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2\,c^2. \tag{11.7}$$

Man bezeichnet ein Teilchen als nichtrelativistisch, wenn seine kinetische Energie klein, und als extrem relativistisch, wenn seine kinetische Energie groß gegen die Ruhenergie ist. Die Geschwindigkeit eines extrem relativistischen Teilchens ist nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit, und der Impuls hängt

mit der Energie durch die Beziehung

$$E = c\,p \tag{11.8}$$

zusammen. Teilchen mit verschwindender Masse und Ruhenergie (Photon, Neutrino) sind immer extrem relativistisch; ihre Geschwindigkeit ist exakt gleich c.

Energie und Impuls eines Photons im Vakuum sind mit seiner Frequenz durch die Beziehungen

$$E = \hbar\,\omega, \qquad p = \frac{\hbar\,\omega}{c} = \hbar\,k \tag{11.9}$$

verknüpft, wobei $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg s die PLANCKsche Konstante bedeutet.

Gesamtenergie und Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems von Teilchen sind Erhaltungsgrößen. Wie daraus folgt, ist für den Fall, daß die Teilchen vor Beginn und nach Abschluß einer Reaktion (Zerfall oder Stoß) nicht miteinander in Wechselwirkung stehen, der Vierer-Gesamtimpuls zu Anfang, $p_i^{(0)}$, gleich dem gesamten Viererimpuls am Ende, p_i:

$$\sum_a p_{ai}^{(0)} = \sum_b p_{b\,i}. \tag{11.10}$$

Dabei wird über alle vor bzw. nach der Reaktion vorhandenen Teilchen summiert.

Bei der Untersuchung von Stoßproblemen empfiehlt es sich, entweder das Laborsystem S oder das Massenmittelpunktsystem S', in dem der Gesamtimpuls $\mathfrak{p}$ Null ist, zu verwenden. Ein nützliches Verfahren ist es auch, die Invarianz des Quadrates des Viererimpulses auszunutzen (s. die Lösungen der Aufgaben 561, 574, 580).

Man unterscheidet zwei Arten von Stößen: elastische, bei denen sich die inneren Zustände und folglich auch die Massen der Teilchen nicht ändern, und unelastische, bei denen sich die inneren Energien (Massen) der stoßenden Teilchen ändern, vorhandene Teilchen verschwinden oder neue entstehen. Bei einem unelastischen Stoß zweier Teilchen unterscheidet sich die Summe $m_1 + m_2$ der Massen der stoßenden Teilchen von der Summe M_k der Massen der entstehenden Teilchen um

$$\Delta M = m_1 + m_2 - M_k. \tag{11.11}$$

Die Größe $Q = c^2 \Delta M$ bezeichnet man als Wärmetönung der Reaktion.

In der Tabelle 11.1 sind die Ruhenergien einiger Elementarteilchen angegeben. Günstige Maßeinheiten der Energie sind die Ruhenergie $m_e c^2$ des Elektrons sowie $1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-12}$ erg, $1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV}$, $1\ \text{GeV} = 10^9\ \text{eV}$.

Die Tabelle 11.2 enthält die Bindungsenergien B einiger Atomkerne. Dabei wird unter der Bindungsenergie die Größe

$$B = \Delta M c^2 = \sum E_{0\mathrm{N}} - E_{0\mathrm{K}}$$

verstanden, wobei $E_{0\mathrm{N}}$ die Ruhenergie eines Nukleons und $E_{0\mathrm{K}}$ die des Kernes bedeuten.

Tabelle 11.1

Teilchen	E_0	
	in Einheiten $m_e c^2$	[MeV]
Elektron	1	0,511
μ-Meson	207	106
π^0-Meson	264	135
$\pi^{\pm}$-Meson	273	139
K-Meson	966	494
Proton	1836	938
Λ-Hyperon	2181	1115

Tabelle 11.2

Nuklid	B [MeV]
${}^2_1$H	2,18
${}^4_2$He	28,11
${}^7_3$Li	38,96

Aufgaben:

546. Man drücke den Impuls p eines relativistischen Teilchens durch seine kinetische Energie T aus.

547. Man drücke die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines Teilchens durch seinen Impuls $\mathfrak{p}$ aus.

548. Ein Teilchen mit der Masse m habe die Energie E. Man bestimme die Geschwindigkeit v des Teilchens und betrachte insbesondere den nichtrelativistischen und den extrem relativistischen Grenzfall.

549. Unter der Voraussetzung $v \ll c$ bestimme man Näherungsausdrücke für die kinetische Energie T eines Teilchens der Masse m, ausgedrückt

a) durch seine Geschwindigkeit v,

b) durch seinen Impuls p,

bis auf v^4/c^4 bzw. $p^4/m^4 c^4$ genau.

550. Man bestimme die Geschwindigkeit v eines Teilchens der Masse m und der Ladung e, das die Potentialdifferenz V durchlaufen hat (die Anfangsgeschwindigkeit sei Null). Wie vereinfacht sich die Gleichung im nichtrelativistischen und im extrem relativistischen Grenzfall (bei der Entwicklung sind zwei Terme zu berücksichtigen)?

551. Man bestimme die Geschwindigkeit v der Teilchen in den folgenden Fällen:

a) Elektronen in einer Elektronenröhre ($E = 300$ eV),

b) Elektronen in einem 300-MeV-Synchrotron,

c) Protonen in einem 680-MeV-Synchrozyklotron,

d) Protonen in einem 10-GeV-Synchrophasotron.

552. In einem Linearbeschleuniger wird ein Teilchen in den Spalten zwischen Hohlzylinderelektroden (Laufzeitröhren) beschleunigt, auf deren gemeinsamer Achse die Teilchenbahn verläuft. Die Beschleunigung erfolgt unter der Wirkung eines elektrischen HF-Feldes der Frequenz $\nu = \text{const}$. Beschleunigt werden die Teilchen, die alle Spalte zwischen den Röhren genau dann durchlaufen, wenn dort ein Beschleunigungsfeld vorhanden ist. Wie lang müssen die Laufzeitröhren sein, damit ein Teilchen der Masse m und der Ladung e die Be-

schleunigungsspalte immer gerade in den Augenblicken durchfliegt, in denen dort maximale Spannung V_e herrscht? Man schätze ferner die Gesamtlänge eines Beschleunigers mit N Laufzeitröhren ab.

553. Ein Strom monochromatischer μ-Mesonen, die in den oberen Schichten der Atmosphäre erzeugt werden,[1]) falle vertikal nach unten. Wie groß ist das Verhältnis der μ-Mesonenströme in der Höhe h über dem Meeresspiegel (I_h) und in Höhe des Meeresspiegels (I_0) unter der Annahme, daß in der betrachteten Luftschicht der Dicke h der Mesonenstrom nur durch den natürlichen Zerfall der μ-Mesonen geschwächt wird? Die Energie der μ-Mesonen sei $E = 4{,}2 \cdot 10^8$ eV, die Halbwertzeit des ruhenden μ-Mesons $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ s und $h = 3$ km.

554. Das Bezugssystem S' bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ gegenüber dem Bezugssystem S. Ein Teilchen mit der Masse m, das im System S' die Energie E' und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ besitzt, bewege sich unter dem Winkel ϑ' gegen die Richtung von $\mathfrak{V}$. Man bestimme den Winkel ϑ zwischen dem Impuls $\mathfrak{p}$ des Teilchens und der Richtung von $\mathfrak{V}$ im S-System. Man drücke Energie und Impuls des Teilchens im S-System durch ϑ', E' oder ϑ', v' aus. Insbesondere ist der extrem relativistische Fall $E' \gg m c^2$, $V \approx c$ zu untersuchen. Man zeige, daß man in diesem Fall in einem bestimmten (welchem?) Winkelintervall die Näherungsformel

$$\vartheta = \frac{1}{\gamma} \tan \frac{\vartheta'}{2}$$

benutzen kann.

555*. Das System S' bewege sich gegenüber dem System S mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$. Die Winkelverteilung der Teilchen, die im S'-System dieselbe Energie E' haben, wird durch die Funktion $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\Omega' = F'(\vartheta', \alpha')$ beschrieben, wobei $\mathrm{d}W$ den Teil der Teilchen bedeutet, der sich im System S' innerhalb des Raumwinkels $\mathrm{d}\Omega'$ bewegt. Die übliche Normierung ist

$$\int \mathrm{d}W = \int F'(\vartheta', \alpha')\, \mathrm{d}\Omega' = 1;$$

ϑ' wird von der Richtung von $\mathfrak{V}$ aus gezählt. Man bestimme die Winkelverteilung dieser Teilchen im S-System und betrachte insbesondere den extrem relativistischen Fall.

556. Ein π^0-Meson bewege sich mit der Geschwindigkeit v und zerfalle im Fluge in zwei γ-Quanten. Man bestimme die Winkelverteilung $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\Omega$ der γ-Quanten im Laborsystem unter der Annahme, daß sie im Ruhsystem des π^0-Mesons kugelsymmetrisch ist.

557. Man drücke die Energie des in der vorigen Aufgabe betrachteten π^0-Mesons durch das Verhältnis f der Anzahl der γ-Quanten aus, die in die vordere, zur Anzahl der γ-Quanten, die in die hintere Halbkugel emittiert werden.

---

[1]) Die Aufgabe ist idealisiert formuliert.

558*. Wie hängt die Energie eines γ-Quants, das beim Zerfall eines π^0-Mesons entsteht (s. Aufgabe 556), vom Winkel ϑ zwischen den Bewegungsrichtungen des γ-Quants und des π^0-Mesons ab? Man bestimme das Energiespektrum der beim Zerfall entstehenden γ-Quanten im Laborsystem.

Hinweis: Aus dem Energie-Impuls-Satz folgt, daß die Energie des γ-Quants im Ruhsystem des π^0-Mesons $E' = m\,c^2/2$ ist, wobei m die Masse des π^0-Mesons bedeutet.

559. Man zeige, daß das Energiespektrum der beim Zerfall entstehenden γ-Quanten im Laborsystem unabhängig von der Form des Energiespektrums der π^0-Mesonen ein Maximum bei $E = E'$, $E' = m\,c^2/2$ hat, wobei m die Masse des π^0-Mesons bedeutet. E_1 und E_2 seien beliebige Energien der γ-Quanten auf verschiedenen Seiten dieses Maximums, die demselben Wert der Verteilungsfunktion entsprechen. Man drücke die Masse m des π^0-Mesons durch E_1 und E_2 aus.

Hinweis: Man benutze das Energiespektrum der γ-Quanten aus der Aufgabe 558.

560. Ein Teilchen mit der Energie E und der Masse m_1 treffe auf ein ruhendes Teilchen der Masse m_2. Man bestimme die Geschwindigkeit v des Massenmittelpunktes gegenüber dem Laborsystem bei diesem Stoß.

561*. Zwischen einem Teilchen der Masse m_1 und der Energie E_0 und einem ruhenden Teilchen der Masse m_2 erfolge ein elastischer Stoß. Man drücke die Streuwinkel ϑ_1 und ϑ_2 der Teilchen im Laborsystem durch ihre Energien E_1, E_2 nach dem Stoß aus.

562. Ausgehend von der Lösung der vorigen Aufgabe, drücke man die Energie der elastisch stoßenden Teilchen durch die Streuwinkel im Laborsystem aus.

563. Ein Teilchen der Masse m stoße elastisch mit einem ruhenden Teilchen derselben Masse zusammen. Man drücke die kinetische Energie T_1 des gestreuten Teilchens durch die kinetische Energie T_0 des ankommenden Teilchens und den Streuwinkel ϑ_1 aus.

564. Mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 562 bestimme man im nichtrelativistischen Fall die kinetischen Energien T_1 und T_2 der elastisch stoßenden Teilchen in Abhängigkeit von der kinetischen Anfangsenergie T_0 des ersten Teilchens und den Streuwinkeln ϑ_1 und ϑ_2 im Laborsystem (das zweite Teilchen ruhe vor dem Stoß).

565. Zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 stoßen elastisch miteinander zusammen. Ihre Geschwindigkeiten im Massenmittelpunktsystem seien v_1' und v_2', und der Streuwinkel sei ϑ'; die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktsystems gegen das Laborsystem sei V. Man bestimme den Winkel χ, unter dem die Teilchen im Laborsystem auseinanderfliegen. Insbesondere betrachte man den Fall $m_1 = m_2$.

566. Ein Lichtquant der Frequenz ω_0 werde an einem sich gleichförmig bewegenden freien Elektron gestreut. Der Impulsvektor $\mathfrak{p}_0$ des Elektrons bilde mit der Bewegungsrichtung des Quants den Winkel ϑ_0. Wie hängt die Fre-

quenz ω des gestreuten Photons von seiner Bewegungsrichtung ab? Insbesondere untersuche man den Fall, daß das Elektron vor dem Stoß ruht (COMPTON-Effekt).

567*. Ein Teilchen der Sorte 1, das im System S die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ besitze, werde an einem ruhenden Teilchen der Sorte 2 gestreut. Wie transformiert sich der Streuquerschnitt $d\sigma_{12}$ beim Übergang zum System S', in dem die Teilchen der Sorte 2 die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2'$ und die Teilchen der Sorte 1 die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1'$ haben? Insbesondere untersuche man den Fall, daß die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_2'$ parallel sind.

Hinweis: Als Streuquerschnitt $d\sigma_{12}$ bezeichnet man das Verhältnis der Zahl der Teilchen, die in der Zeiteinheit durch ein Streuzentrum in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden, zur Stromdichte der zu streuenden Teilchen $J_{12} = n_1 v_0$, wobei n_1 die Zahl der zu streuenden Teilchen je Volumeneinheit und $v_0 = |\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2|$ die Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen der ersten und der zweiten Sorte bedeuten (s. Aufgabe 499).

568. Wie groß ist die Masse m eines Teilchens, von dem man weiß, daß es in zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 zerfällt? Experimentell kennt man die Größen p_1 und p_2 der Impulse der beim Zerfall entstehenden Teilchen und den Winkel ϑ zwischen ihren Richtungen.

569. Man bestimme die Masse m_1 eines Teilchens, von dem man weiß, daß es eines von zwei Teilchen ist, die beim Zerfall eines Teilchens mit der Masse m und dem Impuls p entstehen. Impuls p_2, Masse m_2 und Flugwinkel ϑ_2 des zweiten beim Zerfall entstehenden Teilchens seien bekannt.

570. Ein Teilchen mit der Masse m_1 und der Geschwindigkeit v stoße mit einem ruhenden Teilchen der Masse m_2 zusammen und absorbiere es. Man bestimme Masse m und Geschwindigkeit V des entstehenden Teilchens.

571. Ein ruhender Körper mit der Masse m_0 zerfalle in zwei Teile mit den Massen m_1 und m_2. Man bestimme die Verteilung der Zerfallsenergie $\Delta E = (m_0 - m_1 - m_2) c^2$ auf die Teile 1 und 2.

572. Man bestimme die Verteilung der Zerfallsenergie (im Ruhsystem des zerfallenden Teilchens) auf

a) α-Teilchen und Tochterkern beim α-Zerfall des ^{238}U,

b) μ-Meson und Neutrino (ν) beim Zerfall des π-Mesons ($\pi \to \mu + \nu$),

c) γ-Quant und Rückstoßkern bei der Emission eines γ-Quants.

Man betrachte insbesondere den Fall $A = 20, \Delta E = 2$ MeV.

573. Ein ruhender angeregter Kern (Anregungsenergie ΔE) emittiere ein γ-Quant. Man bestimme seine Frequenz ω. Die Masse des angeregten Kerns sei m.

574*. Ein Teilchen der Masse m treffe auf ein ruhendes Teilchen der Masse m_1. Es finde eine Reaktion statt, bei der mehrere Teilchen mit der Gesamtmasse M erzeugt werden. Bei $m + m_1 < M$ ist die Reaktion bei kleinen kinetischen Energien des ankommenden Teilchens durch den Energieerhaltungssatz verboten. Man bestimme die minimale kinetische Energie des ankommenden Teil-

chens (die Energieschwelle T_0 der Reaktion), bei der die Reaktion energetisch möglich wird.

575. Man bestimme die Energieschwellen der folgenden Reaktionen:

a) Erzeugung eines π-Mesons beim Stoß zweier Nukleonen ($N + N \to \to N + N + \pi$),

b) Photoerzeugung eines π-Mesons an einem Nukleon ($N + \gamma \to N + \pi$),

c) Erzeugung eines K-Mesons und eines Hyperons beim Stoß eines π-Mesons mit einem Nukleon ($\pi + N \to \Lambda + K$),

d) Erzeugung eines Proton-Antiproton-Paares beim Stoß eines Protons der Masse m_p mit einem Kern der Masse m. Man betrachte insbesondere den Stoß mit einem Proton. Unter der Annahme $m \approx m_p A$ schätze man die Schwelle für die Erzeugung eines Antiprotons an einem Kern mit der Massenzahl A ab.

576. Man berechne einen Näherungsausdruck für die Energieschwelle T_0 einer Reaktion, bei der die Massenänderung ΔM der stoßenden Teilchen einen kleinen Teil ihrer Gesamtmasse M darstellt („Reaktion zwischen nichtrelativistischen Teilchen“). Man benutze die erhaltene Formel zur Bestimmung der Energieschwellen T_0 der folgenden Reaktionen:

a) Photospaltung des Deuterons ($\gamma + {}^2_1\mathrm{H} \to \mathrm{p} + \mathrm{n}$),

b) ${}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^7_3\mathrm{Li} + \mathrm{p}$.

Man vergleiche die erhaltenen Näherungswerte mit den exakten (s. Aufgabe 574).

577. Man zeige, daß die Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares durch ein γ-Quant nur dann möglich ist, wenn an der Reaktion ein Teilchen mit der Ruhmasse $m_1 \neq 0$ beteiligt ist (dieses Teilchen ändert sich nicht; seine Rolle besteht darin, einen Teil der Energie und des Impulses aufzunehmen, damit der Erhaltungssatz erfüllt wird). Man bestimme die Schwelle T_0 für diese Reaktion.

578. Man zeige, daß die Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paares unter Emission eines γ-Quants durch den Energie-Impuls-Satz verboten ist, daß für die Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paares mit Emission zweier γ-Quanten jedoch kein Verbot besteht.

579. Man zeige, daß die Emission oder die Absorption von Licht durch freie Elektronen im Vakuum nicht möglich ist. (Man gehe vom Energie-Impuls-Satz aus.)

580*. Man zeige, daß bei gleichförmiger Bewegung eines geladenen freien Teilchens (Masse m, Ladung e, Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$) in einem Medium mit dem Brechungsindex $n(\omega)$ elektromagnetische Wellen emittiert werden können (TSCHERENKOW-Effekt).[1] Man drücke den Winkel ϑ zwischen der Ausbreitungsrichtung der Welle und der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Teilchens durch $v, \omega, n(\omega)$ aus (vgl. Aufgabe 727).

Hinweis: Im ruhenden Medium mit dem Brechungsindex $n(\omega)$ hat ein Photon die Energie $E = \hbar\,\omega$ und den Impuls $p = n(\omega)\,\hbar\,\omega/c$.

---

[1]) Ein analoger Effekt tritt auch beim Durchgang eines neutralen Teilchens mit elektrischem oder magnetischem Moment durch Materie auf.

581. Man zeige, daß ein freies Elektron, das sich in einem Medium mit der Geschwindigkeit v bewegt, elektromagnetische Wellen absorbieren kann, deren Frequenz der Ungleichung $v > c/n(\omega)$ genügt, wobei $n(\omega)$ den Brechungsindex des Mediums bezeichnet.

582*. Ein in einem angeregten Zustand befindliches Teilchen, das im allgemeinen eine komplizierte Struktur besitzt und elektrische Ladungen enthält (z.B. ein Atom), bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in einem Medium mit dem Brechungsindex $n(\omega)$. Beim Übergang in den Grundzustand emittiert das Teilchen ein Quant mit der Frequenz ω_0 (im Ruhsystem), das im Laborsystem unter dem Winkel ϑ gegen die Bewegungsrichtung des Teilchens beobachtet werde. Welche Frequenz ω beobachtet man im Laborsystem (DOPPLER-Effekt im brechenden Medium)? Man untersuche insbesondere den Fall $\omega_0 \to 0$.

Hinweis: Terme zweiter Ordnung in $\hbar$ werden nicht berücksichtigt; man nehme $\hbar\,\omega_0 \ll m\,c^2$ an, wobei m die Masse des Teilchens bedeutet.

583*. Das in der Aufgabe 582 betrachtete Teilchen bewege sich gleichförmig durch ein Medium und befinde sich im Grundzustand (die übrigen Bedingungen der Aufgabe 582 werden beibehalten). Man zeige, daß dabei eine Strahlung emittiert werden kann, die von einer Anregung des Teilchens begleitet wird. Unter welchen Bedingungen kann diese Strahlung entstehen? Wie groß ist ihre Frequenz ω (DOPPLERscher Überlichteffekt)?

584. Ein Beschleuniger liefere am Ausgang einen Strahl geladener Teilchen der Masse m und der Ladung e mit der kinetischen Energie T; die Stromstärke des Strahles sei I. Man bestimme die Kraft F, die der Strahl auf ein Target ausübt, sowie die im Target abgegebene Leistung W.

585. Ein Körper bewege sich mit der relativistischen Geschwindigkeit v durch ein Gas, das je Volumeneinheit N sich langsam bewegende Teilchen der Masse m enthalte. Man bestimme den Druck p, den das Gas auf den Körper senkrecht zur Richtung seiner Geschwindigkeit je Flächenelement ausübt.

11.2. Bewegung geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld

Im elektromagnetischen Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ greift an einem punktförmigen Teilchen mit der Ladung e, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, die LORENTZ-Kraft

$$\mathfrak{F} = e\,\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{H} \tag{11.12}$$

an.

Die kinetische Energie des Teilchens ändert sich je Zeiteinheit um

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{v} = e\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{v} = \dot{E} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \tag{11.13}$$

wobei E die Energie des Teilchens bedeutet (s. 11.1.).

Ein Magnetfeld leistet keine Arbeit an einem Teilchen, da die magnetische Kraft auf der Geschwindigkeit senkrecht steht. Aus den Größen $\mathfrak{F}$ und $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ kann man einen Vierervektor, den sogenannten Vektor der MINKOWSKI-Kraft, bilden:

$$F_i = \left(\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \; i \frac{\mathfrak{F}\, \mathfrak{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{11.14}$$

Die Viererkraft hängt mit dem elektromagnetischen Feldtensor F_{ik} über die Beziehung

$$F_i = \frac{e}{c} F_{ik} u_k$$

zusammen. Dabei bedeutet u_k die Vierergeschwindigkeit des Teilchens.

Die Differentialgleichung der Bewegung eines Teilchens lautet in Viererschreibweise

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = e F_i \quad \text{oder} \quad m \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k. \tag{11.15}$$

Projiziert man diese Gleichungen auf die Raum- und Zeitachse, so erhält man die Bewegungsgleichungen in dreidimensionaler Form und den Energiesatz:

$$\dot{\mathfrak{p}} = e\,\mathfrak{E} + \frac{e}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{H}, \qquad \dot{T} = e\, \mathfrak{v}\, \mathfrak{E}. \tag{11.16}$$

Dabei ist $T = E - m c^2$ die kinetische Energie und $\mathfrak{p}$ der Impuls des Teilchens; der Punkt bezeichnet die Ableitung nach der Zeit t. Die Gleichungen (11.16) gelten bei beliebiger Geschwindigkeit des Teilchens.

Die LAGRANGE-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld mit den Potentialen φ und $\mathfrak{A}$ hat die Form

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U \tag{11.17}$$

im relativistischen Fall und

$$L = \frac{m}{2} v^2 - U \tag{11.18}$$

im nichtrelativistischen Fall, wobei

$$U = -\frac{e}{c} \mathfrak{A}\, \mathfrak{v} + e\, \varphi \tag{11.19}$$

ist.

U spielt die Rolle der potentiellen Wechselwirkungsenergie zwischen dem Teilchen und dem äußeren Feld. Die Bewegungsgleichungen des Teilchens können in der LAGRANGEschen Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{11.20}$$

geschrieben werden, wobei q_i und $\dot{q}_i$ die verallgemeinerten Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten bedeuten.

Der Strom, der bei der Rotation (Bahnbewegung) eines punktförmigen geladenen Teilchens um irgendein Zentrum entsteht, wird durch das magnetische Moment[1])

$$\mathfrak{m} = \varkappa\, \mathfrak{l} \tag{11.21}$$

bestimmt, wobei $\varkappa = e/2m\,c$ das gyromagnetische Verhältnis, m die Masse und $\mathfrak{l} = \mathfrak{r} \times m\, \mathfrak{v}$ den Drehimpuls des Teilchens bedeuten. Im äußeren Magnetfeld $\mathfrak{H}$ greift am Teilchen das Drehmoment $\mathfrak{N} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}$ an, unter dessen Einfluß sich der Drehimpuls $\mathfrak{l}$ mit der Zeit nach dem Gesetz $\mathrm{d}\mathfrak{l}/\mathrm{d}t = \mathfrak{N}$ ändert. Nach (11.21) wird die Abhängigkeit des magnetischen Momentes $\mathfrak{m}$ von der Zeit durch die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}}{\mathrm{d}t} = \varkappa\, \mathfrak{m} \times \mathfrak{H} \tag{11.22}$$

bestimmt.

Außer dem mechanischen und dem magnetischen Moment, die mit der Bahnbewegung zusammenhängen, haben Mikroteilchen auch ein mechanisches Eigenmoment (Spin) $\mathfrak{s}$ und ein magnetisches Eigenmoment $\mathfrak{m}_0$, die parallel oder antiparallel gerichtet sein können:

$$\mathfrak{m}_0 = \varkappa_0\, \mathfrak{s}. \tag{11.23}$$

Für ein Elektron gilt $\varkappa_0 = e/m\,c < 0$, wobei e die Ladung und m die Masse des Elektrons bezeichnen. Die zeitliche Änderung des Momentes $\mathfrak{m}_0$ wird durch die Gleichung (11.22) beschrieben, in der $\varkappa$ durch $\varkappa_0$ und $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{m}_0$ zu ersetzen ist.

Das Neutron hat keine elektrische Ladung, besitzt jedoch trotzdem ein Eigenmoment $\mathfrak{m}_0$, das sich nach der Quantentheorie in einem äußeren Magnetfeld $\mathfrak{H}(\mathfrak{r})$ nur in Feldrichtung oder entgegengesetzt dazu einstellen kann, wobei die anfängliche Orientierung erhalten bleibt, wenn eine bestimmte Bedingung erfüllt ist.[2]) In diesem Fall kann man die Bewegung der Neutronen mit einem in Feldrichtung (oder entgegengesetzt dazu) orientierten magnetischen Moment als Bewegung klassischer Teilchen im Kraftfeld mit der potentiellen Energie

$$U = \mp\, \mathfrak{m}_0 H \tag{11.24}$$

ansehen, wobei $H = |\mathfrak{H}(\mathfrak{r})|$ ist. Die Energie U ist gewöhnlich sehr klein, so daß das Magnetfeld praktisch nur die Bewegung sehr langsamer („kalter") Neutronen beeinflußt.

---

[1]) Die hier dargestellte klassische Theorie ist nur bedingt auf Mikroteilchen anwendbar. Eine konsequente Theorie der Bewegung elementarer magnetischer Momente müßte eine Quantentheorie sein.

[2]) Die Adiabatenbedingung, die fordert, daß der Drehwinkel des Feldes je Zeiteinheit im Ruhsystem des Neutrons klein gegen die Präzessionsfrequenz $\omega_L = 2\,\mathfrak{m}_0 H/\hbar$ des magnetischen Momentes $\mathfrak{m}_0$ im $\mathfrak{H}$-Feld ist.

Aufgaben:

586. Es ist die relativistische Bewegungsgleichung eines Teilchens unter dem Einfluß der Kraft $\mathfrak{F}$ anzugeben, indem der Impuls explizit durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Teilchens ausgedrückt wird. Man betrachte insbesondere die Fälle, daß sich die Geschwindigkeit

a) nur der Größe nach,

b) nur der Richtung nach ändert;

c) $v \ll c$ ist.

587. Man gebe eine Beziehung zwischen den Vektoren der Kraft $\mathfrak{F}$, die im Laborsystem an einem Teilchen angreift, und der im Ruhsystem angreifenden Kraft $\mathfrak{F}'$ an. Die Geschwindigkeit des Teilchens sei $\mathfrak{v}$.

588. Welche Kraft F greift vom Standpunkt eines Beobachters im momentanen Ruhsystem an einem Körper der Masse m an, der sich in einer Rakete befindet und relativ zu ihr ruht, wenn sich die Rakete mit der relativistischen Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius R bewegt?

589. Zwei Ladungen e und e' bewegen sich parallel zur x-Achse mit gleichen konstanten Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$. Ausgehend von den Resultaten der Aufgabe 535, zeige man, daß man die elektromagnetische Kraft zwischen den Ladungen mit Hilfe des sogenannten Konvektionspotentials $\psi = (1 - \beta^2)\, e/R$ mit

$$R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (1 - \beta^2)\,[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]}\,,$$

wobei $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ die Radiusvektoren der Ladungen bedeuten, nach der Gleichung $\mathfrak{F} = -e' \operatorname{grad} \psi$ berechnen kann. Wie verhält sich diese Kraft für $v \to c$?

590. Man bestimme das Konvektionspotential eines unendlich langen, geradlinigen, gleichförmig geladenen Leiters.[1]) Die Linienladungsdichte im Ruhsystem des Leiters sei $\varkappa$. Der Leiter bewege sich translatorisch mit der Geschwindigkeit v unter dem Winkel α gegen seine Länge (im Laborsystem). Insbesondere untersuche man die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$.

591. Eine unendlich lange, gleichförmig geladene Gerade mit der Linienladungsdichte $\varkappa$ im Ruhsystem der Geraden bewege sich in Richtung ihrer Länge gleichförmig mit der beliebigen Geschwindigkeit v. Im Abstand r von ihr befinde sich eine Punktladung, die sich parallel zur Geraden mit derselben Geschwindigkeit bewegt. Man bestimme die elektromagnetische Kraft F, die an der Ladung angreift.

592. Die Verteilung der durch die Potentialdifferenz V beschleunigten Elektronen in einem parallelen Bündel sei axialsymmetrisch und werde im mit den Elektronen verbundenen Bezugssystem durch die Raumladungsdichte ϱ charakterisiert. Der Gesamtstrom im Bündel sei I. Man bestimme die elektro-

---

[1]) Als Konvektionspotential eines sich als Ganzes bewegenden Systems von Ladungen bezeichnet man die Ortsfunktion, aus der man durch Differenzieren die Komponenten der LORENTZ-Kraft erhält, die im Laborsystem an der sich gemeinsam mit dem System von Ladungen bewegenden Einheitsladung angreift.

magnetische Kraft F, die an einem Elektron des Bündels im Laborsystem angreift.

Hinweis: Man benutze die Ergebnisse der Aufgabe 591.

593. Man bestimme die Verbreiterung Δa des in der vorigen Aufgabe betrachteten Elektronenbündels auf dem Wege L infolge der gegenseitigen Abstoßung der Elektronen. Der Bündelquerschnitt sei ein Kreis mit dem Radius a. Die Verbreiterung wird als klein vorausgesetzt ($\Delta a \ll L$).

594*. Ein Teilchen mit der Ladung e und der Masse m bewege sich mit beliebiger Geschwindigkeit in einem homogenen konstanten elektrischen Feld $\mathfrak{E}$. Im Anfangszeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Koordinatenursprung und besitze den Impuls $\mathfrak{p}_0$. Man bestimme die dreidimensionalen Koordinaten und die Zeit t des Teilchens im Laborsystem als Funktion seiner Eigenzeit τ. Durch Elimination von τ sind die dreidimensionalen Koordinaten des Teilchens in Abhängigkeit von t darzustellen.[1]) Insbesondere sind der nichtrelativistische und der extrem relativistische Grenzfall zu untersuchen.

595. Ausgehend von den Ergebnissen der Aufgabe 594, bestimme man die Bahn eines geladenen Teilchens mit der Ladung e und der Masse m in einem konstanten elektrischen Feld $\mathfrak{E}$. Insbesondere betrachte man den nichtrelativistischen Grenzfall.

596. Man bestimme die Weglänge l eines relativistischen geladenen Teilchens mit der Ladung e, der Masse m und der Anfangsenergie E in einem homogenen elektrischen Bremsfeld $|\mathfrak{E}|$, das der Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens parallel ist.

597*. Ein relativistisches Teilchen mit der Ladung e und der Masse m bewege sich in einem konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Im Anfangszeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Punkt mit dem Radiusvektor $\mathfrak{r}_0$ und habe den Impuls $\mathfrak{p}_0$. Man bestimme das Bewegungsgesetz des Teilchens.

598*. Ein nichtrelativistisches Teilchen mit der Ladung e und der Masse m bewege sich in einem konstanten elektrischen Feld $\mathfrak{E} = (0, E_y, E_z)$ und einem dazu gekreuzten konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H} = (0, 0, H)$. Im Anfangszeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Koordinatenursprung und habe die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = (v_{0x}, 0, v_{0z})$. Man bestimme $x(t), y(t), z(t)$ und zeichne die möglichen Teilchenbahnen.

Hinweis: Zur Vereinfachung der Integration setze man $u = x + i\,y$.

599. Ein relativistisches Teilchen bewege sich in einem konstanten elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ und einem dazu parallelen konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{E} \,||\, \mathfrak{H} \,||\, z$-Achse). Bei $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Koordinatenursprung und habe den Impuls $\mathfrak{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Man bestimme x, y, z, t als Funktionen der Eigenzeit τ des Teilchens.

600. Man bestimme das Bewegungsgesetz eines Teilchens in einem konstanten elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ und einem dazu senkrechten konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Man löse die Aufgabe

[1]) Man kann die Aufgabe auch unmittelbar durch Integration der Bewegungsgleichungen des Teilchens in der dreidimensionalen Form lösen.

a) unter Benutzung der LORENTZ-Transformation und unter der Voraussetzung, daß die Bewegungen des Teilchens in einem rein elektrischen oder rein magnetischen Feld bekannt sind (s. die Aufgaben 594 und 597);
b) durch Integration der Gleichungen (11.15).

601. Man bestimme die kinetische Energie T eines Teilchens als Funktion der Eigenzeit τ für die in den Aufgaben 594, 599 und 600 betrachteten Fälle der Bewegung.

602. Ein Teilchen mit der kleinen Anfangsgeschwindigkeit v_0 ($v_0 \ll c$) bewege sich in einem konstanten elektrischen Feld $\mathfrak{E} = (0, E_y, E_z)$ und dem dazu gekreuzten konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H} = (0, 0, H)$, wobei $E \ll H$ sei. Man bestimme das Bewegungsgesetz des Teilchens mit Hilfe der LORENTZ-Transformation unter der Annahme, daß die Bewegung des Teilchens bei parallelem elektrischem und magnetischem Feld bekannt ist (s. Aufgabe 599). Bei der Lösung sind die Ergebnisse der Aufgabe 530 zu benutzen. Man vergleiche die Lösung mit der der Aufgabe 598.

603. Man bestimme das Bewegungsgesetz eines Teilchens mit der Ladung e und der Masse m im Feld der ebenen elektromagnetischen Welle $\mathfrak{E}(t')$, $\mathfrak{H}(t')$ mit $t' = t - \mathfrak{n}\,\mathfrak{r}/c$, wobei $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung der Welle bedeutet. Im Anfangszeitpunkt ruhe das Teilchen im Koordinatenursprung.

Hinweis: Man beachte, daß die Eigenzeit τ des Teilchens mit dem Argument t' der ebenen Welle übereinstimmt.

604. Ein nichtrelativistisches geladenes Teilchen mit der Ladung e und der Masse m gehe durch ein zweidimensionales elektrostatisches Feld mit dem Potential

$$\varphi = k(x^2 - y^2)$$

mit $k = \text{const} > 0$ hindurch (Linse mit starker Fokussierung). Im Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Punkt (x_0, y_0, z_0); die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sei der z-Achse parallel. Man bestimme die Bewegung des Teilchens.

605. Ausgehend von der LAGRANGE-Funktion in Zylinderkoordinaten, bestimme man die Differentialgleichungen der Bewegung eines relativistischen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld.

Hinweis: Die zeitliche Ableitung in den LAGRANGEschen Gleichungen ist längs der Teilchenbahn zu nehmen, und r, α, z sind als Funktionen der Zeit aufzufassen.

606*. Zwischen den Belegungen eines Zylinderkondensators mit den Radien a und b ($a < b$) bestehe die Potentialdifferenz V. Im Raum zwischen den Belegungen sei ein axialsymmetrisches Magnetfeld mit zur Kondensatorachse paralleler Feldstärke vorhanden. Aus der inneren Belegung, die die Rolle einer Katode spielt, treten Elektronen mit der Anfangsgeschwindigkeit Null aus. Man bestimme den kritischen Wert Φ_{kr} des magnetischen Flusses zwischen den Belegungen, bei dem die Elektronen infolge der Krümmung ihrer Bahnen im Magnetfeld die Anode nicht mehr erreichen.

607. Eine lange geradlinige zylinderförmige Katode mit dem Radius a werde von einem gleichförmig verteilten Strom I durchflossen und emittiere Elektronen mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Diese Elektronen bewegen sich unter der Wirkung des Beschleunigungspotentials V zu einer langen koaxialen Anode mit dem Radius b. Wie groß muß die Potentialdifferenz zwischen Katode und Anode mindestens sein, damit die Elektronen die Anode noch erreichen, obwohl das Magnetfeld des Stromes I eine ablenkende Wirkung ausübt?

608. Durch einen unendlich langen geradlinigen zylindrischen Leiter fließe der Strom I. Aus seiner Oberfläche werde ein Elektron ausgelöst, dessen Anfangsgeschwindigkeit v_0 längs des Leiters gerichtet ist. Wie groß ist der maximale Abstand b, bis auf den sich das Elektron von der Leiterachse entfernen kann?

609. Man löse die Aufgabe 607 unter Anwendung der LORENTZ-Transformation in ein Bezugssystem, in dem nur ein Feld ($\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$) vorhanden ist.
Hinweis: Man benutze die Ergebnisse der Aufgaben 533 und 608.

610*. Ein relativistisches Teilchen mit der Ladung $-e$ und der Masse m bewege sich im Feld einer ruhenden Punktladung Ze. Wie lautet die Bahngleichung des Teilchens? Man untersuche die möglichen Bahnen für den Fall, daß der Drehimpuls der Bedingung $L > Z e^2/c$ genügt.
Hinweis: Man benutze den Energiesatz und die Gleichungen der Aufgabe 605.

611. Man untersuche die in der vorigen Aufgabe betrachteten möglichen Teilchenbahnen im Falle $L \leqq Z e^2/c$.

612*. Ein relativistisches Teilchen mit der Ladung e und der Masse m bewege sich im Feld der schweren gleichnamigen Punktladung Ze. Man bestimme die Teilchenbahn und diskutiere die Lösung.

613. Man zeige, daß die Geschwindigkeit eines Teilchens bei einer Bewegung im anziehenden COULOMB-Feld (s. Aufgabe 610) für $r \to 0$ gegen c strebt ($Z e^2 \geqq L c$).

614. Man bestimme die Bahn der Relativbewegung nichtrelativistischer Teilchen mit den Ladungen e, e', den Massen m_1, m_2 und der Energie E und diskutiere die Lösung.

615*. Man bestimme den differentiellen Streuquerschnitt $\sigma(\Theta)$ nichtrelativistischer Teilchen mit der Ladung e im Feld der unbewegten Punktladung e'. Die Geschwindigkeit der Teilchen in großer Entfernung vom Streuzentrum sei v_0.

616. Wie groß ist der Ablenkungswinkel Θ eines relativistischen geladenen Teilchens mit der Ladung e, der Energie $E > m c^2$ und dem Drehimpuls $L > |e e'|/c$, das durch das COULOMB-Feld der schweren unbewegten Ladung e' fliegt (s. die Aufgaben 610 und 612)?

617. Ein relativistisches Teilchen mit der Ladung e, der Masse m und der Geschwindigkeit v_0 im Unendlichen wird durch das COULOMB-Feld einer unbewegten Ladung e' um einen kleinen Winkel gestreut. Man bestimme den differentiellen Streuquerschnitt $\sigma(\Theta)$.

618. Ein Elektron mit der Ladung e und der Masse m bewege sich im Vakuum über einer ebenen ungeladenen Oberfläche eines Dielektrikums mit der Dielektrizitätskonstanten ε. Am Anfang bewege sich das Elektron parallel zur Oberfläche des Dielektrikums mit der Geschwindigkeit v und befinde sich im Abstand a von ihr. In welchem Abstand x von der Projektion der Anfangslage des Elektrons auf die Oberfläche des Dielektrikums trifft das Elektron auf das Dielektrikum auf?

619*. Im Betatron nimmt während der Beschleunigung eines Elektrons das Magnetfeld stetig zu und erzeugt eine Induktionsspannung, welche das Elektron beschleunigt, während seine Bahn ungeändert bleibt. Man zeige, daß zur Beschleunigung des Elektrons auf einer Bahn mit konstantem Radius der magnetische Gesamtfluß Φ, der die Bahn durchdringt, doppelt so groß sein muß wie der Fluß Φ_0, den man erhalten würde, wenn das Feld innerhalb der Bahn homogen und gleich dem Feld auf der Bahn wäre (1:2-Bedingung beim Betatron).

620*. Man zeige, daß die Energie der retardierten Wechselwirkung zweier geladener Teilchen bis zu Termen der Ordnung v^2/c^2

$$U(t) = \frac{e_1 e_2}{R}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}[\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 + (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{n})(\mathfrak{v}_2 \mathfrak{n})]\right\}$$

ist,[1]) wobei $\mathfrak{R}$ den Radiusvektor der relativen Lage der Teilchen bedeutet, $\mathfrak{n} = \mathfrak{R}/R$ ist und $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeiten der Teilchen sind. Alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung werden im Zeitpunkt t genommen.

Hinweis: Man benutze die Entwicklungen der Liénard-Wiechertschen Potentiale in der Aufgabe 658 und berücksichtige nur die Terme, die nicht von den Beschleunigungen und ihren Ableitungen abhängen. Man führe eine solche Eichtransformation der Potentiale durch, daß das skalare Potential die Form eines Coulomb-Potentials annimmt.

621. Man bestimme die genäherte Lagrange-Funktion zweier miteinander wechselwirkender Teilchen mit den Ladungen e_1, e_2 und den Massen m_1, m_2 unter Berücksichtigung des Retardierungseffekts bis auf Korrektionsterme der Ordnung v^2/c^2 genau.

622. Ein Teilchen mit dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}$ und dem gyromagnetischen Verhältnis $\varkappa$ befinde sich in einem äußeren homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Welchen Charakter hat die Bewegung des magnetischen Moments des Teilchens?

623*. Ein Teilchen mit der Ladung e und der Masse m bewege sich periodisch im zentralsymmetrischen elektrostatischen Feld $\varphi(r)$. Das Teilchen besitze in seinem Ruhsystem ein magnetisches Eigenmoment $\mathfrak{m} = e\,\mathfrak{s}/m\,c$, wobei $\mathfrak{s}$ den Spin des Teilchens bedeutet. Im Laborsystem hat das bewegte Teilchen nicht nur ein magnetisches, sondern auch ein elektrisches Moment $\mathfrak{p} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{m}/c$,

---

[1]) Man bezeichnet diese Beziehung als Breitsche Formel. Ein ähnlicher Ausdruck wird bei der genäherten quantentheoretischen Beschreibung der retardierten Wechselwirkung benutzt.

so daß das elektrische Feld auf das Teilchen eine Kraft und ein Drehmoment ausübt. Man bestimme das über eine Bewegungsperiode des Teilchens gemittelte Drehmoment $\mathfrak{N}$ und die ihm entsprechende potentielle Energie U der Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des bewegten Teilchens und dem elektrischen Feld (bis auf lineare Terme in v/c genau). Der Einfluß der magnetischen Kräfte auf die Translationsbewegung des Teilchens soll vernachlässigt werden.

624*. Ein Teilchen mit der Ladung e, der Masse m und dem Eigendrehimpuls $\mathfrak{s}$ bewege sich periodisch im zentralsymmetrischen elektrostatischen Feld $\varphi(r)$ (s. Aufgabe 623). Man bestimme die Differentialgleichung, die die über eine Periode gemittelte zeitliche Änderung des Drehimpulses $\mathfrak{s}$ beschreibt. Welchen Charakter hat diese Bewegung?

625. Ein Neutron mit dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}_0$ und der kinetischen Energie E_0 fliege aus dem Vakuum in ein Magnetfeld der Stärke $H = \text{const}$, das eine ebene Grenze habe. Unter welcher Bedingung wird das Neutron vom Feld reflektiert?

626. Man untersuche die möglichen Bahnen eines kalten Neutrons (Masse m, magnetisches Moment $\mathfrak{m}_0$) im Feld eines unendlich langen geradlinigen Leiters mit dem Strom I.

627. Ein Strom kalter Neutronen (Geschwindigkeit v_0, magnetisches Moment $\mathfrak{m}_0$, Masse m) werde am Magnetfeld eines unendlich langen geradlinigen Leiters mit dem Strom I gestreut. Man bestimme die differentielle transversale Streulänge $l(\alpha) = |\mathrm{d}s/\mathrm{d}\alpha|$, wobei $s(\alpha)$ den Stoßparameter bedeutet, bei dem das Neutron um den Winkel α gestreut wird.

Hinweis: Man benutze den Lösungsweg der Aufgabe 615.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[2] Achieser, A. I., und W. B. Berestezki: Quantenelektrodynamik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962 (Übers. aus dem Russ.).

[6] Baldin, A. M., W. I. Goldanski und I. L. Rosental: Kinematik der Kernreaktionen. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[9] Becker, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. 2: Elektronentheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig–Berlin 1933.

[11] Bergmann, P. G.: Introduction to the Theory of Relativity. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs/N.J. 1942.

[23] Fock, V.: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Akademie-Verlag, Berlin 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[24] Frank, I. M.: Optik der in brechenden Medien bewegten Lichtquellen. Usp. fis. Nauk **68** (1959), S. 397 (russ.).

[25] Frenkel, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 1: Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Springer-Verlag, Berlin 1926 (Übers. aus dem Russ.); Ausgewählte Werke Bd. 1. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1956 (Собрание избранных трудов, т. I).

[32] GINSBURG, W. L., und I. M. FRANK: Über den DOPPLER-Effekt bei Überlichtgeschwindigkeit. Dokl. Akad. Nauk SSSR **56** (1947), H. 6 (russ.).

[35] GOLDSTEIN, H.: Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading/Mass. 1953 (Dtsch. Übers.: Klassische Mechanik. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt/Main 1963).

[39] GRINBERG, A. P.: Methoden der Beschleunigung geladener Teilchen. Gostechisdat, Moskau 1950 (*А. П. Гринберг:* Методы ускорения заряженных частиц).

[43] GUREWITSCH, L. E.: Elektrodynamik. Verlag der Staatlichen Universität Leningrad, Leningrad 1940 (*Л. Э. Гуревич:* Электродинамика).

[48] KELMAN, W. M., und S. JA. JAWOR: Elektronenoptik. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1959 (*В. М. Кельман* и *С. Я. Явор:* Электронная оптика).

[50] KOMPANEYETS, A. S.: Theoretical Physics. Foreign Languages Publishing House, Moscow 1961.

[53] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHIZ: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[54] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHIZ: Mechanik. Akademie-Verlag, Berlin 1962 (Übers. aus dem Russ.).

[60] LIVINGSTON, M. S.: High-Energy Accelerators. Interscience Publishers Inc., New York 1954.

[65] MORRISON, F.: Nuclear Reactions, in: Experimental Nuclear Physics, herausgeg. von E. SEGRÈ, Bd. 2. J. Wiley & Sons, New York 1953.

[68] PAULI, W.: Relativitätstheorie, in: Handbuch der Physik, Bd. V/19. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1921.

[74] SKATSCHKOW, S. W., L. W. KONSTANTINOW, R. P. STROGANOW, L. N. JUROWA und E. P. TOPORKOWA: Aufgabensammlung der Kernphysik. VEB Verlag Technik, Berlin 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[78] SMYTHE, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.

[79] SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, Bd. 1 und 2. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1951.

[82] SPITZER, L.: Physics of Fully Ionized Gases. Interscience Publishers Inc., New York 1956.

[85] TAMM, I. E.: Allgemeine Eigenschaften der von mit Überlichtgeschwindigkeit bewegten Systemen emittierten Strahlung und einige Anwendungen auf die Plasmaphysik. Usp. fis. Nauk **68** (1959), S. 387 (russ.).

12. EMISSION ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

12.1. HERTZscher Vektor und Entwicklung nach Multipolen

Das Problem, ein veränderliches elektromagnetisches Feld im Vakuum aus einer vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilung $\varrho(\mathfrak{r}', t)$ bzw. $\mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t)$ zu bestimmen, kann durch Berechnung der retardierten Potentiale gelöst werden:

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\varrho(\mathfrak{r}', t - R/c)}{R} \,\mathrm{d}V', \tag{12.1}$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t - R/c)}{R} \,\mathrm{d}V'. \tag{12.2}$$

Dabei sind $R = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|$ und $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor des Aufpunktes, $\mathfrak{r}'$ der Radiusvektor und $\mathrm{d}V'$ das Volumenelement der Quelle des Feldes. Die retardierten Potentiale genügen den D'ALEMBERTschen Gleichungen

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho, \tag{12.3}$$

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathfrak{j} \tag{12.4}$$

und hängen durch die LORENTZ-Konvention

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{12.5}$$

miteinander zusammen.

Man kann die Zahl der unbekannten Funktionen verringern, indem man an Stelle der Potentiale $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t)$ und $\varphi(\mathfrak{r}, t)$, die durch die Gleichung (12.5) miteinander zusammenhängen, eine Vektorfunktion $\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t)$ (HERTZscher Vektor oder Polarisationspotential) einführt, die mit $\mathfrak{A}$ und φ durch die Beziehungen

$$\varphi = -\operatorname{div}\mathfrak{Z}, \tag{12.6}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} \tag{12.7}$$

verknüpft ist.

Die Ladungs- und Stromverteilung beschreibt man dabei mit Hilfe einer Vektorfunktion $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}', t)$, die mit ϱ und $\mathfrak{j}$ durch die Beziehungen

$$\varrho = -\operatorname{div}\mathfrak{P}, \tag{12.8}$$

$$\mathfrak{j} = \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t} \tag{12.9}$$

zusammenhängt. Diese Definition von $\mathfrak{P}$ gewährleistet, daß die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\mathfrak{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

erfüllt ist. Man bezeichnet $\mathfrak{P}$ als Polarisation (nicht zu verwechseln mit der Polarisation eines Dielektrikums).

Der HERTZsche Vektor $\mathfrak{Z}$ genügt der D'ALEMBERTschen Gleichung

$$\Delta \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = -4\pi\,\mathfrak{P}. \tag{12.10}$$

Die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ hängen durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{Z} - 4\pi\,\mathfrak{P}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\,\frac{\partial \operatorname{rot}\mathfrak{Z}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

mit $\mathfrak{Z}$ zusammen.

Um das elektromagnetische Feld bei vorgegebenem ϱ und $\mathfrak{j}$ mit Hilfe des HERTZschen Vektors zu bestimmen, muß man zunächst aus den Gleichungen (12.8) und (12.9) den Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ berechnen. Wegen der Analogie zwischen den Gleichungen (12.3), (12.4) und (12.10) wird der HERTZsche Vektor genauso durch $\mathfrak{P}$ ausgedrückt wie die Potentiale φ und $\mathfrak{A}$ durch ϱ bzw. $\mathfrak{j}$:

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\mathfrak{P}(\mathfrak{r}', t - R/c)}{R}\, dV'. \tag{12.12}$$

Ist ein System von Ladungen und Strömen in einem begrenzten Gebiet mit Abmessungen der Größenordnung a eingeschlossen und sind die in den Spektralentwicklungen der Potentiale auftretenden Wellenlängen von der Größenordnung λ, so kann man die Integranden bei

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{a}{r} \ll 1 \tag{12.13}$$

nach Potenzen von a/λ und a/r entwickeln.

Beschränkt man sich auf den ersten Term einer solchen Entwicklung, so gilt

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\mathfrak{p}(t')}{r}, \tag{12.14}$$

wobei $t' = t - r/c$ die retardierte Zeit des Systemmittelpunkts bedeutet.

Die Größe

$$\mathfrak{p}(t') = \int \mathfrak{r}'\,\varrho(\mathfrak{r}', t')\, dV' \tag{12.15}$$

ist das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung (s. die Aufgaben 643 und 644). Die entsprechenden Ausdrücke für $\mathfrak{A}$ und φ ergeben sich dann mit Hilfe der Gleichungen (12.6) und (12.7).

Besonders interessant ist die Betrachtung des Feldes in so großen Abständen r vom Ladungssystem, daß neben (12.13) die Ungleichung

$$r' \ll \lambda \ll r \tag{12.16}$$

erfüllt ist (Wellenzone). In diesem Fall kann man zur Bestimmung des Feldes die Entwicklung des Vektorpotentials nach Potenzen von a/λ benutzen, die bis auf $(a/\lambda)^2$ genau die Form

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\dot{\mathfrak{p}}(t')}{c\,r} + \frac{\ddot{\mathfrak{Q}}(t')}{2c^2\,r} + \frac{\dot{\mathfrak{m}}(t') \times \mathfrak{n}}{c\,r} \tag{12.17}$$

hat. Dabei sind $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}/r$ der Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Wellen,

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \int \mathfrak{r}' \times \mathfrak{j}\, \mathrm{d}V' \tag{12.18}$$

das magnetische Dipolmoment und

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta}\, n_\beta, \qquad Q_{\alpha\beta} = \int \varrho(\mathfrak{r}')\, x'_\alpha\, x'_\beta\, \mathrm{d}V' \tag{12.19}$$

die Komponenten des Quadrupolmomentes; die Punkte bezeichnen Ableitungen nach t'.

Charakteristisch ist die Abhängigkeit des Vektorpotentials in der Wellenzone vom Abstand r zum System. Sie gewährleistet (s. unten) die Existenz eines im Unendlichen nicht verschwindenden Energiestroms in der Richtung vom System weg. Das bedeutet, daß durch ein solches Vektorpotential die Emission elektromagnetischer Energie beschrieben wird.

Der zweite und dritte (elektrische Quadrupol- bzw. magnetische Dipol-) Term in diesem Ausdruck sind größenordnungsmäßig um den Faktor a/λ [1]) kleiner als der erste (elektrische Dipol-) Term und können vernachlässigt werden, wenn nicht der erste Term aus irgendwelchen besonderen Gründen stark verkleinert ist.

In der Wellenzone hat das Feld in genügend kleinen Raumgebieten den Charakter einer von der Quelle fortlaufenden ebenen Welle. Die Feldstärken dieses Feldes können mit Hilfe der Beziehungen

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\, \dot{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{n}, \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{n} \tag{12.20}$$

berechnet werden.

Die Winkelverteilung der Strahlung wird durch die Energiemenge charakterisiert, die in der Zeiteinheit durch den Raumwinkel 1 fließt:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2\, r^2. \tag{12.21}$$

Die Gesamtintensität I der Strahlung ergibt sich durch Integration von (12.21) über alle Richtungen.

---

[1]) Ist das emittierende System ein Teilchen, das sich in einem begrenzten Gebiet mit der Geschwindigkeit v bewegt, so gilt $a/\lambda \approx v/c$.

Wendet man die Entwicklung (12.17) an, so folgt

$$I = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathfrak{p}})^2 + \frac{1}{60c^5}\left[3\sum_{\alpha\beta}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \left(\sum_{\beta}\dddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2\right] + \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathfrak{m}})^2. \quad (12.22)$$

Bei periodischer Bewegung der Ladungen sind gewöhnlich nur die über eine Periode gemittelten Größen $\overline{I}$ und $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ von Interesse.

Aufgaben:

628. Durch unmittelbares Einsetzen überzeuge man sich davon, daß die retardierten Potentiale der D'ALEMBERTschen Gleichung und der LORENTZ-Konvention genügen.

629. Mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 32 leite man die Gleichung (12.22) ab.

630. Welchen Gleichungen genügen die elektromagnetischen Potentiale φ und $\mathfrak{A}$, wenn an Stelle der LORENTZ-Konvention (12.5) die Bedingung $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$ gefordert wird (COULOMB-Eichung)?

631. Man zeige, daß in der Wellenzone das skalare Potential eines begrenzten emittierenden Systems mit Hilfe der Formel $\varphi = \mathfrak{n}\,\mathfrak{A}$ durch das Vektorpotential ausgedrückt werden kann, falls die LORENTZ-Konvention gilt.

632. Mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 545 [Gleichungen (2) und (3)] bestimme man einen Ausdruck für den Verlust $-\mathrm{d}\mathfrak{L}/\mathrm{d}t$ des Drehimpulses je Zeiteinheit für ein System, das wie ein elektrischer Dipol strahlt.

633. Man bestimme die Gleichungen der Kraftlinien des elektrischen und des magnetischen Feldes eines punktförmigen elektrischen Dipoloszillators mit dem Moment $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \cos\omega t$. Man verfolge die qualitative Änderung des Feldbildes in der dem Oszillator benachbarten Zone (Nahzone) sowie in der Wellenzone.

Hinweis: Liegt die Polarachse in der Richtung von $\mathfrak{p}_0$, so hat das elektrische Feld des Oszillators die Form

$$E_r = \frac{2p_0\cos\vartheta}{r^2}\left[\frac{\cos(kr-\omega t)}{r} + k\sin(kr-\omega t)\right],$$

$$E_\vartheta = \frac{p_0\sin\vartheta}{r}\left[\left(\frac{1}{r^2} - k^2\right)\cos(kr-\omega t) + \frac{k}{r}\sin(kr-\omega t)\right],$$

$$E_\alpha = H_r = H_\vartheta = 0,$$

$$H_\alpha = -\frac{p_0 k^2}{r}\cos(kr-\omega t) + \frac{p_0 k}{r^2}\sin(kr-\omega t).$$

634. Man berechne das elektromagnetische Feld $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ einer Ladung e, die sich gleichförmig auf einem Kreis mit dem Radius a bewegt. Die Bewegung sei nichtrelativistisch, die Winkelgeschwindigkeit sei ω; der Abstand zum Aufpunkt sei $r \gg a$. Man bestimme die zeitlich gemittelte Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ und die Gesamtintensität $\overline{I}$ der Strahlung und untersuche ihre Polarisation.

635. Man untersuche den Einfluß der Interferenz auf die Emission elektromagnetischer Wellen durch ein System von Ladungen an folgendem Beispiel. Zwei gleiche elektrische Ladungen e sollen sich mit nichtrelativistischer Geschwindigkeit und der Frequenz ω gleichförmig auf einer Kreisbahn mit dem Radius a bewegen, wobei sie sich stets an entgegengesetzten Endpunkten des Durchmessers befinden. Man bestimme Polarisation, Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ und Intensität $\bar{I}$ der Strahlung. Wie ändert sich die Strahlungsintensität, wenn man eine der Ladungen entfernt (s. das Ergebnis der Aufgabe 634)?

636. Wie muß man in der vorigen Aufgabe die gegenseitige Anordnung der Ladungen verändern, damit die elektrische Dipol- und Quadrupolstrahlung gleiche Intensität haben?

637. Die Schwingungen zweier elektrischer Dipoloszillatoren sollen mit gleicher Frequenz ω erfolgen, in der Phase jedoch um $\pi/2$ gegeneinander verschoben sein. Die Amplituden der Dipolmomente seien dem Betrag nach gleich p_0 und sollen den Winkel φ miteinander bilden. Der Abstand zwischen den Oszillatoren sei klein gegen die Wellenlänge. Man berechne das Feld $\mathfrak{H}$ in der Wellenzone, die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ und die Gesamtintensität $\bar{I}$ der Strahlung.

638. Man untersuche den Polarisationszustand des Strahlungsfeldes des Systems von Oszillatoren, das in der vorigen Aufgabe betrachtet wurde, mit Hilfe der in Aufgabe 387 benutzten Methode.

639*. Man bestimme die zeitlich gemittelte Energiestromdichte $\overline{\mathfrak{S}}$ in großen Abständen von der in Aufgabe 634 betrachteten Ladung unter Berücksichtigung von Termen der Ordnung $1/r^3$. Wie groß ist das Drehmoment $\mathfrak{N}$, das an einem vollständig absorbierenden kugelförmigen Schirm mit großem Radius angreift, um dessen Zentrum sich die Ladung bewegt?

640. Eine gleichförmig magnetisierte Kugel mit dem Radius a und der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ rotiere mit der konstanten Frequenz ω um die Achse durch den Kugelmittelpunkt, die mit der Richtung von $\mathfrak{M}$ den Winkel φ bildet. Man bestimme das elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und untersuche die Polarisation. Wie groß sind die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ und die Gesamtintensität $\bar{I}$ der Strahlung?

641. Ein Tropfen mit gleichförmiger Raumladung pulsiere mit konstanter Dichte. Dabei wird die Oberfläche des Tropfens durch die Gleichung

$$R(\vartheta) = R_0[1 + a P_2(\cos\vartheta)\cos\omega t]$$

mit $a \ll 1$ beschrieben. Die Ladung des Tropfens sei q. Man bestimme die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ und die Gesamtintensität $\bar{I}$ der Strahlung.

642. Die elektrische Ladung q sei innerhalb eines begrenzten Gebietes kugelsymmetrisch verteilt und pulsiere in radialer Richtung. Man bestimme das elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ außerhalb der Ladungsverteilung.

643. Man bestimme die Ausdrücke für den elektrischen Dipolterm $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{p}}$, den elektrischen Quadrupolterm $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{Q}}$ und den magnetischen Dipolterm $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{m}}$ in der

Entwicklung des HERTZschen Vektors bei beliebiger Zeitabhängigkeit der Ströme und Ladungen für Abstände $r \gg a$, $\lambda \gg a$ (die Bedingung $r \gg \lambda$ ist nicht unbedingt erfüllt).

644. Man bestimme in vektorieller Form Ausdrücke für die elektrischen Feldstärken eines elektrischen und magnetischen Dipoloszillators $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{m}$ in Abständen von den Oszillatoren, die groß gegen ihre Abmessungen sind.

Hinweis: Bei der Differentiation nach $\mathfrak{r}$ sind die Momente $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ im retardierten Zeitpunkt $t' = t - r/c$ zu nehmen und hängen daher von $\mathfrak{r}$ ab.

645. Die Momente zweier gleicher elektrischer Dipole seien längs einer Geraden gerichtet und sollen gegenphasig mit der Frequenz ω (Amplitude $\mathfrak{p}_0$) oszillieren. Der Abstand zwischen den Zentren sei a, wobei $\lambda \gg a$ gelte. Man bestimme das elektromagnetische Feld in Abständen $r \gg a$ sowie die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ und die Gesamtintensität $\bar{I}$ der Strahlung.

646*. In einer linearen Antenne der Länge l sei eine stehende Welle mit dem Strom J der Amplitude J_0 und der Frequenz ω angeregt; die Knoten sollen an den Enden der Antenne liegen. Die halbe Wellenzahl des Stromes, die auf die Länge der Antenne paßt, sei m. Man bestimme die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ der Strahlung.

647. Man bestimme die Gesamtintensität $\bar{I}$ der Strahlung und den Strahlungswiderstand $R = 2\bar{I}/J_0^2$ der in der vorigen Aufgabe betrachteten Antenne.

Hinweis: Das Ergebnis wird durch den Integralkosinus

$$\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

ausgedrückt, wobei $C = 0{,}577$ die EULERsche Konstante bedeutet (s. [72], 6.220).

648. In einer linearen Antenne der Länge l breite sich eine fortschreitende Stromwelle[1]) $J = J_0\,\mathrm{e}^{i(k\xi - \omega t)}$ aus, wobei $k = \omega/c$ ist und ξ die Koordinate eines Punktes auf der Antenne bedeutet. Man bestimme die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ und die Gesamtintensität $\bar{I}$ der Strahlung.

649*. In einer kreisförmigen Drahtschleife mit dem Radius a sei eine stehende Stromwelle der Form $J = J_0 \sin n\alpha' \cdot \mathrm{e}^{-i\omega t}$ angeregt. Man bestimme das elektromagnetische Feld $\mathfrak{H}, \mathfrak{E}$ in der Wellenzone.

650*. Die Zentren zweier elektrischer Dipoloszillatoren mit der Frequenz ω und gleicher Amplitude $\mathfrak{p}_0$ parallel zur x-Achse sollen auf der z-Achse in gleichen Abständen vom Koordinatenursprung und im Abstand $a = \lambda/4$ voneinander liegen. Die Schwingungen der Oszillatoren seien in der Phase um $\pi/2$ verschoben. Man bestimme die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ der Strahlung.

---

[1]) Die Belastung an den Enden der Antenne ist so zu wählen, daß keine reflektierte Welle entsteht.

651. Die Spiegelung eines Systems B von Ladungen $\varrho(\mathfrak{r}, t)$ und Strömen $\mathfrak{j}(\mathfrak{r}, t)$ an der Ebene $z = 0$ besteht darin, daß *a*) jeder Punkt $\mathfrak{r} = (x, y, z)$ in $\mathfrak{r}' = (x, y, -z)$ übergeht und *b*) die Ladungsdichte ein anderes Vorzeichen erhält, d.h. $\varrho(\mathfrak{r}, t) = -\varrho'(\mathfrak{r}', t)$ ist, wobei ϱ' die Ladungsdichte im gespiegelten System B' bedeutet. Wie transformieren sich bei der Spiegelung die Stromdichte $\mathfrak{j}(\mathfrak{r}, t)$, die elektrischen Momente $\mathfrak{p}, \mathfrak{Q}$ des Systems, das magnetische Moment $\mathfrak{m}$ des Systems und das elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$?

652. Man zeige, daß das elektromagnetische Feld eines beliebigen Systems B von Ladungen in der Nähe einer ideal leitenden Ebene als Superposition der Felder des Systems B und des an dieser Ebene gespiegelten Systems B' (s. die vorige Aufgabe) erhalten werden kann. Insbesondere untersuche man die Strahlung eines elektrischen Dipoloszillators mit dem Moment $\mathfrak{p}(t) = \mathfrak{p}_0 f(t)$ [$|\mathfrak{p}_0| = 1$, $f(t)$ sei eine beliebige Funktion], der sich im Abstand $b \ll \lambda$ von einer solchen Ebene befindet und mit ihr den Winkel $\varphi_0 = \text{const}$ bildet (man beschränke sich auf die elektrische Dipolnäherung).

653. Ein elektrischer Dipol mit der Amplitude $\mathfrak{p}_0$ des Momentes und der Frequenz ω befinde sich im Abstand $a/2$ von einer ideal leitenden Ebene ($a \ll \lambda$; der Vektor $\mathfrak{p}_0$ sei der Ebene parallel). Man bestimme das elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ in Abständen $r \gg \lambda$ und die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ der Strahlung.

654.

a) Man beweise folgenden Satz: Genügt die Funktion $u(r, \vartheta, \alpha)$ der Helmholtzschen Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

so kann das Hertzsche Potential für ein monochromatisches Feld vom elektrischen Typ ($H_r = 0$) mit der Frequenz $\omega = kc$ in einem Raum, der keine Quellen des Feldes enthält, in der Form

$$\mathfrak{Z} = u\,\mathfrak{r} + \operatorname{grad}\chi, \qquad \chi = \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u)$$

dargestellt werden.

b) Man drücke die Komponenten der Feldstärken des elektromagnetischen Feldes $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ in Kugelkoordinaten durch $u(r, \vartheta, \alpha)$ aus. Die Funktion u wird als Debyesches Potential bezeichnet.

Hinweis: Beim Beweis der Gleichung

$$\Delta\mathfrak{Z} + k^2\mathfrak{Z} = 0$$

berücksichtige man die Beziehung $\Delta\chi + k^2\chi + 2u = 0$.

655. Man zeige, daß das Feld eines punktförmigen elektrischen Dipoloszillators mit dem Moment $\mathfrak{p}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$, der sich im Punkt $\mathfrak{r}_0$ ($\mathfrak{r}_0 \parallel \mathfrak{p}_0$) befindet, mit Hilfe des Debyeschen Potentials (s. Aufgabe 654) in der Form

$$u = \frac{p_0}{r_0}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}$$

mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$ beschrieben werden kann.

Hinweis: Der HERTZsche Vektor $\mathfrak{Z} = u\,\mathfrak{r} + \operatorname{grad}\chi$, der dem Potential u entspricht, unterscheidet sich von $e^{ikR}\,p_0/R$ [s. (12.14)], führt jedoch zu denselben Ausdrücken für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$.

656. Ein punktförmiger elektrischer Dipoloszillator mit dem Moment $p_0 e^{-i\omega t}$ befinde sich im Abstand b vom Mittelpunkt einer ideal leitenden Kugel mit dem Radius a. Das Moment habe die Richtung der Verbindungslinie des Dipols mit dem Kugelmittelpunkt. Mit Hilfe des DEBYEschen Potentials u (s. Aufgabe 654) ist das elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ zu bestimmen. Man berechne die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ der Strahlung.

12.2. Elektromagnetisches Feld einer beliebig bewegten Punktladung

Eine Punktladung e, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}(t')$ bewegt und zur Zeit t' im Punkt $\mathfrak{r}_0(t')$ befindet, erzeugt ein elektromagnetisches Feld, dessen Potentiale im Punkt $\mathfrak{r}$ zur Zeit t durch die LIÉNARD-WIECHERTschen Formeln bestimmt werden ($\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$):

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \frac{e}{R(1 - \mathfrak{R}\,\mathfrak{v}/c)}\bigg|_{t'}, \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \frac{e\,\mathfrak{v}}{c(R - \mathfrak{R}\,\mathfrak{v}/c)}\bigg|_{t'}. \tag{12.23}$$

Die retardierte Zeit t' ist durch die Gleichung

$$c(t - t') = |\mathfrak{R}| \tag{12.24}$$

definiert.

Mit Hilfe der LIÉNARD-WIECHERTschen Potentiale kann man die Feldstärken berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) &= e\,\frac{(1-\beta^2)\,(\mathfrak{n} - \mathfrak{v}/c)}{(1 - \mathfrak{n}\,\mathfrak{v}/c)^3 R^2} + e\,\frac{\mathfrak{n}\times[(\mathfrak{n} - \mathfrak{v}/c)\times\dot{\mathfrak{v}}]}{c^2(1 - \mathfrak{n}\,\mathfrak{v}/c)^3 R}\bigg|_{t'}, \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{n}\times\mathfrak{E}|_{t'}. \end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

Dabei ist $\mathfrak{n} = \mathfrak{R}/R$, $\beta = v/c$.

Der erste Term von $\mathfrak{E}$ und der entsprechende Term von $\mathfrak{H}$ beschreiben ein Feld, das wie $1/R^2$ mit dem Abstand abnimmt (quasistationäres Feld) und sich gemeinsam mit der Ladung bewegt, ohne von ihr abzureißen. Der zweite Term von $\mathfrak{E}$ und der ihm entsprechende Term von $\mathfrak{H}$ beschreiben ein Feld, das wie $1/R$ mit dem Abstand abnimmt (Strahlungsfeld); der Energiestrom dieses Feldes hängt nicht von R ab. Das bedeutet, daß sich das Strahlungsfeld von der felderzeugenden Ladung loslöst. In großem Abstand von der Ladung (Wellenzone) ist das quasistationäre Feld vernachlässigbar klein gegenüber dem Strahlungsfeld. Wie aus (12.25) folgt, ist das Vorhandensein einer Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}} \neq 0$ eine notwendige Bedingung für die Entstehung des Strahlungsfeldes.

Die Strahlungsintensität in der Richtung $\mathfrak{n} = \mathfrak{R}/R$ wird durch die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in der Wellenzone ausgedrückt:

$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathfrak{n}}(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}\,\mathfrak{E}^2(t)\,R^2 =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\,c^3}\left[\frac{2(\mathfrak{n}\,\mathfrak{v})\,(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}})}{c(1-\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}/c)^5} + \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{(1-\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}/c)^4} - \frac{(1-v^2/c^2)\,(\mathfrak{n}\,\dot{\mathfrak{v}})^2}{(1-\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}/c)^6}\right]. \quad (12.26)$$

Ist die Geschwindigkeit v der Ladung klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so kann das Strahlungsfeld nach Multipolen entwickelt werden, und man kann zu seiner Berechnung die Gleichungen (12.17) bis (12.22) benutzen.

Als Ergebnis der Strahlung verliert das sich beschleunigt bewegende Teilchen seine Energie E und seinen Impuls $\mathfrak{p}$ an das elektromagnetische Feld. Man kann den Verlust der i-ten Komponente des Viererimpulses $p_i = (\mathfrak{p}, i\,E/c)$ je Einheit der Eigenzeit τ durch Vierergeschwindigkeit u_i und Viererbeschleunigung w_i des Teilchens ausdrücken:

$$-\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2e^2}{3c^3}\,w_k^2\,u_i. \quad (12.27)$$

Der Energieverlust $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t'$ eines Teilchens je Zeiteinheit im Laborsystem (Geschwindigkeit des Energieverlustes) unterscheidet sich um den Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ von der vierten Komponente der Beziehungen (12.27), da $\mathrm{d}t' = \gamma\,\mathrm{d}\tau$ ist. Die mit Hilfe der Gleichung (12.26) bestimmte Strahlungsintensität stimmt nicht mit dem Energieverlust je Zeiteinheit überein (s. die Aufgaben 663 bis 669).

Das Feld $\mathfrak{A}(\mathfrak{R}_0, t)$ einer Ladung, die sich periodisch mit der Periode $2\pi/\omega_0$ auf der geschlossenen Bahn $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0(t')$ bewegt, kann in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{R}_0, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathfrak{A}_l\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 l t}.$$

Die Fourier-Komponente $\mathfrak{A}_l$ des Feldes ist in großen Abständen von der Bahn

$$\mathfrak{A}_l = e\,\frac{\mathrm{e}^{ikR_0}}{cR_0T}\oint \mathrm{e}^{i[l\omega_0 t' - \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0(t')]}\,\mathfrak{v}(t')\,\mathrm{d}t' \quad (12.28)$$

mit

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \mathfrak{k} = \frac{l\,\omega_0}{c}\,\mathfrak{n}.$$

Dabei wird über die gesamte Teilchenbahn integriert.

Geladene Teilchen bewegen sich bei einem Zusammenstoß beschleunigt und strahlen daher elektromagnetische Energie ab. Das Bewegungsgesetz der stoßenden Teilchen und die beim Stoß von ihnen emittierte Energie werden durch den Typ der Wechselwirkung und den Stoßparameter s bestimmt (falls die potentielle Wechselwirkungsenergie zwischen den stoßenden Teilchen nur von ihrem gegenseitigen Abstand abhängt). Die Energie, die bei der Streuung

eines Teilchenstroms in allen Richtungen abgestrahlt wird, charakterisiert man am besten durch die effektive Gesamtstrahlung

$$\varkappa = 2\pi \int_0^\infty \Delta W(s)\, s\, \mathrm{d}s. \tag{12.29}$$

Dabei bedeuten $\Delta W(s)$ die Energie, die beim Stoß zweier Teilchen abgestrahlt wird, und s den Stoßparameter.

Die Winkelverteilung der Strahlung wird durch die differentielle effektive Ausstrahlung $\mathrm{d}\varkappa_{\mathfrak{n}}$ charakterisiert, die durch den Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}\varkappa_{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = 2\pi \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}[\Delta W_{\mathfrak{n}}(s)]}{\mathrm{d}\Omega}\, s\, \mathrm{d}s \tag{12.30}$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $\mathrm{d}[\Delta W_{\mathfrak{n}}(s)]/\mathrm{d}\Omega$ die Energie, die bei einem Stoß mit dem Stoßparameter s in der Richtung $\mathfrak{n}$ in den Raumwinkel 1 emittiert wird, gemittelt über das Azimut in der zum Teilchenstrom senkrechten Ebene. Eine analoge Gleichung ergibt sich für die differentielle effektive Ausstrahlung $\mathrm{d}\varkappa_\omega/\mathrm{d}\omega$ je Einheitsfrequenzintervall. Spielt die Dipolstrahlung beim Stoß die Hauptrolle, so lautet (12.30)

$$\frac{\mathrm{d}\varkappa_{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}[A + B P_2(\cos\vartheta)]. \tag{12.31}$$

Dabei sind $P_2(\cos\vartheta) = {}^3/_2 \cos^2\vartheta - {}^1/_2$ ein LEGENDREsches Polynom (s. Anhang II), ϑ der Polarwinkel zwischen der Richtung $\mathfrak{n}$ der Strahlung und der Stromrichtung z der einfallenden Teilchen, und

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}\int_0^\infty 2\pi s\, \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathfrak{p}}^2\, \mathrm{d}t, \\ B &= \frac{1}{3}\int_0^\infty 2\pi s\, \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{\mathfrak{p}}^2 - 3\ddot{p}_z^2)\, \mathrm{d}t. \end{aligned}\right\} \tag{12.32}$$

Die spektrale Zerlegung der Strahlung erhält man bei einem Stoß der Dauer τ im Gebiet kleiner Frequenzen $\omega\tau \ll 1$ mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2}{3\pi c^3}[\sum e(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)^2], \tag{12.33}$$

wobei über alle stoßenden Teilchen summiert wird und $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeiten der Teilchen vor bzw. nach dem Stoß ($v_1, v_2 \ll c$) bedeuten.

Aufgaben:

657*. Man berechne die LIÉNARD-WIECHERTschen Potentiale (12.23) aus den allgemeinen Formeln für retardierte Potentiale.

Hinweis: Die Ladungsverteilung eines punktförmigen Teilchens wird durch die räumliche Dichte $\varrho(\mathfrak{r}', t) = e\,\delta[\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_0(t)]$ beschrieben, wobei $\mathfrak{r}_0(t)$ den Radiusvektor des Teilchens zur Zeit t und e seine Ladung bedeuten. Zur Berechnung des Volumenintegrals über $\mathrm{d}V' = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$ gehe man zu der neuen Variablen $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_0$ über.

658*. Ausgehend von der Potenzreihenentwicklung nach R/c in den allgemeinen Formeln (12.1) und (12.2) der retardierten Potentiale, bestimme man die Potenzreihenentwicklung der LIÉNARD-WIECHERTschen Potentiale nach $1/c$.

659. Die Potentiale des Feldes einer sich gleichförmig bewegenden Punktladung sind aus den LIÉNARD-WIECHERTschen Potentialen zu bestimmen, indem man in den letzteren die retardierte Zeit t' durch die Beobachtungszeit t des Feldes ausdrückt (s. die Aufgaben 535 und 711).

660. Man berechne die Feldstärke einer sich gleichförmig bewegenden Punktladung mit Hilfe der allgemeinen Gleichungen (12.25). Durch Elimination der retardierten Zeit t' drücke man das Feld durch die Zeit t aus, zu der es beobachtet wird (s. Aufgabe 535).

661. Die Ladung e bewege sich mit kleiner Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ in einem begrenzten Gebiet. Man berechne Näherungsausdrücke für das elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ des Teilchens in den Punkten mit großem Abstand r des Teilchens gegenüber der Ausdehnung des Gebietes, in dem sich die Ladung bewegt. Wo liegen die Grenzen der quasistationären und der Wellenzone?

662. Man bestimme die Winkelverteilung $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ der Strahlung der in der vorigen Aufgabe betrachteten Ladung sowie die Gesamtintensität I der Strahlung.

663*. Ein Teilchen verliert je Zeiteinheit durch Strahlung in eine bestimmte Richtung die Energie $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\Omega$ (Energieverlust je Zeiteinheit im Raumwinkel 1 in vorgegebener Richtung). Man drücke diese Größe durch die Winkelverteilung $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ der Strahlung in der durch den POYNTINGschen Vektor bestimmten Richtung aus. Die Aufgabe ist auf zwei Wegen zu lösen:

a) analytisch durch Betrachtung des Zusammenhangs zwischen der retardierten Zeit t' und der Beobachtungszeit t,

b) geometrisch durch Betrachtung der Form des Raumgebietes, in dem die in der Zeit $\mathrm{d}t'$ abgestrahlte elektromagnetische Energie lokalisiert ist.

664. Man beweise folgenden Satz: Bewegt sich ein Teilchen periodisch, so stimmt der über eine Periode gemittelte Energieverlust je Zeiteinheit mit der mittleren Strahlungsintensität überein.

665. Man beweise die Gleichung (12.26).

666. Man bestimme den über alle Richtungen summierten Energieverlust $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t'$ je Zeiteinheit eines strahlenden geladenen Teilchens, indem man ihn

a) durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}(t')$ und die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}(t')$,

b) durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}(t')$ und die Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ des äußeren

elektromagnetischen Feldes, das die beschleunigte Bewegung des Teilchens hervorruft,

ausdrückt. Das Teilchen besitze die Masse m und die Ladung e.

667. Man drücke den Impulsverlust $-\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t'$ je Zeiteinheit eines emittierenden geladenen Teilchens durch den über alle Richtungen summierten Energieverlust aus.

668. Ein emittierendes Teilchen werde von zwei Bezugssystemen aus beobachtet, die sich gleichförmig gegeneinander bewegen. Man vergleiche die über alle Richtungen summierten Energieverluste je Zeiteinheit des Teilchens in den beiden Bezugssystemen.

669. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines relativistischen Teilchens sei im retardierten Zeitpunkt t' seiner Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ parallel. Man bestimme die momentane Winkelverteilung $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ der Strahlung, die momentane Gesamtintensität I der Strahlung und den über alle Richtungen summierten Energieverlust $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t'$ je Zeiteinheit.

670. Die Geschwindigkeit eines Teilchens nehme in der Zeit τ von v_0 auf Null ab. Man bestimme die Winkelverteilung der Bremsstrahlung, die während der Bewegung des Teilchens emittiert wird (die Beschleunigung werde als konstant vorausgesetzt). Welche Impulsdauer Δt registriert ein ruhendes Gerät?

671. Ein relativistisches Teilchen mit der Ladung e, der Masse m und dem Impuls p bewege sich auf einer Kreisbahn im konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Der Radius der Bahn sei $a = c\,p/eH$. Man bestimme den über alle Richtungen summierten Energieverlust $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t'$ je Zeiteinheit des Teilchens.

672. Man bestimme die momentane Winkelverteilung $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ der Strahlung eines relativistischen Teilchens, dessen Geschwindigkit in einem retardierten Zeitpunkt auf seiner Beschleunigung senkrecht steht. Man zeichne die Polardiagramme für die Fälle $v \ll c$ und $v \approx c$. In welchen Richtungen ist keine Strahlung vorhanden?

673*. Ein Teilchen mit der Ladung e und der Masse m bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf einem Kreis im konstanten homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Man berechne die Winkelverteilung $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ der Strahlung, gemittelt über eine Umlaufperiode des Teilchens im Magnetfeld. Welchen Charakter hat die Winkelverteilung im extrem relativistischen Fall $v \approx c$?

Hinweis: Man benutze die Ergebnisse der vorigen Aufgabe und gehe zu Kugelkoordinaten über, wobei der Pol im Mittelpunkt der Kreisbahn liegt und die Polarachse die Richtung von $\mathfrak{H}$ hat. Bei der Berechnung des Integrals über den Azimutwinkel benutze man die Formeln 3.428 aus [72].

674*. Man bestimme die Fourier-Komponenten $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{H}_n$ des Strahlungsfeldes einer Ladung e, die sich mit relativistischer Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius a bewegt. Welche Polarisation haben die Fourier-Komponenten?

Hinweis: Man benutze die Formeln (A III.11) und (A III.9).

675. Wie erklärt sich das Vorhandensein der höheren FOURIER-Komponenten im Spektrum des Feldes einer Ladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt (s. die vorige Aufgabe)? Wie ändern sich die Intensitäten dieser Harmonischen für $\beta = v/c \to 0$? Welche Form hat das Strahlungsfeld in diesem Fall?

676*. Die Ladung e bewege sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ auf einem Kreis mit dem Radius a. Man bestimme die spektrale Verteilung $\mathrm{d}I_n/\mathrm{d}\Omega$ der Strahlung in vorgegebener Richtung.

677*. Auf einer Kreisbahn sollen sich gleichzeitig N Elektronen befinden (s. Aufgabe 674). Welchen Einfluß haben die Interferenzen der durch diese Elektronen erzeugten Felder auf die Strahlungsintensität der n-ten FOURIER-Komponente? Man untersuche folgende Spezialfälle:

a) völlig ungeordnete Anordnung der Elektronen,

b) reguläre Anordnung der Elektronen im Abstand $2\pi/N$ voneinander,

c) Anordnung der Elektronen in Form einer Wolke, deren Ausdehnung klein gegen den Bahnradius ist (das Ergebnis hängt in diesem Fall wesentlich vom Verhältnis der Wellenlänge zur Ausdehnung der Wolke ab).

678*. Zwei Teilchen mit den Ladungen e_1, e_2 und den Massen m_1, m_2 ($e_1/m_1 \neq e_2/m_2$) bewegen sich auf einer elliptischen Bahn (s. Aufgabe 614). Man berechne die zeitlich gemittelte Gesamtintensität $\bar{I}$ der Strahlung.

679. Man bestimme den über eine Periode gemittelten Drehimpulsverlust $\overline{\mathrm{d}\mathfrak{L}/\mathrm{d}t}$ eines Systems zweier Teilchen, die sich auf einer elliptischen Bahn bewegen (s. die vorige Aufgabe).

Hinweis: Die allgemeine Formel für den Drehimpulsverlust wurde in der Aufgabe 632 abgeleitet.

680*. Man bestimme die differentielle effektive Ausstrahlung $\mathrm{d}\varkappa_{\mathrm{n}}/\mathrm{d}\Omega$ bei der Streuung eines Stromes von Teilchen mit den Ladungen e_1, den Massen m_1 und der Geschwindigkeit v_0 an einem gleichnamig geladenen Teilchen der Ladung e_2 und der Masse m_2.

Hinweis: Bei der Berechnung der Integrale A und B in den Gleichungen (12.31) gehe man von der Integration über $\mathrm{d}t$ mit Hilfe von $\mathrm{d}t = \mathrm{d}r/\dot{r}$ zur Integration über $\mathrm{d}r$ über. Dabei ist

$$\dot{r} = v_0 \sqrt{1 - \frac{2a}{r} - \frac{s^2}{r^2}},$$

s bedeutet den Stoßparameter und $2a$ den minimalen Abstand, bis auf den sich die Teilchen nähern können (er wird bei $s = 0$ erreicht). Man integriere zuerst über $\mathrm{d}s$ und dann erst über $\mathrm{d}r$. Bei der Berechnung von B benutze man die in der Lösung zur Aufgabe 614 angegebene Bahngleichung der Relativbewegung.

681*. Ein Teilchen mit der Ladung e_1 und der Masse m stoße auf ein zweites Teilchen mit der Ladung e_2, dessen Masse groß gegen m sei; der Stoßparameter sei s. Die kinetische Energie des ankommenden Teilchens sei groß gegen die potentielle Wechselwirkungsenergie $e_1 e_2/r$ zwischen den Teilchen. Die Ge-

schwindigkeit v des ankommenden Teilchens kann dann während des Stoßes als konstant angesehen werden (sie ist nicht notwendig klein gegen die Lichtgeschwindigkeit). Man bestimme die Winkelverteilung $d\Delta W_{\mathfrak{n}}/d\Omega$ der Gesamtstrahlung und untersuche insbesondere den Fall $\beta = v/c \ll 1$.

Hinweis: Man benutze die allgemeine Formel (12.26) für die Winkelverteilung der Gesamtstrahlung. Die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ des Teilchens ist mit Hilfe der Beziehungen

$$\mathfrak{v} = \frac{c^2 \mathfrak{p}}{E}, \qquad \dot{\mathfrak{p}} = e_1 e_2 \frac{\mathfrak{r}}{r^3}$$

durch die an ihm angreifende COULOMB-Kraft und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Teilchens auszudrücken.

682. Man bestimme die Gesamtstrahlung der Energie ΔW und des Impulses $\Delta \mathfrak{p}$ des in der vorigen Aufgabe betrachteten Teilchens während der gesamten Zeit seiner Bewegung unmittelbar durch Integration der in der vorigen Aufgabe berechneten Winkelverteilung sowie mit Hilfe der in den Aufgaben 666 und 667 erhaltenen Gleichungen.

683*. Ein Teilchen der Ladung e_1 und der Masse m stoße auf ein schweres Teilchen der Ladung e_2. Der Stoßparameter sei groß, so daß die kinetische Energie des Teilchens während der gesamten Bewegung groß gegen seine potentielle Energie bleibt. Die Geschwindigkeit des Teilchens sei $v \ll c$. Man bestimme das Bremsstrahlungsspektrum $d\Delta W_\omega/d\omega$ des Teilchens.

Hinweis: Man benutze die Formel (A III.15).

684. Ein Strom von Teilchen mit der Ladung e und der Geschwindigkeit $v \ll c$ werde an einer absolut harten Kugel mit dem Radius a gestreut. Man bestimme die effektive Ausstrahlung $d\varkappa_\omega$ im Frequenzintervall $d\omega$. Wie groß ist die effektive Gesamtstrahlung $\varkappa$?

685*. Ein Strom von Teilchen mit der Ladung e_1 und der Masse m_1 werde an einem Teilchen mit der Ladung e_2 und der Masse m_2 gestreut ($e_1/m_1 = e_2/m_2$). Man drücke die differentielle effektive Ausstrahlung $d\varkappa_{\mathfrak{n}}/d\Omega$ durch die Komponenten $Q_{\alpha\beta}$ des Quadrupolmomentes des Systems aus. Das Ergebnis ist in einer (12.31) und (12.32) analogen Form darzustellen.

686*. Man bestimme die effektive Gesamtstrahlung $\varkappa$ bei der Streuung eines Stromes geladener Teilchen (Ladung e, Masse m, Geschwindigkeit v_0) an einem gleichartigen Teilchen.

12.3. Wechselwirkung geladener Teilchen mit Strahlung

Ein emittierendes System von Teilchen überträgt dem Strahlungsfeld Energie und Impuls und erfährt seitens dieses Feldes eine Rückwirkung (Strahlungsreaktion). Handelt es sich um elektrische Dipolstrahlung, so greift an jedem Teilchen mit der Ladung e die Strahlungsreaktionskraft (Strahlungsdämpfung)

$$\mathfrak{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathfrak{p}} \qquad (12.34)$$

an. Dabei bezeichnet $\mathfrak{p}$ das elektrische Dipolmoment des Gesamtsystems.

Im Spezialfall einer Ladung mit der Geschwindigkeit $v \ll c$ gilt

$$\mathfrak{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathfrak{v}}. \tag{12.35}$$

Im extrem relativistischen Fall $v \approx c$ kann die Strahlungsreaktionskraft in der Form

$$f_x = -\frac{2e^4}{3(m\,c^2)^4}\left[(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2\right] E^2 \tag{12.36}$$

geschrieben werden; die x-Achse hat die Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind die Komponenten des äußeren Feldes, in dem sich das emittierende Teilchen bewegt, und

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

bedeutet die Energie des Teilchens.

Die Strahlungsreaktionskraft, die durch die Gleichungen (12.34) bis (12.36) bestimmt wird, berücksichtigt die Strahlungsreaktion nicht exakt. Man kann diesen Begriff nur dann benutzen, wenn die Dämpfung klein gegen andere Kräfte ist, die an dem Teilchen in seinem Ruhsystem angreifen. Diese Bedingung ist bei der Bewegung eines Teilchens mit der Ladung e und der Masse m in einem gegebenen elektromagnetischen Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ erfüllt, wenn

$$\lambda \gg r_0, \tag{12.37}$$

$$H \ll \frac{m^2\,c^4}{e^3} = \frac{e}{r_0^2} \tag{12.38}$$

gilt, wobei λ die vom Teilchen emittierte Wellenlänge und $r_0 = e^2/m\,c^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm den klassischen Elektronenradius bedeuten. Die Bedingungen (12.37) und (12.38) besagen, daß die klassische Elektrodynamik bei sehr kleinen Abständen (großen Frequenzen) und in sehr starken Feldern einen inneren Widerspruch aufweist.[1])

Eine elektromagnetische Welle, die auf ein System von Ladungen trifft, beschleunigt deren Bewegung. Dadurch wird das System zu einer Quelle von sekundären Wellen: Die einfallende Welle wird gestreut. Der Streuprozeß wird durch den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt beschrieben, deren Definitionen in 8.2. angegeben sind.

Das elektromagnetische Feld eines sich bewegenden geladenen Teilchens besitzt Energie und einen Impuls und folglich eine Masse (elektromagnetische Masse des Teilchens). Die Frage der elektromagnetischen Masse kann nicht auf der Grundlage der klassischen Elektrodynamik gelöst werden. Die klas-

---

[1]) Die klassische Elektrodynamik wird infolge von Quanteneffekten bereits früher falsch, als ihr innerer Widerspruch zum Ausdruck kommt, nämlich schon bei Abständen der Größenordnung $\lambda_0 = \hbar/m\,c = 137\,r_0$ und in Feldern $H \approx e/\lambda_0\,r_0 = m^2\,c^4/137\,e^3$.

sische Theorie erklärt jedoch gut die Idee der elektromagnetischen Masse. Die Aufgaben 687 bis 690 illustrieren die Grundannahmen dieser Theorie sowie die in ihr auftretenden Schwierigkeiten.

Aufgaben:

687*. Man bestimme den Impuls des elektromagnetischen Feldes eines Teilchens mit der Ladung e, das sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt. Das Teilchen wird in seinem Ruhsystem S' als harte Kugel mit dem Radius r_0 betrachtet (im System, in dem die Geschwindigkeit des Teilchens gleich v ist, gibt es eine LORENTZ-Kontraktion). Man führe die elektromagnetische Ruhmasse m_0 des Teilchens ein, die mit seiner Feldenergie im Zustand der Ruhe durch die EINSTEINsche Beziehung zusammenhängt. Welche Schwierigkeiten entstehen dabei?

688. Man bestimme die Energie W_m des Magnetfeldes sowie die elektromagnetische Gesamtenergie W des in der vorigen Aufgabe betrachteten Teilchens.

689*. Man bestimme die Kraft $\mathfrak{F}$, mit der ein geladenes kugelsymmetrisches Teilchen bei einer beschleunigten Translationsbewegung mit kleiner Geschwindigkeit $v \ll c$ auf sich selbst wirkt (Selbstkraft). Retardierung und LORENTZ-Kontraktion werden nicht berücksichtigt.

Hinweis: Man berechne die resultierende Kraft, die an einem kleinen Element de der Teilchenladung angreift, mit Hilfe der LIÉNARD-WIECHERTschen Beziehung (12.25) für die Feldstärke.

690*. Man berechne den genaueren Ausdruck für die Selbstkraft $\mathfrak{F}$ eines geladenen kugelsymmetrischen Teilchens (s. die vorige Aufgabe). Bei der Lösung ist der Effekt der Endlichkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wechselwirkung zu berücksichtigen, und zwar bis auf Glieder erster Ordnung in der Ausbreitungszeit $t' - t$ der Wechselwirkung zwischen den Elementen des Teilchens genau. Insbesondere betrachte man den Grenzfall eines punktförmigen Teilchens. Man schätze in diesem Grenzfall den Beitrag der vernachlässigten Terme höherer Ordnung in $t' - t$ ab.

691. Wie groß wäre die Lebenszeit T eines RUTHERFORDschen Wasserstoffatoms, wenn sich das Elektron im Atom wie ein klassisches Teilchen bewegen und Strahlung emittieren würde? Es wird vorausgesetzt, daß sich das Elektron unter Energieverlust auf einer Spirale auf das Proton zu bewegt, deren Krümmung so beschaffen ist, daß es in jedem Zeitpunkt wie eine Ladung auf einer Kreisbahn emittiert (der Bahnradius ändert sich schwach mit der Zeit). Unter welcher Bedingung trifft diese Annahme zu? Der Anfangsradius des Atoms sei $a = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm.

692. Ein relativistisches Teilchen mit der Ladung e und der Masse m bewege sich auf einer Kreisbahn im konstanten homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$ und verliere Energie durch Strahlung. Man bestimme die zeitlichen Änderungen $E(t)$ und $r(t)$ der Energie bzw. des Bahnradius. Im Anfangszeitpunkt $t = 0$ sei die Energie des Teilchens gleich E_0 (s. Aufgabe 691).

693. Im Betatron werden Elektronen auf einer Bahn mit dem konstanten Radius a durch ein elektrisches Wirbelfeld beschleunigt. Dieses wird durch ein veränderliches Magnetfeld der Frequenz ω induziert. Man bestimme die kritische Energie E_{kr} des Elektrons, bei der die Strahlungsverluste mit der Energie vergleichbar werden, die das Elektron durch die Arbeit des elektrischen Wirbelfeldes erhält.

694*. Ein Teilchen mit der Ladung e und der Masse m nähere sich dem Zentrum der quasielastischen Kraft $-m\,\omega_0^2\,\mathfrak{r}$. Im Zeitpunkt $t = 0$ entstehen in diesem harmonischen Oszillator freie Schwingungen. Man bestimme das Gesetz ihrer Dämpfung, wobei die Strahlungsreaktion berücksichtigt, aber als klein vorausgesetzt werden soll. Außerdem sind die Form des Spektrums und die Breite der Spektrallinie („natürliche Linienbreite") anzugeben. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Unbestimmtheit der Energie $\hbar\,\omega$ der emittierten Photonen und der Lebensdauer des Oszillators?

695. Ein Gas bestehe aus Atomen der Masse m. Ein ruhendes Atom dieses Gases emittiere Licht mit der Frequenz ω_0 (die natürliche Breite der Emissionslinie wird vernachlässigt). Wegen der Wärmebewegung der Atome registriert ein Beobachter, der in bezug auf den Gasbehälter ruht, eine Frequenz, die sich von ω_0 unterscheidet. Man bestimme die Form $\mathrm{d}I_\omega/\mathrm{d}\omega$ des Emissionsspektrums des auf die Temperatur T erwärmten Gases.

Hinweis: Die Geschwindigkeiten der Gasatome sind nach dem MAXWELLschen Gesetz

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-m v^2/2kT}\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$$

verteilt, wobei $\mathrm{d}N/N$ den Bruchteil der Moleküle, deren Geschwindigkeiten v im Intervall $\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$ enthalten sind, und $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/grd die BOLTZMANN-Konstante bedeuten. Da die Bedingung $v \ll c$ erfüllt ist, kann man in der Gleichung für die DOPPLERsche Frequenzverschiebung (s. Aufgabe 511) alle Terme vernachlässigen, die von höherer Ordnung als v/c sind.

696. Ein emittierendes Atom, das durch das Modell des harmonischen Oszillators beschrieben wird, bewege sich in einem Gas; dabei stößt es mit anderen Atomen zusammen, wodurch sich sein Schwingungszustand sprunghaft ändert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die freie Bewegung des Atoms von τ bis $\tau + \mathrm{d}\tau$ andauert, wird durch die Gleichung

$$\mathrm{d}W(\tau) = \frac{\Gamma}{2}\,\mathrm{e}^{-\Gamma\tau/2}\,\mathrm{d}\tau$$

beschrieben (die mittlere Zeit zwischen den Stößen ist $\bar{\tau} = 2/\Gamma$). Unter Vernachlässigung der natürlichen Linienbreite bestimme man die Form $\mathrm{d}I_\omega/\mathrm{d}\omega$ des Emissionsspektrums dieses Oszillators.

697*. Auf einen dreidimensionalen isotropen Oszillator treffe eine durch die spektrale Intensitätsverteilung S_ω und die Gesamtintensität

$$S = \int_0^\infty S_\omega\,\mathrm{d}\omega$$

charakterisierte Wellengruppe (S ist die Energiemenge, die während der Durchgangszeit der Gruppe durch 1 cm^2 fließt). Die Breite der spektralen Verteilung der Gruppe sei groß gegen die natürliche Linienbreite γ des Oszillators. Die Geschwindigkeit des Elektrons sei $v \ll c$. Man bestimme unter Berücksichtigung der Bremsstrahlung die Energie, die der Oszillator aus der Lichtwelle absorbiert. Welchen Einfluß haben die Polarisation und die Ausbreitungsrichtung der Wellen, die zur Gruppe gehören?

698. Man bestimme die Gesamtenergie ΔW, die ein eindimensionaler Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 aus einer Wellengruppe mit der spektralen Verteilung S_ω absorbiert, in den folgenden drei Fällen:

a) linear polarisierte ebene Wellengruppe, in der die Schwingungsrichtung des Vektors $\mathfrak{E}$ mit der Achse des Oszillators den Winkel ϑ bildet,

b) unpolarisierte ebene Wellengruppe, die sich unter dem Winkel Θ gegen die Achse des Oszillators ausbreitet,

c) isotropes Strahlungsfeld (auf den Oszillator treffen mit gleichen Wahrscheinlichkeiten ebene Wellen mit beliebigen Richtungen der Polarisation und beliebigen Ausbreitungsrichtungen).

699*. Eine linear polarisierte Welle treffe auf einen isotropen harmonischen Oszillator. Die Geschwindigkeit des Elektrons sei $v \ll c$. Man bestimme den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ bzw. σ der Welle unter Berücksichtigung der Strahlungsreaktionskraft. Insbesondere untersuche man die Fälle des stark bzw. schwach gebundenen Elektrons.

700. Eine zirkular polarisierte ebene elektromagnetische Welle werde durch eine freie Ladung gestreut. Man bestimme das Streufeld $\mathfrak{H}$ und untersuche seine Polarisation. Wie groß sind der differentielle und der totale Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ bzw. σ?

701. Eine unpolarisierte ebene Welle werde durch eine freie Ladung gestreut. Man bestimme den Depolarisationsgrad ϱ der Streuwelle in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϑ.

702*. Eine linear polarisierte Welle werde durch eine freie Ladung gestreut. Die Ladung bewege sich mit der relativistischen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in der Ausbreitungsrichtung der Welle. Man berechne den differentiellen Streuquerschnitt. Außerdem untersuche man die Streuung einer unpolarisierten Welle.

Hinweis: Man benutze die Gleichung (12.26) und drücke $\dot{\mathfrak{v}}$ durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ aus.

703*. Ein isotroper harmonischer Oszillator der Frequenz ω_0, der Ladung e und der Masse m befinde sich in einem schwachen homogenen statischen Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Man bestimme die Bewegung des Oszillators und untersuche die Polarisation der Oszillatorstrahlung.[1])

---

[1]) Ein solcher harmonischer Oszillator stellt das Modell eines Atoms im äußeren Magnetfeld dar. Die vorliegende Aufgabe hat also die Entwicklung der klassischen Theorie des ZEEMAN-Effektes zum Gegenstand.

12.4. Entwicklung eines elektromagnetischen Feldes nach ebenen Wellen

Ein elektromagnetisches Feld ist eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen $\mathfrak{r}$ und t. Bei vielen Problemen ist es günstig, FOURIER-Entwicklungen der Felder zu betrachten. Es werden folgende Arten von Entwicklungen benutzt:

1. Entwicklung nach monochromatischen Wellen:

$$f(\mathfrak{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\mathfrak{r})\, e^{-i\omega t}\, d\omega, \tag{12.39}$$

$$f_\omega(\mathfrak{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathfrak{r}, t)\, e^{i\omega t}\, dt; \tag{12.39'}$$

2. Entwicklung nach ebenen Wellen:

$$f(\mathfrak{r}, t) = \int f_{\mathfrak{k}}(t)\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{k}, \tag{12.40}$$

$$f_{\mathfrak{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathfrak{r}, t)\, e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{r}. \tag{12.40'}$$

Dabei ist f eine der Feldkomponenten und $d\mathfrak{k} = dk_x\, dk_y\, dk_z$.

3. Entwicklung nach ebenen monochromatischen Wellen:

$$f(\mathfrak{r}, t) = \int f_{\mathfrak{k}\omega}\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}\, d\mathfrak{k}\, d\omega, \tag{12.41}$$

$$f_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(\mathfrak{r}, t)\, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}\, d\mathfrak{r}\, dt. \tag{12.41'}$$

Aus den MAXWELLschen Gleichungen folgt, daß die Frequenz ω eine Funktion des Wellenvektors $\mathfrak{k}$ ist. Man bezeichnet diese Beziehung $\omega = \omega(\mathfrak{k})$ als Dispersionsgleichung. Da die Feldkomponenten $f(\mathfrak{r}, t)$ reell sind, ergeben sich die Beziehungen

$$f_\omega = f^*_{-\omega}, \quad f_{\mathfrak{k}} = f^*_{-\mathfrak{k}}, \quad f_{\mathfrak{k}\omega} = f^*_{-\mathfrak{k}, -\omega}. \tag{12.42}$$

Durch die Entwicklungen (12.40) und (12.41) wird das Feld im ganzen unendlich ausgedehnten Raum beschrieben. Dementsprechend ist in diesen Gleichungen über den gesamten Raum der Wellenvektoren und den ganzen Ortsraum zu integrieren. Die andere gebräuchliche Form der Entwicklung nach ebenen Wellen, bei der das Feld in einem begrenzten Volumen V betrachtet wird, ist in der Literatur, z.B. in [53] oder in [44], Kap. 1, zu finden.

Bei der Anwendung der FOURIER-Entwicklungen sind die Beziehungen (A I.15) und (A I.14) aus der Theorie der δ-Funktion sehr nützlich. Insbeson-

dere kann man mit Hilfe der Formeln (A I.15) und (12.42) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= 4\pi \int\limits_{0}^{\infty} |f_\omega|^2\,\mathrm{d}\omega,\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\mathfrak{r},t)\,\mathrm{d}\mathfrak{r} &= (2\pi)^3 \int |f_{\mathfrak{k}}|^2\,\mathrm{d}\mathfrak{k}\end{aligned}\right\} \tag{12.43}$$

beweisen.

Die Entwicklung nach ebenen monochromatischen Wellen spielt in der Quantenelektrodynamik eine große Rolle. Einer jeden solchen Welle entsprechen in der Quantentheorie Photonen, d. h. Teilchen, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c bewegen. Energie E und Impuls $\mathfrak{p}$ eines Photons hängen durch die Beziehungen

$$E = \hbar\,\omega, \qquad \mathfrak{p} = \hbar\,\mathfrak{k} \tag{12.44}$$

mit der Frequenz ω und dem Wellenvektor $\mathfrak{k}$ zusammen.

Aufgaben:

704. Man beweise die Beziehungen (12.43).

705. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den FOURIER-Komponenten der Felder $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und der Potentiale $\mathfrak{A}$, φ? (Man betrachte alle drei Varianten der FOURIER-Entwicklung.)

706. Wie lauten die MAXWELLschen Gleichungen der FOURIER-Komponenten für die drei Varianten der FOURIER-Entwicklung? Der Raum enthalte ein homogenes isotropes dispergierendes Medium mit den im allgemeinen frequenzabhängigen Parametern $\varepsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$.

707. Wie lauten die D'ALEMBERTsche Gleichung und die LORENTZ-Konvention in den FOURIER-Komponenten für die Potentiale $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t)$ und $\varphi(\mathfrak{r}, t)$? Man betrachte alle drei Varianten der FOURIER-Entwicklung. Der Raum enthalte ein homogenes isotropes Medium mit den Parametern $\varepsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$.

708*. Man entwickle das Potential φ des COULOMB-Feldes einer ruhenden Punktladung nach ebenen Wellen.

709. Man entwickle die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer ruhenden Punktladung e nach ebenen Wellen.

710. Eine Punktladung bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \text{const}$ im Vakuum. Man entwickle das Feld φ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ der Ladung nach ebenen monochromatischen Wellen.

711*. Man bestimme die Potentiale $\varphi(\mathfrak{r}, t)$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t)$ des Feldes einer sich gleichförmig bewegenden Ladung e (s. die Lösung der Aufgabe 535). Man benutze dazu die in der vorigen Aufgabe erhaltenen Entwicklungen dieser Potentiale nach ebenen Wellen.

Hinweis: Zur Berechnung des Integrals über $d\mathfrak{k}$ substituiere man die Variablen

$$k_x \to \frac{k_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad k_y \to k_y, \qquad k_z \to k_z$$

(x-Achse parallel zu $\mathfrak{v}$) und benutze die Entwicklung des Feldes einer ruhenden Punktladung nach ebenen Wellen (Aufgabe 708).

712*. Ein neutrales punktförmiges System von Ladungen bewege sich gleichförmig im Vakuum mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Man bestimme das elektromagnetische Feld $\varphi(\mathfrak{r}, t)$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t)$ mit Hilfe einer FOURIER-Entwicklung nach ebenen monochromatischen Wellen, wenn das elektrische und das magnetische Dipolmoment $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{m}$ im Laborsystem vorgegeben sind.

Hinweis: Die elektrische Strom- und Ladungsdichte des Systems werden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{j} = c \operatorname{rot}[\mathfrak{m}\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\, t)] + \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{p}\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\, t)],$$

$$\varrho = -\operatorname{div}[\mathfrak{p}\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\, t)]$$

ausgedrückt.

713. Man bestimme die Potentiale des Feldes eines gleichförmig bewegten magnetischen Dipols (mit dem Moment $\mathfrak{m}_0$ im Ruhsystem des Dipols). Die Geschwindigkeit des Dipols sei $\mathfrak{v}$. Man beschränke sich auf die beiden Spezialfälle

a) $\mathfrak{m}_0 \parallel \mathfrak{v}$,

b) $\mathfrak{m}_0 \perp \mathfrak{v}$.

Es sind die Transformationsgleichungen der Momente aus Aufgabe 538 zu benutzen.

714. Man berechne das Feld eines gleichförmig bewegten elektrischen Dipols (mit dem Moment $\mathfrak{p}_0$ im Ruhsystem) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 712 (s. die Lösung der Aufgabe 537).

715. Man zeige, daß die FOURIER-Komponenten der Entwicklung eines wirbelfreien Vektors nach ebenen Wellen parallel zu $\mathfrak{k}$ (longitudinal), die FOURIER-Komponenten eines quellenfreien Vektors dagegen senkrecht zu $\mathfrak{k}$ (transversal) sind.

716*. Wie lauten die Gleichungen für den wirbelfreien und den quellenfreien Teil der elektromagnetischen Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Vakuum? Man zeige, daß der wirbelfreie Teil $\mathfrak{E}_{||}(\mathfrak{r}, t)$ des elektrischen Feldes das momentane (nichtretardierte) COULOMB-Feld beschreibt, das durch die Ladungsverteilung in dem Zeitpunkt bestimmt ist, für den $\mathfrak{E}_{||}$ berechnet wird.

717*. Man entwickle das freie elektromagnetische Feld $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t)$ im Vakuum ($\varrho = 0$, $\mathfrak{j} = 0$) nach ebenen Wellen (in diesem Fall gilt $\varphi = 0$). Das Feld erfülle den gesamten unendlich ausgedehnten Raum. Man stelle die FOURIER-

Amplituden dieser Wellen in der Form

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}\lambda}(t) = \frac{c}{\pi\sqrt{2}}\, q_{\mathfrak{k}\lambda}(t)\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}$$

dar, wobei $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}$ Einheitsvektoren bedeuten, die die Polarisationsrichtungen der vorgegebenen transversalen Welle charakterisieren, so daß $\mathfrak{k}\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda} = 0$ ist (vgl. den Anfang von 8.1.). Dabei entsprechen offenbar jedem $\mathfrak{k}$ zwei voneinander unabhängige Polarisationseinheitsvektoren ($\lambda = 1, 2$). Die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}_1}$ und $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}_2}$ sind zueinander orthogonal: $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{e}^*_{\mathfrak{k}_2} = \mathfrak{e}^*_{\mathfrak{k}_1}\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}_2} = 0$. Man bestimme die Gleichungen, denen die komplexen „Koordinaten" $q_{\mathfrak{k}\lambda}(t)$ im allgemeinen Fall genügen. Man drücke die Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, die Energie W und den Impuls $\mathfrak{G}$ des Feldes durch $q_{\mathfrak{k}\lambda}$ und $\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}$ aus.

718*. Man benutze die Ergebnisse der vorigen Aufgabe, führe die reellen Oszillatorkoordinaten

$$Q_{\mathfrak{k}\lambda} = a_{\mathfrak{k}\lambda}\, \mathrm{e}^{-i\omega t} + a^*_{\mathfrak{k}\lambda}\, \mathrm{e}^{i\omega t}$$

ein und drücke die Feldvektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ durch diese Koordinaten aus. Man berechne ferner die Energie W und den Impuls $\mathfrak{G}$ des Feldes in den Koordinaten $Q_{\mathfrak{k}\lambda}$.

719*. Ein elektromagnetisches Strahlungsfeld werde durch die Oszillatorkoordinaten $q_{\mathfrak{k}\lambda}$ beschrieben (s. die Aufgabe 717). Wie lauten die Differentialgleichungen für die Wechselwirkung des Strahlungsfeldes mit einem geladenen nichtrelativistischen Teilchen in den Variablen $q_{\mathfrak{k}\lambda}$?

720. Man bestimme die Energieänderung $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ eines Strahlungsfeldes je Zeiteinheit infolge der Wechselwirkung eines Teilchens mit dem Feld und drücke sie durch die Oszillatorkoordinaten $q_{\mathfrak{k}\lambda}$ und die Kräfte $F_{\mathfrak{k}\lambda}(t)$ aus (s. die Lösung der vorigen Aufgabe).

721*. Ein Teilchen mit der Ladung e führe nach dem Gesetz $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 \sin\omega_0 t$, $\mathfrak{r}_0 = \mathrm{const}$ eine einfache harmonische Schwingung aus. Mit Hilfe der Methode der Feldoszillatoren (s. Aufgabe 719) bestimme man die Winkelverteilung und die Gesamtintensität I der Strahlung.[1])

722. Die Ladung e bewege sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 auf einem Kreis mit dem Radius a_0. Mit Hilfe der Methode der Feldoszillatoren ist die Polarisation des Strahlungsfeldes der Ladung zu untersuchen sowie die Winkelverteilung und die Gesamtintensität der Strahlung zu bestimmen (s. Aufgabe 634).

723*. Eine linear polarisierte Welle mit der Frequenz ω treffe auf einen harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0. Mit Hilfe der Methode der Feldoszillatoren bestimme man den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ bzw. σ (die Strahlungsdämpfung wird nicht berücksichtigt). Welche Polarisation hat die gestreute Strahlung?

---

[1]) Die Aufgabe kann natürlich wesentlich einfacher gelöst werden (s. Abschnitt 1 dieses Kapitels). Die vorgeschlagene Lösungsmethode ist wegen ihres engen Zusammenhangs mit der des analogen quantenelektrodynamischen Problems interessant.

724. Man bestimme den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ bzw. σ einer linear, einer zirkular und einer nicht polarisierten monochromatischen Welle an einer freien Ladung mit Hilfe der Methode der Feldoszillatoren (vgl. mit den Aufgaben 699 und 700).

725. An einer freien Ladung werde

a) eine unpolarisierte Welle der Frequenz ω,

b) eine zirkular polarisierte Welle gestreut.

Man untersuche die Polarisation des Strahlungsfeldes mit der Methode der Feldoszillatoren (s. die Aufgaben 699 und 700).

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[2] ACHIESER, A. I., und W. B. BERESTEZKI: Quantenelektrodynamik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962 (Übers. aus dem Russ.).

[9] BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. 2: Elektronentheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig–Berlin 1933.

[17] BUDAK, B.M., A.A. SAMARSKI und A.N. TYCHONOFF: Aufgabensammlung zur mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1956 (*Б. М. Будак, А. А. Самарский* и *А. Н. Тихонов:* Сборник задач по математической физике).

[25] FRENKEL, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 1: Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Springer-Verlag, Berlin 1926 (Übers. aus dem Russ.); Ausgewählte Werke Bd. 1. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1956 (Собрание избранных трудов, т. I).

[36] GORELIK, G. S.: Schwingungen und Wellen. Fismatgis, Moskau 1959 (*Г. С. Горелик:* Колебания и волны).

[40] GRINBERG, G. A.: Ausgewählte Probleme der mathematischen Theorie elektrischer und magnetischer Erscheinungen. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1948 (*Г. А. Гринберг:* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений).

[43] GUREWITSCH, L. E.: Elektrodynamik. Verlag der Staatlichen Universität Leningrad, Leningrad 1940 (*Л. Э. Гуревич:* Электродинамика).

[44] HEITLER, W.: The Quantum Theory of Radiation. Clarendon Press, Oxford 1954.

[46] IWANENKO, D., und A. SOKOLOW: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1953 (Übers. aus dem Russ.).

[50] KOMPANEYETS, A. S.: Theoretical Physics. Foreign Languages Publishing House, Moscow 1961.

[53] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHIZ: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[58] LEBEDEW, N. N., I. P. SKALSKAJA und JA. S. UFLJAND: Aufgabensammlung zur mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская* и *Я. С. Уфлянд:* Сборник задач по математической физике).

[67] PANOFSKY, W., und M. PHILLIPS: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.

[68] PAULI, W.: Relativitätstheorie, in: Handbuch der Physik, Bd. V/19. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1921.

[78] SMYTHE, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.

[80] Sommerfeld, A.: Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 4. Aufl., Leipzig 1964.
[83] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.
[87] Tychonoff, A. N., und A. A. Samarski: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übers. aus dem Russ.).
[88] Wainschtein, L. A.: Elektromagnetische Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1957 (*Л. А. Вайнштейн:* Электромагнитные волны).
[89] Wlassow, A. A.: Makroskopische Elektrodynamik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*А. А. Власов:* Макроскопическая электродинамика).

13. STRAHLUNG BEI DER WECHSELWIRKUNG GELADENER TEILCHEN MIT MATERIE

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Prozesse des Energieverlustes schneller Teilchen in Materie mit Hilfe der Methoden der klassischen makroskopischen Elektrodynamik betrachtet.

Die makroskopische Theorie, die die räumliche Dispersion der Dielektrizitätskonstanten und der Permeabilität nicht berücksichtigt, ist anwendbar, wenn man die Materie als dichtes Medium auffassen kann, d.h., wenn das hindurchfliegende Teilchen mit vielen Atomen gleichzeitig in Wechselwirkung steht. Das bedeutet, daß man mit Hilfe der makroskopischen Gleichungen nur diejenige Energie richtig bestimmen kann, die ein Teilchen den Elektronen der Materie überträgt, die sich in genügend großen Abständen r von der Teilchenbahn befinden ($r \gg a$, wobei a eine Größe von der Ordnung der Abstände zwischen den Atomen bezeichnet; in kondensierten Medien stimmt $a \approx 10^{-8}$ cm mit der linearen Ausdehnung eines Atoms überein).

Die Teilchengeschwindigkeit v muß der Bedingung $v \gg v_{\text{at}}$ genügen, wobei v_{at} die mittlere Geschwindigkeit der Atomelektronen ist. Bei kleineren Geschwindigkeiten überträgt das Teilchen seine Energie hauptsächlich den Elektronen in der Nähe seiner Bahn, wo die makroskopische Betrachtung nicht gilt.

Die Energieverluste, die durch Ionisation oder Anregung der Atome eines Mediums hervorgerufen werden, bezeichnet man als Ionisationsverluste. Ein Teilchen, das durch ein Plasma hindurchfliegt, verliert einen großen Teil seiner Energie durch Anregung von Schwingungen des Elektronengases als Ganzes (longitudinale Plasmaschwingungen, s. die Aufgaben 456 und 739).

Die Materie beeinflußt wesentlich auch die Emission transversaler elektromagnetischer Wellen durch Teilchen. Ein geladenes Teilchen, das sich in einem nichtabsorbierenden Medium mit einer konstanten Geschwindigkeit größer als die Phasengeschwindigkeit des Lichtes bewegt, emittiert transversale elektromagnetische Wellen (Tscherenkow-Strahlung, deren Theorie durch Tamm und Frank entwickelt wurde [86]).

Das elektromagnetische Feld, das ein bewegtes Teilchen in einem Medium erzeugt, wird durch die Maxwellschen Gleichungen bestimmt, in denen Ladungs- und Stromdichte am günstigsten in der Form

$$\varrho = e\,\delta[\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0(t)], \qquad \mathfrak{j} = e\,\dot{\mathfrak{r}}_0\,\delta[\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0(t)]$$

geschrieben werden, wobei e die Ladung und $\mathfrak{r}_0(t)$ den Radiusvektor des Teilchens bedeuten. Man löst die Maxwellschen Gleichungen im allgemeinen Fall eines dispergierenden Mediums durch Entwicklung der gesuchten Größen (Feldvektoren) in Fourier-Integrale bezüglich der Koordinaten und der Zeit. Dabei

ergibt sich zur Bestimmung der FOURIER-Komponenten ein System algebraischer Gleichungen (siehe z.B. die Aufgabe 726).

Bei der Berechnung der Energie der TSCHERENKOW-Strahlung pro Längeneinheit des Weges des Teilchens muß man das elektromagnetische Feld, das das Teilchen im Medium erzeugt, und den Energiestrom durch die Oberfläche eines Zylinders der Länge 1 mit unendlich großem Radius, der die Teilchenbahn umschließt, bestimmen. Das Integral dieses Energiestroms über die Zeit ergibt gerade die Gesamtenergie, die das Teilchen je Längeneinheit des Weges in Form elektromagnetischer Wellen emittiert.

Ist der Radius des Zylindermantels endlich (gleich a), so erfaßt das Integral des Energiestroms über die Zeit nicht nur die Energie der TSCHERENKOW-Strahlung, sondern auch die Energie, die den Elektronen des Mediums, die sich in Abständen $r > a$ von der Teilchenbahn befinden, übertragen wird.

Aufgaben:

726*. Ein Teilchen der Ladung e bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \text{const}$ in einem homogenen und isotropen Medium mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega)$ und der Permeabilität $\mu = 1$. Man berechne die Komponenten des elektromagnetischen Feldes, das durch das bewegte Teilchen erzeugt wird.

727*. Ein Teilchen bewege sich in einem nichtabsorbierenden Dielektrikum mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta c$. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorigen Aufgabe untersuche man das vom Teilchen erzeugte Feld in großen Abständen von seiner Bahn. Man zeige, daß ein genügend schnelles Teilchen transversale elektromagnetische Wellen emittiert (TSCHERENKOW-Effekt). Unter welchen Bedingungen entsteht diese Strahlung? Wie groß ist der gesamte TSCHERENKOWsche Verlust w_T je Längeneinheit des Weges?

728. Ein Teilchen mit der Ladung e bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit durch ein Medium, dessen Dielektrizitätskonstante näherungsweise durch

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

beschrieben wird. Man berechne die Energie w_T der TSCHERENKOW-Strahlung je Längeneinheit des Weges, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens der Bedingung $v^2 \varepsilon_0 > c^2$ genügt, wobei ε_0 der statische Wert der Dielektrizitätskonstanten ist. In welchem Winkelintervall ist die Strahlung konzentriert? Man schätze w_T mit den Werten

$$\omega_0 = 6 \cdot 10^{15}\,\text{s}^{-1}, \quad \varepsilon_0 = 2, \quad v = c$$

numerisch ab.

729. Die Bedingung $\cos\Theta = 1/\beta n$, die die Richtung der TSCHERENKOW-Strahlung bestimmt, ist durch Betrachtung der Interferenzen zwischen den einzelnen Wellen abzuleiten, die das Teilchen in verschiedenen Punkten seiner Bahn emittiert.

730. Man kann die TSCHERENKOW-Strahlung eines Teilchens als Folge einer Resonanz zwischen den Eigenschwingungen des Mediums und der mit dem bewegten Teilchen zusammenhängenden erzwingenden Kraft betrachten. Die Bedingung für die Entstehung der TSCHERENKOW-Strahlung ist durch Vergleich zwischen den Eigenschwingungsfrequenzen des Mediums und der erzwingenden Kraft abzuleiten.

731. Man zeige, daß die minimale Geschwindigkeit v_{min} eines Teilchens, bei der in einer vorgegebenen Richtung eine TSCHERENKOW-Strahlung entsteht, der Bedingung

$$v_{\text{min}} \cos\Theta = v_g(\omega_{\text{m}})$$

genügt, wobei v_g die Gruppengeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Dielektrikum, ω_{m} die Frequenz, bei welcher der Brechungsindex maximal ist, und Θ den Winkel zwischen der Strahlungsrichtung und der Geschwindigkeit des Teilchens bedeuten. Das Dielektrikum wird als nichtabsorbierend vorausgesetzt.

732*. Ein Teilchen bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta c$ in einem nichtdispergierenden Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ. Man bestimme die elektromagnetischen Potentiale φ und $\mathfrak{A}$. Man betrachte die beiden Fälle $v > v_\varphi$ und $v < v_\varphi$, wobei v_φ die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im betrachteten Medium ist.

733. Ein der x-Achse paralleler geradliniger Leiter bewege sich in Richtung der y-Achse mit der Geschwindigkeit $v = \text{const}$ in einem nichtabsorbierenden Medium mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega)$ und der Permeabilität $\mu(\omega)$. Im Laborsystem sei der Leiter elektrisch neutral, und in ihm fließe in x-Richtung der Strom I.[1] Man bestimme die Bedingung, unter der TSCHERENKOW-Strahlung auftritt. Wie groß ist die Gesamtenergie w_{T} der Strahlung je Längeneinheit des Leiters und je Weglängeneinheit? Welche Bremskraft $\mathfrak{f}$ wirkt auf die Längeneinheit des Leiters seitens des von ihm erzeugten Feldes?

Hinweis: Das Vektorpotential hat nur die nichtverschwindende Komponente $A_x(y, z, t)$. Bei der Ausführung der inversen FOURIER-Transformation benutze man die in der Lösung zur Aufgabe 732 formulierte Regel für das Umlaufen der Pole.

734. Zwei Punktladungen e_1 und e_2 bewegen sich mit gleicher konstanter Geschwindigkeit v im Abstand l voneinander auf einer Geraden in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega)$ und $\mu = 1$ (l wird im Laborsystem gemessen). Man berechne die Energie w_{T} der TSCHERENKOW-Strahlung je Weglängeneinheit. Man untersuche die beiden Fälle *a*) $e_1 = e_2 = e$ und *b*) $e_1 = -e_2 = e$. Durch Grenzübergang bestimme man die TSCHERENKOWschen Energieverluste eines punktförmigen elektrischen Dipols, der in der Bewegungsrichtung orientiert ist.

---

[1]) Ein sich schnell bewegender stromtragender Teilchenstrahl kann z.B. in Beschleunigern und bei verschiedenen elektrischen Entladungen erhalten werden.

735*. Zwei Punktladungen $+e$ und $-e$ bewegen sich mit gleicher konstanter Geschwindigkeit v im Abstand l voneinander in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega)$ und der Permeabilität $\mu = 1$. Die Verbindungsgerade der Ladungen soll mit der Geschwindigkeit den Winkel α bilden (l und α werden im Laborsystem gemessen). Mit Hilfe der in der vorigen Aufgabe benutzten Methode bestimme man die Energie w_T der TSCHERENKOW-Strahlung je Weglängeneinheit unter der Voraussetzung, daß l sehr klein ist.

736*. Ein magnetischer Dipol[1]) bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta c$ in einem nichtabsorbierenden Medium mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega)$ und der Permeabilität $\mu(\omega)$. Das im Laborsystem gemessene magnetische Moment $\mathfrak{m}$ sei in Richtung der Geschwindigkeit orientiert. Man berechne die auf die TSCHERENKOW-Strahlung entfallende Energie w_T je Weglängeneinheit.

Hinweis: Die Gleichungen für die Potentiale lassen sich durch FOURIER-Transformation integrieren. Ein bewegtes magnetisches Moment erzeugt den Strom $\mathfrak{j}(\mathfrak{r}, t) = c \operatorname{rot} \mathfrak{m}\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v} t)$.

737*. Ein schnelles Teilchen mit der Ladung e bewege sich durch ein nichtabsorbierendes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

wobei $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$ ist. Man bestimme den Energieverlust $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}l$ je Weglängeneinheit in Abständen von der Teilchenbahn größer als die interatomaren Abstände a (der Parameter a muß so gewählt werden, daß die makroskopische Betrachtung im Gebiet $r > a$ gerechtfertigt ist). Welche physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme im Ausdruck für den Energieverlust?

738*. Ein geladenes Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ durch ein Plasma mit der Dielektrizitätskonstanten (s. Aufgabe 312)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \qquad (\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m).$$

Man bestimme den Energieverlust $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}l$ je Weglängeneinheit infolge „ferner" Stöße. Darunter sind Stöße mit Stoßparametern $r > a$ zu verstehen, wobei a der Abstand ist, bei dem die makroskopische Betrachtung noch gilt.

739. Man zeige, daß die in der Aufgabe 456 betrachteten longitudinalen Plasmawellen Schwingungen der Elektronenwolke gegenüber der Gesamtheit der Ionen darstellen. Dazu betrachte man ein (im Mittel) elektrisch neutrales Plasma in einem rechtwinkligen Parallelepiped mit dem Volumen $V = a_1 a_2 a_3$. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die FOURIER-Komponenten $\varrho_{\mathfrak{k}}$ der

---

[1]) Ein neutrales System (Paket) von Teilchen mit magnetischem Moment strahlt wie ein magnetischer Dipol, wenn die Wellenlänge im Medium groß gegen die Abmessungen des Paketes ist.

elektrischen Ladungsdichte (die positiven Ionen sind als ruhend anzunehmen)? Man zeige, daß die $\varrho_{\mathfrak{k}}$ bei kleinen $\mathfrak{k}$ harmonische Schwingungen mit der „Plasmafrequenz" $\omega_p = \sqrt{4\pi\, e^2 N/m}$ ausführen können, wobei N die mittlere Zahl der Elektronen je Volumeneinheit und e, m Ladung und Masse des Elektrons bedeuten. Man schätze das Gebiet der $\mathfrak{k}$-Werte ab, in dem das entworfene Bild richtig sein wird.

740*. Die Punktladung e bewege sich im Vakuum normal zur Grenze eines idealen Leiters. Man bestimme die spektrale und die Winkelverteilung der Strahlung, die beim Übergang der Ladung aus dem Vakuum in den Leiter entsteht, unter Vernachlässigung der Beschleunigung, die die Ladung unter dem Einfluß der elektrischen Bildkraft erfährt. Die Geschwindigkeit der Ladung sei $v = \beta c$.

Hinweis: Das Feld im Vakuum wird durch die Ladung und ihr Bild erzeugt, die sich mit gleichen konstanten Geschwindigkeiten aufeinander zu bewegen. Sobald das Teilchen die Leitergrenze passiert, wird seine Ladung durch die freien Leiterelektronen abgeschirmt; das ist einem plötzlichen Abbremsen der Ladung und ihres Bildes im selben Punkt an der Leitergrenze äquivalent.

741*. Die Punktladung e bewege sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ im Vakuum senkrecht zur Grenze eines nichtabsorbierenden Dielektrikums mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\omega)$ und der Permeabilität $\mu = 1$. Beim Übertritt der Ladung aus dem Vakuum in das Dielektrikum entsteht eine Strahlung. Man berechne die spektrale und die Winkelverteilung der Strahlung im Vakuum (d.h. im Gebiet $z > 0$, s. Abb. 100, S. 457) unter Vernachlässigung der Beschleunigung der Ladung unter dem Einfluß der elektrischen Bildkraft.

Hinweis: Die durch das bewegte Teilchen hervorgerufene Ladungs- und Stromdichte sind durch den äquivalenten Satz harmonischer Oszillatoren zu ersetzen. Zur Bestimmung des Feldes in der Wellenzone benutze man den Reziprozitätssatz (s. [55], § 69) $\mathfrak{p}_B \mathfrak{E}_A(B) = \mathfrak{p}_A\, \mathfrak{E}_B(A)$. Dabei bedeuten $\mathfrak{E}_B(A)$ das Feld, das im Punkt A durch den im Punkt B befindlichen harmonischen Dipoloszillator $\mathfrak{p}_B$ erzeugt wird, und $\mathfrak{E}_A(B)$ das Feld, das im Punkt B durch den im Punkt A befindlichen Oszillator $\mathfrak{p}_A$ erzeugt wird. Da der Aufpunkt A in großem Abstand von dem Punkt liegt, in dem die Ladung auf das Dielektrikum auftrifft (in der Wellenzone), kann man bei der Berechnung von $\mathfrak{E}_A(B)$ die FRESNELschen Formeln benutzen.

LITERATUR

(Siehe auch die Ergänzungen S. 475)

[3] ACHIESER, A. I., und JA. B. FAINBERG: Langsame elektromagnetische Wellen. Usp. fis. Nauk **44** (1951), S. 321 (russ.).

[12] BOLOTOWSKI, B. M.: Theorie des TSCHERENKOW-Effekts. Usp. fis. Nauk **62** (1957), S. 201 (russ.).

[22] FERMI, E.: Ionisation Energy Losses in Gases and Condensed Media. Phys. Rev. **57** (1940), S. 485.

[30] Ginsburg, W. L.: Einige Fragen der Strahlungstheorie bei Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit im Medium. Usp. fis. Nauk **69** (1959), S. 537 (russ.).
[32] Ginsburg, W. L., und I. M. Frank: Über den Doppler-Effekt bei Überlichtgeschwindigkeit. Dokl. Akad. Nauk SSSR **56** (1947), H. 6 (russ.).
[47] Jelley, J. V.: Čerenkov Radiation and its Applications. Pergamon Press, London–New York–Paris 1958.
[55] Landau, L. D., und E. M. Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).
[62] Marx, G., und G. Györgyi: Über den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika. Ann. Phys. (Leipzig) **16** (1955), S. 241.
[86] Tamm, I. E., und I. M. Frank: Kohärente Strahlung eines schnellen Elektrons im Medium. Dokl. Akad. Nauk SSSR **14** (1937), S. 107 (russ.).

ANTWORTEN UND LÖSUNGEN

1. VEKTOR- UND TENSORRECHNUNG

1.1. Vektor- und Tensoralgebra. Vektor- und Tensortransformationen

1.

$$\cos\Theta = \mathfrak{n}\,\mathfrak{n}' = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\alpha - \alpha').$$

3. Da die b_i ($i = 1, 2, 3$) Komponenten eines Vektors sind, gilt bei einer Drehung des Koordinatensystems $b'_i = \alpha_{ik} b_k$. Setzt man b'_i in die Gleichung $a'_i b'_i = \text{inv}$ ein und vergleicht mit $a_k b_k = \text{inv}$, so erhält man $a_k = \alpha_{ik} a'_i$, d. h., die a_k transformieren sich bei Drehungen wie die Komponenten eines Vektors. Da sich das Vorzeichen einer Invariante (Skalar) bei Drehungen nicht ändert, müssen die Vorzeichen der Komponenten a_i und b_i sich entweder gleichzeitig umkehren (polare Vektoren) oder erhalten bleiben (Pseudovektoren).

10.

$$[\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}]_0 = i(a_{-1} b_{+1} - a_{+1} b_{-1}), \qquad [\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}]_{\pm 1} = \pm i(a_0 b_{\pm 1} - a_{\pm 1} b_0);$$

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \sum_{\mu=-1}^{1} (-1)^\mu a_{-\mu} b_\mu; \qquad r_\mu = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, r\, Y_{1\mu} \quad (\mu = -1, 0, +1).$$

11. Der dem vorgegebenen inverse Tensor genügt den Beziehungen

$$\varepsilon_{ik}\,\varepsilon^{-1}_{kl} = \delta_{il}. \tag{1}$$

Das sind algebraische Gleichungen in den Komponenten ε^{-1}_{ik} des inversen Tensors. Ihre Lösungen haben die Form

$$\varepsilon^{-1}_{ik} = \frac{\Delta_{ki}}{|\varepsilon|}, \tag{2}$$

wobei Δ_{ik} die Unterdeterminante des Elementes ε_{ik} in der Determinante $|\varepsilon|$ ist. Aus (2) folgt, daß $|\varepsilon| \neq 0$ eine für die Existenz des inversen Tensors notwendige Bedingung ist. Mit Hilfe der bekannten Eigenschaft der Determinante $\Delta_{ki}\,\varepsilon_{kl} = \delta_{il}\,|\varepsilon|$ sieht man, daß der inverse Tensor neben (1) auch der Bedingung

$$\varepsilon^{-1}_{ik}\,\varepsilon_{kl} = \delta_{il} \tag{3}$$

genügt. Ist ε_{ik} ein im Hauptachsensystem vorgegebener symmetrischer Tensor, d. h. $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(i)}\,\delta_{ik}$ (hier ist nicht über i zu summieren!), so gilt

$$\varepsilon^{-1}_{ik} = \frac{1}{\varepsilon^{(i)}}\,\delta_{ik}.$$

14. T_{ik} ist ein Tensor zweiter Stufe.

15. Bei der Transformation $\mathfrak{e}_i \to \mathfrak{e}'_i$ nach den Formeln $\mathfrak{e}'_i = \alpha_{ik}\,\mathfrak{e}_k$ bedeuten die Koeffizienten $\alpha_{ik} = \mathfrak{e}'_i\,\mathfrak{e}_k$ die Projektionen der neuen Einheitsvektoren auf

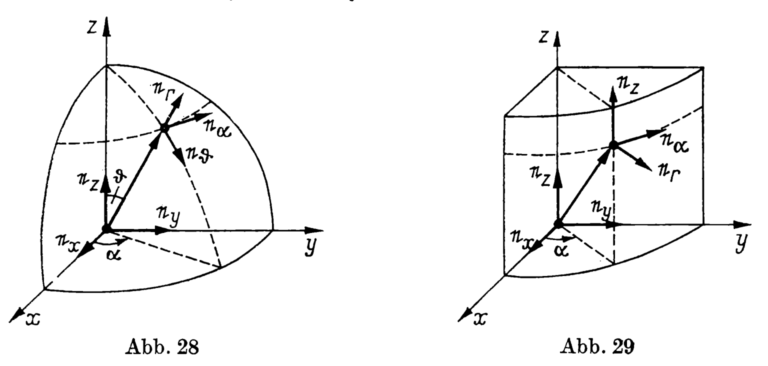


Abb. 28 Abb. 29

die alten. Durch Ausführung der Projektion (Abb. 28 und 29) erhält man folgende Transformationsmatrizen:

für den Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\alpha & \sin\vartheta\sin\alpha & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\alpha & \cos\vartheta\sin\alpha & -\sin\vartheta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\alpha & \cos\vartheta\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\vartheta\sin\alpha & \cos\vartheta\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix};$$

für den Übergang von kartesischen zu Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Bezeichnet man mit $\boldsymbol{g}$ die Matrix, die die Komponenten des Vektors in den Systemen S' und S miteinander verknüpft $(A'_i = g_{ik} A_k)$, so erhält man:

für den Fall der Spiegelung

$$\boldsymbol{g}_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

für den Fall der Drehung

$$\boldsymbol{g}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung, in der der Winkel α gezählt wird, und die Richtung der z-Achse bilden eine Rechtsschraube.

17. Benutzt man die Ergebnisse der vorigen Aufgabe, so erhält man

$$\boldsymbol{g}(\alpha_1\,\vartheta\,\alpha_2) = \boldsymbol{g}(\alpha_2)\,\boldsymbol{g}(\vartheta)\,\boldsymbol{g}(\alpha_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\vartheta\sin\alpha_1\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\vartheta\cos\alpha_1\sin\alpha_2 & \sin\vartheta\sin\alpha_2 \\ -\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\vartheta\sin\alpha_1\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\vartheta\cos\alpha_1\cos\alpha_2 & \sin\vartheta\cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1\sin\vartheta & -\sin\vartheta\cos\alpha_1 & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

18.

$$\boldsymbol{D}(\alpha_1\,\vartheta\,\alpha_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\vartheta)\,e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} & -\frac{i\sin\vartheta}{\sqrt{2}}\,e^{i\alpha_2} & -\frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)\,e^{i(\alpha_2-\alpha_1)} \\ -\frac{i\sin\vartheta}{\sqrt{2}}\,e^{i\alpha_1} & \cos\vartheta & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\vartheta\,e^{-i\alpha_1} \\ -\frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)\,e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\vartheta\,e^{-i\alpha_2} & \frac{1}{2}(1+\cos\vartheta)\,e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)} \end{pmatrix}.$$

19. Da die Matrix einer Drehung um den Winkel 0 (identische Transformation) gleich $\boldsymbol{1}$ ist, gilt für eine Drehung um einen kleinen Winkel $|\varepsilon_{ik}| \ll 1$. Für den Beweis der Beziehungen $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$ benutzen wir die Invarianz von $r^2 = \delta_{ik}\,x_i\,x_k$ gegenüber Drehungen. Wegen $x'_i = \alpha_{ik}\,x_k = x_i + \varepsilon_{ik}\,x_k$ erhält man unter Vernachlässigung von Größen, die von zweiter Ordnung klein sind, die Relation $r'^2 = r^2 + 2\varepsilon_{ik}\,x_i\,x_k$. Aus der Invarianz von r^2 folgt $\varepsilon_{ik}\,x_i\,x_k = 0$ für beliebige x_i, was nur bei $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$ möglich ist. Wir führen nun den Vektor $\overrightarrow{\delta\varphi}$ mit den Komponenten $\delta\varphi_i = {}^1/_2 e_{ikl}\,\varepsilon_{kl}$ ein. Dann gilt $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \overrightarrow{\delta\varphi} \times \mathfrak{r}$, woraus folgt, daß $\overrightarrow{\delta\varphi}$ den Vektor eines kleinen Drehwinkels darstellt, dessen Richtung die Drehachse und dessen Betrag den Drehwinkel ergibt.

22. Der Beweis ist für jede beliebige Dimensionszahl n gleich. Es sei $\boldsymbol{\alpha}$ die aus den Transformationskoeffizienten gebildete Matrix und $|\boldsymbol{\alpha}|$ ihre Determinante. Wegen der Orthogonalität der Matrix $\boldsymbol{\alpha}$ erhalten wir n^2 Gleichungen $\alpha_{ik}\alpha_{lk} = \delta_{il}$. Berücksichtigen wir, daß auf den linken Seiten dieser Gleichungen die Elemente einer Determinante stehen, die gleich dem Produkt zweier Determinanten $|\boldsymbol{\alpha}|$ ist, so erhalten wir $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{1}| = 1$ oder $|\boldsymbol{\alpha}|^2 = 1$. Daraus folgt $|\boldsymbol{\alpha}| = \pm 1$.

Wir zeigen nun, daß bei Drehungen $|\boldsymbol{\alpha}| = +1$ gilt. Der Drehung um den Winkel 0 (der identischen Transformation) entspricht $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$; da die Elemente der Matrix $\boldsymbol{\alpha}$ stetige Funktionen der Parameter sind, die die Drehung beschreiben (z. B. der EULERschen Winkel, siehe die Lösung der Aufgabe 17), so gilt auch bei einer Drehung um einen endlichen Winkel $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$.

Bei Spiegelungen hat die Determinante $|\boldsymbol{\alpha}|$ die Form

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \pm 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \pm 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Das Minuszeichen gilt für die Diagonalelemente der Determinante, die den gespiegelten Achsen entsprechen. Offenbar ist also in der Tat $|\alpha| = +1$ bei einer geraden und $|\alpha| = -1$ bei einer ungeraden Anzahl gespiegelter Achsen.

24. Von den 27 Größen e_{ikl} sind nur 6 ungleich Null. Die übrigen haben mindestens zwei gleiche Indizes und sind deshalb wegen der Antisymmetrie gleich Null ($e_{iik} = -e_{iik}$). Die von Null verschiedenen Komponenten sind

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = -e_{321} = -e_{213} = -e_{132} = 1.$$

Wir bilden nun den Ausdruck $\alpha_{1i}\,\alpha_{2k}\,\alpha_{3l}\,e_{ikl}$. Benutzt man die Definition der Determinante dritter Ordnung und die Definition von e_{ikl}, so kann man ihn in der Form $\alpha_{1i}\,\alpha_{2k}\,\alpha_{3l}\,e_{ikl} = |\alpha| = +1 = e'_{123}$ schreiben. Vertauscht man links zwei Indizes, z.B. 1 und 2, so erhält man

$$\alpha_{2i}\,\alpha_{1k}\,\alpha_{3l}\,e_{ikl} = -\alpha_{1k}\,\alpha_{2i}\,\alpha_{3l}\,e_{ikl} = -e'_{123} = e'_{213} = \dots$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, daß sich die e_{ikl} bei Drehungen wie die Komponenten eines Tensors dritter Stufe transformieren. Da sie sich bei Spiegelungen nicht ändern, bilden sie einen Pseudotensor dritter Stufe. Er besitzt die günstige Eigenschaft, daß seine Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind.

25. Wir schreiben den Tensor A_{ik} als Schema:

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

und verwenden die Bezeichnungen $A_{23} = A_1$, $A_{31} = A_2$, $A_{12} = A_3$. Diese drei Gleichungen lassen sich in der Form $A_i = {}^1/_2 e_{ikl} A_{kl}$ schreiben, wobei e_{ikl} der vollständig antisymmetrische Tensor dritter Stufe ist, der in der vorigen Aufgabe eingeführt wurde. Da e_{ikl} ein Tensor dritter Stufe und A_{kl} ein Tensor zweiter Stufe ist, bilden die Größen A_i ($i = 1, 2, 3$) einen Vektor. Man bezeichnet A_i als den zum Tensor A_{ik} dualen Vektor.

26.

$$[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_i = e_{ikl} A_k B_l, \qquad \mathrm{rot}_i \mathfrak{A} = e_{ikl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

Man kann $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ und $\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ als antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe oder als zu diesen duale Vektoren auffassen, deren Komponenten bei Spiegelungen ihr Vorzeichen nicht ändern (Pseudovektoren).

28.

a) $\mathfrak{a}^2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})$, **b)** $[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}]\,[(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}') \times \mathfrak{c}']$.

30.

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}')\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}')\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}') + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}')\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}')\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}') + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}')\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}')\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}') -$$
$$- (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}')\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}')\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}') - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}')\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}')\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}') - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}')\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}')\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}').$$

31. Wir führen den Beweis für den Vektor und den Tensor zweiter Stufe.

a) Da die Komponenten des Vektors nach Voraussetzung in allen Bezugssystemen gleich sein sollen, gilt bei einer beliebigen Drehung $A'_i = A_i$, d. h.

$$A'_x = A_x, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z. \tag{1}$$

Wir drehen das Koordinatensystem um den Winkel π um die z-Achse. Die Transformationsgleichungen $A'_i = \alpha_{ik} A_k$ für die Vektorkomponenten bei Drehungen ergeben

$$A'_x = -A_x, \quad A'_y = -A_y, \quad A'_z = A_z. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) sind nur dann miteinander verträglich, wenn $A_x = A_y = 0$ ist. Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel π um die x-Achse, so sieht man analog, daß $A_z = 0$ gelten muß. Der einzige Vektor, dessen Komponenten nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängen, ist also der Nullvektor, was zu beweisen war.

b) Man kann jeden beliebigen Tensor zweiter Stufe als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors schreiben: $T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$. Der antisymmetrische Tensor ist einem Pseudovektor äquivalent (s. Aufgabe 25), und seine Komponenten hängen auf Grund der oben gezeigten Eigenschaft eines Vektors nur dann nicht vom Bezugssystem ab, wenn sie gleich Null sind. Deshalb betrachten wir nur den symmetrischen Tensor S_{ik}.

Wir wählen ein Koordinatensystem, in dem S_{ik} Diagonalform hat: $\lambda^{(i)}\,\delta_{ik}$. Sind die Größen $\lambda^{(i)}$ voneinander verschieden, so hängen die Komponenten des Tensors von der Wahl der Achsen ab, d.h. davon, mit welcher Zahl (1, 2 oder 3) die betrachtete Achse bezeichnet wird. Nur für $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda$ hängen die Tensorkomponenten nicht von der Wahl der Achsen ab. Dann hat der Tensor aber die Form $\lambda\,\delta_{ik}$, was zu beweisen war.

32. Die gesuchten Mittelwerte sind

$$\overline{n_i} = \frac{1}{4\pi}\int n_i \,\mathrm{d}\Omega, \quad \overline{n_i\,n_k} = \frac{1}{4\pi}\int n_i\,n_k\,\mathrm{d}\Omega, \ldots \tag{1}$$

Statt der direkten Berechnung dieser Integrale benutzt man jedoch besser eine andere Methode, die auf einer Anwendung der Transformationseigenschaften der betrachteten Größen beruht. Offenbar sind die Größen $\overline{n_i}$, $\overline{n_i\,n_k}$ usw. Tensoren erster, zweiter, dritter und vierter Stufe. Andererseits folgt aus ihrer Definition (1), daß sie in jedem beliebigen Bezugssystem gleich sein müssen. Daher werden sie durch solche Tensoren ausgedrückt, deren Komponenten nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängen.

Unter diesem Gesichtspunkt betrachten wir $\overline{n_i}$. Da es außer dem Nullvektor keinen Vektor gibt, dessen Komponenten vom Bezugssystem unabhängig sind (s. Aufgabe 31), folgt $\overline{n_i} = 0$.

Der Tensor $\overline{n_i\,n_k}$ muß durch einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe ausgedrückt werden, dessen Komponenten in allen Bezugssystemen gleich sind. Nur δ_{ik} ist ein solcher Tensor. Daher können wir schreiben:

$$\overline{n_i\,n_k} = \lambda\,\delta_{ik}. \tag{2}$$

Zur Bestimmung von λ verjüngen[1]) wir den Tensor bezüglich der beiden Indizes:

$$\overline{n_i n_i} = \overline{\mathfrak{n}^2} = 1 = 3\lambda, \qquad \lambda = \frac{1}{3}.$$

Analog finden wir

$$\overline{n_i n_k n_l} = 0,$$

$$\overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}). \tag{3}$$

33.

$$\frac{1}{3} a^2, \quad \frac{1}{3} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad \frac{1}{3} \mathfrak{a}, \quad \frac{2}{3} a^2, \quad \frac{2}{3} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b};$$

$$\frac{1}{15} [(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})].$$

34.

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}', \quad [\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'] \cdot 1.$$

35.

$$\mathfrak{n} \cdot 1, \quad \mathfrak{n}' \cdot 1, \quad \mathfrak{n}_1[\mathfrak{n}_2 \times \mathfrak{n}_3].$$

1.2. Vektoranalysis

36.

$$\nabla_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\alpha} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm \frac{i}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right),$$

$$\nabla_0 = \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

37.

$$\operatorname{div} \mathfrak{r} = 3, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{r} = 0, \quad \operatorname{grad}(\mathfrak{l}\,\mathfrak{r}) = \mathfrak{l}, \quad (\mathfrak{l}\,\vec{\nabla})\,\mathfrak{r} = \mathfrak{l}.$$

38.

$$\operatorname{rot}[\vec{\omega} \times \mathfrak{r}] = 2\vec{\omega}.$$

41.

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\mathfrak{r}}{r} \varphi',^{2)} \quad \operatorname{div} \varphi(r)\,\mathfrak{r} = 3\varphi + r\,\varphi',$$

$$\operatorname{rot} \varphi(r)\,\mathfrak{r} = 0, \quad (\mathfrak{l}\,\vec{\nabla})\,\varphi(r)\,\mathfrak{r} = \mathfrak{l}\,\varphi + \frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{l}\,\mathfrak{r})}{r} \varphi'.$$

---

[1]) Unter der Operation der Verjüngung eines Tensors versteht man die Gleichsetzung zweier Indizes und Summation über diese Indizes. Man erhält einen Tensor von um eine Einheit geringerer Stufe.

[2]) Hier und im weiteren Text dieses Abschnitts bezeichnet der Strich die Ableitung nach r.

42.

$$\varphi(r) = \frac{\text{const}}{r^3}.$$

43.

$$\operatorname{div}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \qquad \operatorname{rot}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b};$$

$$\operatorname{div}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{r} = 4(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}), \qquad \operatorname{rot}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{r};$$

$$\operatorname{div}[\mathfrak{a}\times\mathfrak{r}] = 0, \qquad \operatorname{rot}[\mathfrak{a}\times\mathfrak{r}] = 2\mathfrak{a};$$

$$\operatorname{div}\varphi(r)\,[\mathfrak{a}\times\mathfrak{r}] = 0, \qquad \operatorname{rot}\varphi(r)\,[\mathfrak{a}\times\mathfrak{r}] = (2\varphi + r\,\varphi')\,\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})}{r}\varphi';$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{r}\times[\mathfrak{a}\times\mathfrak{r}] = -2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}), \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{r}\times[\mathfrak{a}\times\mathfrak{r}] = 3[\mathfrak{r}\times\mathfrak{a}].$$

44.

$$\operatorname{grad}\mathfrak{A}(r)\,\mathfrak{r} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{r}}{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{A}'), \qquad \operatorname{grad}\mathfrak{A}(r)\,\mathfrak{B}(r) = \frac{\mathfrak{r}}{r}(\mathfrak{A}'\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}'),$$

$$\operatorname{div}\varphi(r)\,\mathfrak{A}(r) = \frac{\varphi'}{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{A}) + \frac{\varphi}{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{A}'),$$

$$\operatorname{rot}\varphi(r)\,\mathfrak{A}(r) = \frac{\varphi'}{r}[\mathfrak{r}\times\mathfrak{A}] + \frac{\varphi}{r}[\mathfrak{r}\times\mathfrak{A}'], \qquad (\mathfrak{l}\,\vec{\nabla})\,\varphi(r)\,\mathfrak{A}(r) = \frac{\mathfrak{l}\,\mathfrak{r}}{r}(\varphi'\,\mathfrak{A} + \varphi\mathfrak{A}').$$

45. $-\operatorname{grad}(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}/r^3) = \operatorname{rot}(\mathfrak{p}\times\mathfrak{r}/r^3)$; die Komponenten dieses Vektors in Richtung der Basisvektoren $\mathfrak{e}_r$, $\mathfrak{e}_\vartheta$, $\mathfrak{e}_\alpha$ sind

$$\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}, \quad \frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \quad 0.$$

Die Vektorlinien entstehen durch Schnitt zweier Flächenscharen: $\alpha = C_1$, $r = C_2\sin\vartheta$.

47.

$$(\Delta\mathfrak{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha},$$

$$(\Delta\mathfrak{A})_\vartheta = \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha},$$

$$(\Delta\mathfrak{A})_\alpha = \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} + \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}.$$

48.

$$(\Delta\mathfrak{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha},$$

$$(\Delta\mathfrak{A})_\alpha = \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha},$$

$$(\Delta\mathfrak{A})_z = \Delta A_z.$$

49.

$$\int(\operatorname{grad}\varphi\,\operatorname{rot}\mathfrak{A})\,\mathrm{d}V = \oint(\mathfrak{A}\times\operatorname{grad}\varphi)\,\mathrm{d}\mathfrak{S} = \int\varphi\,\operatorname{rot}\mathfrak{A}\,\mathrm{d}\mathfrak{S}.$$

50. Es ist hier ebenso wie in einer Reihe weiterer Fälle günstig, das Skalarprodukt des Integrals mit einem beliebigen konstanten Vektor $\mathfrak{c}$ zu betrachten:

$$\mathfrak{c} \oint \mathfrak{r}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n})\,dS = \oint (\mathfrak{c}\,\mathfrak{r})\,a_n\,dS = \int \operatorname{div}[(\mathfrak{c}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{a}]\,dV = \\ = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) \int dV = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,V.$$

Da $\mathfrak{c}$ ein beliebiger Vektor ist, folgt $\int \mathfrak{r}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n})\,dS = \mathfrak{a}\,V$. Analog findet man $\oint (\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{n}\,dS = \mathfrak{a}\,V$.

51.

$$\oint \mathfrak{n}\,\varphi\,dS = \int \operatorname{grad}\varphi\,dV, \qquad \oint \mathfrak{n} \times \mathfrak{a}\,dS = \int \operatorname{rot}\mathfrak{a}\,dV,$$

$$\oint (\mathfrak{n}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}\,dS = \int (\mathfrak{b}\,\vec{V})\,\mathfrak{a}\,dV.$$

55. Die bei der Lösung der Aufgabe 50 angewandte Methode liefert

$$\oint \varphi\,d\mathfrak{l} = \int [\mathfrak{n} \times \operatorname{grad}\varphi]\,dS,$$

wobei $\mathfrak{n}$ der zur Fläche normal gerichtete Einheitsvektor ist.

56.

$$\int [\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} f]\,\mathfrak{n}\,dS.$$

61.

$$\text{a) } A + \frac{B}{r}, \qquad \text{b) } A + B \ln\tan\frac{\vartheta}{2}, \qquad \text{c) } A + B\alpha.$$

62.

$$\text{a) } A + B\ln r, \qquad \text{b) } A + B\alpha, \qquad \text{c) } A + Bz.$$

64.

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}\right]^{1/2}, \\ y &= \pm\left[\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}\right]^{1/2}, \\ z &= \pm\left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}\right]^{1/2}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2R_\xi}, \qquad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}}{2R_\eta}, \qquad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2R_\zeta},$$

$$\Delta = \frac{4}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(\eta - \zeta)}\left[(\eta - \zeta)\,R_\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \right. \\ \left. + (\zeta - \xi)\,R_\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) + (\xi - \eta)\,R_\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right],$$

wobei $R_u = \sqrt{(u + a^2)(u + b^2)(u + c^2)}$ ist.

Aus den Gleichungen (1) geht hervor, daß jedem Tripel ξ, η, ζ acht Tripel x, y, z entsprechen.

Man kann sich von der Orthogonalität der elliptischen Koordinaten überzeugen, indem man $\operatorname{grad}\xi, \operatorname{grad}\eta, \operatorname{grad}\zeta$ berechnet und die Skalarprodukte $\operatorname{grad}\xi \operatorname{grad}\eta, \ldots$ bildet, die sämtlich Null sind. $\operatorname{grad}\xi, \operatorname{grad}\eta, \operatorname{grad}\zeta$ kann man unmittelbar aus den Bestimmungsgleichungen für ξ, η, ζ berechnen, indem man auf beiden Seiten dieser Gleichungen den Gradienten bildet und (1) benutzt.

65.
$$z = \pm\left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2}\right]^{1/2}, \quad r = \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2}\right]^{1/2};$$

$$h_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\xi - \eta}}{R_\xi}, \quad h_2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\xi - \eta}}{R_\eta}, \quad h_3 = r$$

mit
$$R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + c^2)}, \quad R_\eta = \sqrt{(\eta + a^2)(-\eta - c^2)};$$

$$\Delta = \frac{4}{\xi - \eta}\left[R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

66.
$$x = \pm\left[\frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2}\right]^{1/2}, \quad r = \left[\frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2}\right]^{1/2};$$

$$h_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\xi - \zeta}}{R_\xi}, \quad h_2 = r, \quad h_3 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\xi - \zeta}}{R_\zeta}$$

mit
$$R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)}, \quad R_\zeta = \sqrt{(\zeta + a^2)(-\zeta - b^2)};$$

$$\Delta = \frac{4}{\xi - \zeta}\left[R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

67.
$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh\xi - \cos\eta}, \quad h_\alpha = \frac{a\sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta};$$

$$\Delta = \frac{(\cosh\xi - \cos\eta)^3}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\cosh\xi - \cos\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\sin^2\eta(\cosh\xi - \cos\eta)}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right].$$

68. Die Flächen $\varrho = \text{const}$ sind Toroide:
$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\coth\varrho\right)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\sinh\varrho}\right)^2,$$
und die Flächen $\xi = \text{const}$ Kugelsegmente:
$$(z - \operatorname{arc}\tan\xi)^2 + x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sin\xi}\right)^2;$$
$$h_\varrho = h_\xi = \frac{a}{\cosh\varrho - \cos\xi}, \quad h_\alpha = \frac{a\sinh\varrho}{\cosh\varrho - \cos\xi}.$$

69.

$$\varphi_1 = -2\pi \varrho z^2, \qquad \mathfrak{E}_1 = -4\pi \varrho z \mathrm{e}_z \qquad \left(|z| < \frac{a}{2}\right),$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\pi \varrho a (4|z| - a), \qquad \mathfrak{E}_2 = -2\pi \varrho a \frac{z}{|z|} \mathrm{e}_z \qquad \left(|z| > \frac{a}{2}\right).$$

Die z-Achse hat die Richtung der Normalen zur Plattenoberfläche.

70.

$$\varphi(x, y, z) = \frac{4\pi \varrho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z .$$

71. Für $z > 0$ gilt

$$\varphi = \frac{2\pi \sigma_0}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda z} \sin \alpha x \sin \beta y$$

und für $z < 0$

$$\varphi = \frac{2\pi \sigma_0}{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda z} \sin \alpha x \sin \beta y$$

mit $\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Die exponentielle Abnahme des Potentials in Richtung der z-Achse wird dadurch erklärt, daß die Ebene entgegengesetzt geladene Bereiche enthält.

72. Bei räumlicher Ladungsverteilung gilt

$$\varphi_1 = \int\limits_r^R \frac{2\varkappa r}{R^2} \mathrm{d}r = \varkappa\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \qquad E_1 = \frac{2\varkappa r}{R^2} \qquad (r \leqq R);$$

$$\varphi_2 = \int\limits_r^R \frac{2\varkappa}{r} \mathrm{d}r = -2\varkappa \ln \frac{r}{R}, \qquad E_2 = \frac{2\varkappa}{r} \qquad (r \geqq R).$$

Die einfachste Lösungsmethode geht vom Gaussschen Satz der Elektrostatik aus. Bei der Lösung durch Integration der Poissonschen Gleichung benutzt man den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten und die Tatsache, daß φ wegen der Symmetrie des Systems nur von r abhängt.

Bei Verteilung der Ladung auf der Oberfläche des Zylinders gilt

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = -2\varkappa \ln \frac{r}{R}.$$

73. Man erhält

$$\varphi = -2\varkappa \ln r, \qquad E = \frac{2\varkappa}{r},$$

wobei $\varkappa$ die Ladung je Längeneinheit bedeutet. Die willkürlich wählbare Konstante im Potential wurde so bestimmt, daß $\varphi = 0$ für $r = 1$ ist.

74.

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{2a} \ln \left| \frac{z - a + \sqrt{(z-a)^2 + x^2 + y^2}}{z + a + \sqrt{(z+a)^2 + x^2 + y^2}} \right| .$$

75. Führen wir die Bezeichnungen

$$z_1 = z + a, \quad z_2 = z - a, \quad r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{1,2}^2}\,, \quad C = \frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2}$$

ein, so erhalten wir aus dem Ergebnis der vorigen Aufgabe

$$r_1 + r_2 = 2a \frac{C+1}{C-1} = \text{const} \tag{1}$$

(man muß $z_1 - z_2 = 2a$ berücksichtigen).

Die Äquipotentialflächen sind also Rotationsellipsoide, deren Brennpunkte in den Drahtenden liegen.

76.

$$\varphi_1(r) = \frac{q}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right), \quad \mathfrak{E}_1 = \frac{q\,\mathfrak{r}}{R^3} \qquad (r \leqq R);$$

$$\varphi_2(r) = \frac{q}{r}, \qquad \mathfrak{E}_2 = \frac{q\,\mathfrak{r}}{r^3} \qquad (r \geqq R).$$

77.

$$\varphi_1(r) = \frac{q}{R}, \quad \mathfrak{E}_1 = 0 \qquad (r < R);$$

$$\varphi_2(r) = \frac{q}{r}, \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{q\,\mathfrak{r}}{r^3} \qquad (r > R).$$

78. Das elektrische Feld im Hohlraum ist homogen:

$$\mathfrak{E} = \frac{4}{3}\pi\varrho\,\mathfrak{r} - \frac{4}{3}\pi\varrho(\mathfrak{r} - \mathfrak{a}) = \frac{4}{3}\pi\varrho\,\mathfrak{a}.$$

79. Es ergibt sich

$$q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1);$$

$$E_1 = 0, \qquad \varphi_1 = \frac{q}{R_2 - R_1}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad \text{für} \quad r \leqq R_1;$$

$$E_2 = \frac{q(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r^2}, \qquad \varphi_2 = \frac{q}{R_2 - R_1}\left(1 - \ln\frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r}\right) \quad \text{für} \quad R_1 \leqq r \leqq R_2;$$

$$E_3 = \frac{q}{r^2}, \qquad \varphi_3 = \frac{q}{r} \qquad \text{für} \quad r \geqq R_2.$$

Für $R_2 \to R_1 \equiv R$ erhalten wir bei festem q das Feld einer Kugel mit gleichförmig geladener Oberfläche.

80. Man erhält

$$W = \frac{3q^2}{5R}, \quad W = \frac{q^2}{2R}, \quad W = \frac{q^2}{R_2 - R_1} - \frac{q^2 R_1}{(R_2 - R_1)^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

für die in den Aufgaben 76, 77 und 79 angegebenen Ladungsverteilungen.

Vergleicht man die Beiträge zur Energie W, die durch die Integrale $\int\limits_0^R$ und $\int\limits_R^\infty$ zustande kommen, so sieht man, daß der größere Teil der Feldenergie außerhalb der Ladungsverteilung lokalisiert ist (83% im Falle einer Kugel mit räumlicher Ladungsverteilung).

81.

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^r \varrho(r')\, r'^2\, \mathrm{d}r' + 4\pi \int\limits_r^\infty \varrho(r') r'\, \mathrm{d}r';$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}) = \frac{4\pi\, \mathfrak{r}}{r^3} \int\limits_0^r \varrho(r')\, r'^2\, \mathrm{d}r'.$$

83. Das Feld der Elektronenwolke im Atom ist

$$\varphi_e(r) = -\frac{e_0}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-2r/a}\right) + \frac{e_0}{a}\, \mathrm{e}^{-2r/a},$$

$$E_e = -\frac{e_0}{r^2}\left[1 - \left(\frac{2r}{a} + 1\right)\mathrm{e}^{-2r/a}\right] + \frac{2e_0}{a^2}\, \mathrm{e}^{-2r/a}.$$

Das Potential des elektrischen Gesamtfeldes im Atom ist

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_0}{r}.$$

84. Die elektrische Feldstärke ist auf der Kernoberfläche maximal:

$$E_{\max} = \frac{Z e_0}{R^2} = 6{,}4 \cdot 10^{18} \frac{Z}{A^{2/3}}\, [\mathrm{V/cm}].$$

85. Man muß benutzen, daß die Flächenladungsdichte in der Form

$$\varrho(r, \vartheta, \alpha) = \sigma(\vartheta, \alpha)\, \delta(r - a)$$

geschrieben werden kann.

86.

$$q_{1,2} = \frac{R\sqrt{R^2 + a^2}}{q\, a^2}\left(\sqrt{R^2 + a^2}\, A_{1,2} - R A_{2,1}\right).$$

87. Man erhält

$$\varphi = \frac{2q}{R^2}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right);$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2q}{R^2}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right),$$

wobei z die von der Scheibenebene aus gerechnete Koordinate des Aufpunktes ist.

88. Nimmt der positiv geladene Halbring das Gebiet $x > 0$ in der $x\,y$-Ebene ein, so erhält man für $x, y \ll (R^2 + z^2)/R$ durch Reihenentwicklung des Integranden im Integral $\int (\varkappa/r_{12})\,\mathrm{d}l$

$$\varphi = \frac{4qRx}{\pi(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

woraus folgt:

$$E_x = -\frac{4qR}{\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{12qRxz}{\pi(R^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Für $z \gg R$ erhält man das Feld eines elektrischen Dipols, dessen Moment die Richtung der x-Achse und den Betrag $4qR/\pi$ hat.

89. Wegen der Symmetrie des Systems hängt das Potential φ nicht vom Azimutwinkel α ab, so daß man die $x\,z$-Ebene ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch den Aufpunkt legen kann. Dann gilt (Abb. 30)

$$r_{12} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\vartheta\cos\alpha'}$$

und

$$\varphi(r, \vartheta) = 2\varkappa R \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\vartheta\cos\alpha'}}$$

mit $\varkappa = q/2\pi R$.

Mit Hilfe der Substitution $\alpha' = \pi - 2\beta$ und der Bezeichnung

$$k^2 = \frac{4rR\sin\vartheta}{r^2 + R^2 + 2rR\sin\vartheta}$$

erhält man

Abb. 30

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{4\varkappa R}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\sin\vartheta}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}} = \frac{2k\varkappa}{\sqrt{rR\sin\vartheta}} K(k).$$

90.

a) Es ergibt sich

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

wobei z der Abstand zwischen Ringebene und Aufpunkt ist.

b) Bezeichnet man mit r' den Abstand zwischen Kreisring und Aufpunkt, so erhält man für $r' \ll R$

$$1 - k^2 \approx \frac{r'^2}{4R^2}, \quad K(k) = \ln\frac{8R}{r'}, \quad \varphi(r') = -2\varkappa\ln r' + \text{const},$$

wie es bei einer linearen Ladung auch der Fall sein muß.

91. Es ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 r \cos\vartheta \qquad (r \leqq R),$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}\frac{\sigma_0 R^3}{r^2}\cos\vartheta \quad (r \geqq R).$$

Man hat also innerhalb der Kugel ein homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke $E_{1z} = -4\pi\sigma_0/3$ und außerhalb der Kugel ein Dipolfeld mit dem Moment $4\pi\sigma_0 R^3/3$.

92. Wegen der Axialsymmetrie des Feldes lautet die LAPLACEsche Gleichung, in Zylinderkoordinaten geschrieben (wobei die Polarachse die Richtung der Symmetrieachse des Systems hat),

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Wir setzen ihre Lösung in Form einer Potenzreihe in r an:

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\, r^n, \qquad a_0(z) = \varphi(0, z) \equiv \Phi(z). \tag{2}$$

Dabei bedeutet $\Phi(z)$ das Potential auf der Symmetrieachse des Systems.

Setzt man (2) in (1) ein, ordnet die Terme um und setzt die Koeffizienten der gefundenen Reihe Null, so erhält man Rekursionsformeln für die Koeffizienten $a_n(z)$, woraus

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\Phi^{(2n)}(z)\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi''(z) + \dots,$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r}{2}\Phi''(z) + \dots, \qquad E_\alpha = 0, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\Phi'(z) + \dots$$

folgt.

93. Man muß die Multipolmomente

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int \varkappa R^l\, Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) R\, d\alpha,$$

$$Q'_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int \frac{\varkappa}{R^{l+1}}\, Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) R\, d\alpha$$

berechnen. Benutzt man die im Anhang II angegebenen Formeln (A II.1) und (A II.5), so erhält man

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\vartheta) \quad \text{für} \quad r > R,$$

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\vartheta) \quad \text{für} \quad r < R.$$

Beide Formeln gelten auch für $r = R$ $(\vartheta \neq \pi/2)$.

94.

$$\text{a)}\quad \varphi \approx q\, a^2 \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = 2q\, a^2 \frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3};$$

$$\text{b)}\quad \varphi \approx \frac{3q\, a^2 \sin^2\vartheta \cos\alpha \sin\alpha}{r^3}.$$

95.

$$\text{a)}\quad \varphi \approx \frac{6q\, a^3 P_3(\cos\vartheta)}{r^4} = q\, a^3 \frac{15\cos^3\vartheta - 9\cos\vartheta}{r^4};$$

$$\text{b)}\quad \varphi \approx \frac{15q\, a\, b\, c\, x\, y\, z}{r^7} = \frac{15q\, a\, b\, c \sin^2\vartheta \cos\vartheta \sin\alpha \cos\alpha}{r^4}.$$

96.

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0, \alpha_0)\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad \text{für} \quad r < r_0;$$

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0, \alpha_0)\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad \text{für} \quad r > r_0.$$

97. Man erhält

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3x^2 - r^2) + b^2(3y^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10 r^5}.$$

Im Falle eines Rotationsellipsoids ($a = b$) gilt

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{r} + q \frac{c^2 - a^2}{5} \frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}.$$

Im Falle einer Kugel ($a = b = c$) wird einfach

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

98. In Kugelkoordinaten mit der Polarachse in Richtung der Symmetrieachse des Systems und dem Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Ringes ergibt sich

$$\varphi(r, \vartheta) = -\frac{q(a^2 - b^2)}{2} \frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}.$$

Das ist das Potential eines linearen Quadrupols, dessen Ladungen $-q$ sich im Abstand $\sqrt{a^2 - b^2}/2$ von der zentralen Ladung $2q$ befinden.

99. Wir berechnen die Multipolmomente:

$$q = -\int (\mathfrak{p}' \vec{V})\, \delta(\mathfrak{r})\, \mathrm{d}V = -\oint (\mathfrak{p}' \mathfrak{n})\, \delta(\mathfrak{r})\, \mathrm{d}S = 0.$$

Da außer bei $\mathfrak{r} = 0$ überall $\delta(\mathfrak{r}) = 0$ ist, ergibt sich daraus

$$p_\alpha = -\int x_\alpha (\mathfrak{p}' \vec{V})\, \delta(\mathfrak{r})\, \mathrm{d}V = -\int x_\alpha p_n' \frac{\partial \delta(\mathfrak{r})}{\partial x_n} \mathrm{d}V = \int p_n' \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} \delta(\mathfrak{r})\, \mathrm{d}V.$$

Die letzte Umformung besteht in einer partiellen Integration. Über den doppelt vorkommenden Index n ist zu summieren. Das dabei auftretende Oberflächenintegral verschwindet wegen $\delta(\mathfrak{r}) = 0$ für $\mathfrak{r} \neq 0$. Nach der Definition der δ-Funktion ist

$$p_\alpha = p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} = p'_n \delta_{\alpha n} = p'_\alpha .$$

Alle Multipolmomente höherer Ordnung sind den Komponenten von $\mathfrak{r}$ bei $\mathfrak{r} = 0$ proportional und deshalb gleich Null. Wir betrachten z.B. die Komponenten des Quadrupolmomentes. In der Tat gilt

$$Q_{\alpha\beta} = -\int x_\alpha x_\beta p'_n \frac{\partial \delta(\mathfrak{r})}{\partial x_n} \mathrm{d}V = \int \delta(\mathfrak{r}) p'_n \frac{\partial x_\alpha x_\beta}{\partial x_n} \mathrm{d}V = p'_\alpha x_\beta + p'_\beta x_\alpha \Big|_{r=0} = 0 .$$

100. Durch n-fache partielle Integration ergibt sich

$$\varphi(\mathfrak{r}) = (-1)^n q \int \delta(\mathfrak{r}') \prod_i (\mathfrak{a}_i \vec{V}') \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \mathrm{d}V' = q \prod_i (\mathfrak{a}_i \vec{V}) \frac{1}{r} .$$

101. Am einfachsten ist es, in der Formel

$$\varphi = \frac{q a^2 (3 z'^2 - r^2)}{r^5}$$

(s. die Lösung der Aufgabe 94) z' durch x, y, z auszudrücken (Abb. 31). Man erhält

$$\varphi = \frac{q a^2}{r^5} [3 (x \sin\gamma \cos\beta + y \sin\gamma \sin\beta + z \cos\gamma)^2 - r^2] .$$

Geht man davon aus, daß die Komponenten des Quadrupolmomentes einen Tensor zweiter Stufe bilden, so erhält man dasselbe Ergebnis. Im $x' y' z'$-System sind die Komponenten des Quadrupolmomentes

$$Q'_{xx} = Q'_{yy} = Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0 ,$$
$$Q'_{zz} = 2 q a^2 .$$

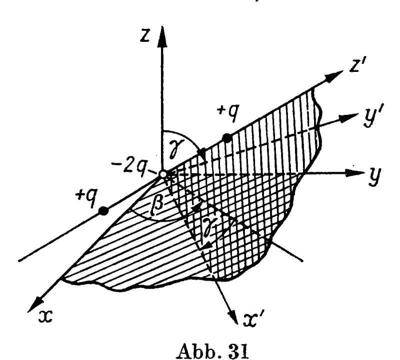


Abb. 31

Die Matrix der Transformationskoeffizienten lautet

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\gamma \cos\beta & -\sin\beta & \sin\gamma \cos\beta \\ \cos\gamma \sin\beta & \cos\beta & \sin\gamma \sin\beta \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix} .$$

Mit Hilfe dieser Matrix berechnen wir die Komponenten $Q_{\alpha\beta}$ im $x\,y\,z$-System nach den Gleichungen

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \alpha_{\alpha\gamma} \alpha_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta}$$

und benutzen dann die Beziehung (2.8).

102.

$$\varphi = \frac{15 q\, a\, b\, c\, z}{2 r^7} \left[(y^2 - x^2) \sin 2\beta + 2 x\, y \cos 2\beta \right].$$

103.

$$\varphi = \frac{q\, a^2}{4 r^3} (3 \sin^2 \vartheta \sin 2\alpha - 3 \cos 2\vartheta - 1).$$

104. Auf Grund des Superpositionsprinzips kann man schreiben

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \int\limits_V \frac{\mathfrak{P}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|^3} \, dV' = \int \mathfrak{P} \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \, dV'.$$

Formt man dies mit Hilfe des GAUSSschen Satzes um, so erhält man

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \int\limits_S \frac{P_n}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \, dS,$$

wobei S die innere Oberfläche der polarisierten Kugel bedeutet und $P_n = P \cos \vartheta$ ist. Benutzt man die Ergebnisse der Aufgabe 91, so folgt

$$\varphi_1 = \frac{4\pi P\, r}{3} \cos \vartheta \qquad (r \leqq R),$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi P R^3}{3 r^2} \cos \vartheta \qquad (r \geqq R).$$

105. Man erhält

$$\varphi(\mathfrak{r}) = -2\varkappa \ln r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha}{n\, r^n},$$

wobei

$$\varkappa = \int \varrho(\mathfrak{r}') \, dS'$$

die Gesamtladung der Längeneinheit der Verteilung bedeutet und

$$A_n = \int \varrho(\mathfrak{r}')\, r'^n \cos n\alpha' \, dS', \qquad B_n = \int \varrho(\mathfrak{r}')\, r'^n \sin n\alpha' \, dS'$$

die zweidimensionalen Multipolmomente n-ter Ordnung sind.

Hieraus folgt insbesondere, daß das Potential eines Dipols im zweidimensionalen Fall die Form $\varphi = 2\mathfrak{p}\, \mathfrak{r}/r^2$ hat, wobei $\mathfrak{p} = \int \varrho(\mathfrak{r}')\, \mathfrak{r}' \, dS'$ das Dipolmoment der Verteilung je Längeneinheit und $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor in der $x\,y$-Ebene bedeuten.

106.

$$\varphi(r, \alpha) = -2\varkappa \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \cos n(\alpha - \alpha_0) \quad \text{für} \quad r > r_0,$$

$$\varphi(r, \alpha) = -2\varkappa \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos n(\alpha - \alpha_0) \quad \text{für} \quad r < r_0.$$

107. Es ergibt sich

$$\varphi(\mathfrak{r}) \approx \frac{2\varkappa a}{r}\cos\alpha = \frac{2\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}}{r^2},$$

wobei $\mathfrak{p}$ das Dipolmoment je Längeneinheit und $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor in der $x\,y$-Ebene ($r \gg a$) bedeuten; die z-Achse hat die Richtung der beiden linearen Ladungen.

108. Auf der Symmetrieachse der Scheibe gilt

$$\varphi(z) = \tau\Omega = 2\pi\tau\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|};$$

$$E_x = E_y = 0, \qquad E_z = \frac{2\pi a^2\tau z}{|z|(a^2+z^2)^{3/2}}$$

(die z-Achse ist von der negativen Seite der Scheibe zur positiven gerichtet).

109. In Zylinderkoordinaten ergibt sich

a) $E_\alpha = \frac{2\tau}{r}, \qquad E_r = E_z = 0;$

b) $\varphi = 2\tau(\pi - \alpha), \qquad E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{2\tau}{r}; \qquad E_r = E_z = 0.$

Das Feld $\mathfrak{E}$ stimmt mit dem Magnetfeld des geradlinigen Stromes $I = \tau c$ überein.

110. Die Gleichung der Kraftlinien lautet

$$(z+a)\left[(z+a)^2+r^2\right]^{-1/2} \pm (z-a)\left[(z-a)^2+r^2\right]^{-1/2} = C,$$

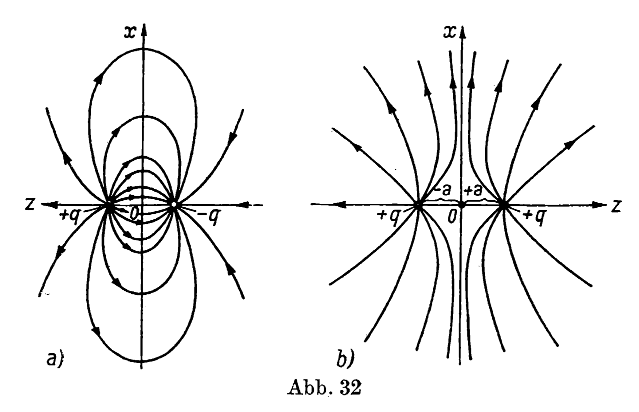


Abb. 32

wobei C eine Konstante ist. Abb. 32a zeigt den Verlauf der Kraftlinien für den Fall ungleichnamiger Ladungen. Im Falle gleichnamiger Ladungen gibt es im Feld den Gleichgewichtspunkt $r = 0$, $z = 0$ (Abb. 32b).

111. Es ist zweckmäßig, Kugelkoordinaten zu benutzen. Wenn man a gegen Null gehen läßt, in eine Reihe entwickelt und Terme der Ordnung a^2 und höherer Ordnungen vernachlässigt, so erhält man $r = C \sin^2\vartheta$.

112. Man erhält

$$r = C\sqrt{\sin^2\vartheta\,|\cos\vartheta|}\,, \qquad C = \text{const}.$$

Es sei daran erinnert, daß diese Beziehung im Falle eines Quadrupols endlicher Abmessungen nur für große Abstände gilt (Abb. 33).

114.

$$q_2 = \frac{\Phi + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi q}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi}.$$

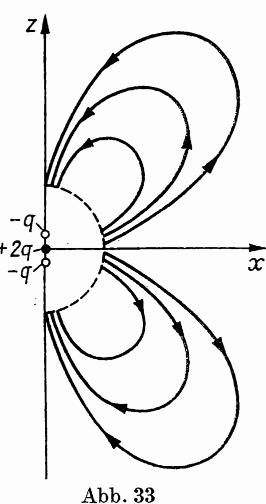


Abb. 33

115. Wir betrachten die Kraftröhre, die sich durch Rotation einer Kraftlinie um die z-Achse ergibt. Wendet man den Gaussschen Satz der Elektrostatik auf das Volumen an, das durch die Mantelfläche der Röhre und zwei Ebenen $z = \text{const}$ gebildet wird und keine Ladungen enthält, so findet man, daß der Fluß durch einen beliebigen, zur Achse senkrechten Querschnitt der Röhre,

$$\Phi(z) = \sum_i q_i \Omega_i(z)$$

(s. Aufgabe 113), nicht von z abhängt (bei einer Änderung von z zwischen z_k und z_{k+1}). Dabei ist $\Omega_i(z) = 2\pi(\pm 1 - \cos\alpha_i)$ der Raumwinkel, unter dem die negative Seite dieses Querschnitts vom Punkt z_i aus, in dem sich die Ladung q_i befindet, gesehen wird; α_i ist der Winkel zwischen der z-Achse und dem Radiusvektor des Punktes auf der Berandung des normalen Querschnitts mit den Koordinaten (r, z). Für $z > z_i$ ist das positive, für $z < z_i$ das negative Vorzeichen zu nehmen. Geht der normale Querschnitt bei einer Änderung von z durch die Ladung q_k hindurch, so erfährt $\Phi(z)$ den Sprung $\pm 4\pi q_k$, während sich $\sum q_i \cos\alpha_i$ nicht ändert. Drückt man $\cos\alpha_i$ durch z, z_i und r aus, so erhält man die gesuchte Gleichung der Kraftlinienschar:

$$\sum_i \frac{q_i(z-z_i)}{\sqrt{r^2+(z-z_i)^2}} = C, \qquad C = \text{const}.$$

117. Wir wählen ein Zylinderkoordinatensystem, dessen z-Achse in der Zylinderachse liegt (Abb. 34), und benutzen an Stelle der Bedingung $\varphi|_S = \text{const}$ auf der Zylinderoberfläche S die daraus folgende Bedingung $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_S = 0$. Durch Differentiation folgt

$$\frac{\varkappa_1 x_1}{R^2 + x_1^2 - 2R\,x_1\cos\alpha} = \frac{\varkappa_2 x_2}{R^2 + x_2^2 - 2R\,x_2\cos\alpha}.$$

Die Nenner lassen sich fortschaffen. Vergleicht man die Terme mit bzw. ohne $\cos\alpha$ nach dieser Umformung, so sieht man, daß bei $\varkappa_1 = \varkappa_2$ jede zylindrische Fläche, deren Achse den geladenen Drähten parallel ist und mit ihnen in einer Ebene liegt und deren Radius der Bedingung $R^2 = \varkappa_1 \varkappa_2$ genügt, eine Äquipotentialfläche ist. Für $x_1 = 0$ existiert die Lösung $\varkappa_2 = 0$. Dieser Fall entspricht zylindrischen Äquipotentialflächen im Felde eines einzigen Drahtes.

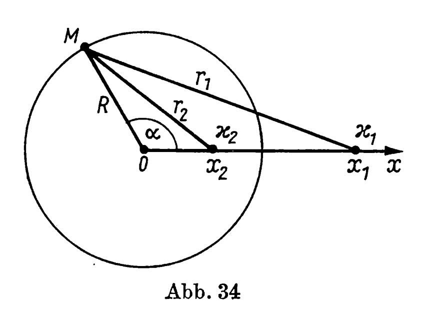


Abb. 34

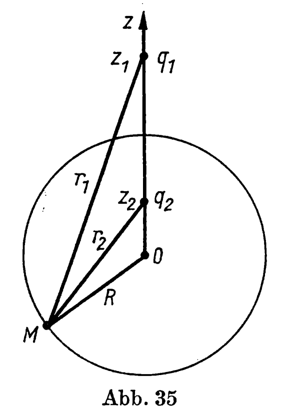


Abb. 35

118. Mit den Bezeichnungen von Abb. 35 werden der Radius R der gesuchten Kugel und die Lage ihres Mittelpunktes durch die Gleichungen

$$R^2 = z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}$$

bestimmt. Das Potential auf der Oberfläche dieser Kugel ist Null.

119. Es ergibt sich

$$\Delta\varphi = q\Delta \frac{e^{-\alpha r}}{r} = q\Delta \frac{1}{r} + q\Delta \frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} =$$

$$= -4\pi q\,\delta(\mathfrak{r}) + \frac{q}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r}\right) = -4\pi q\,\delta(\mathfrak{r}) + \frac{q\,\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}.$$

Es gibt also eine Punktladung q im Koordinatenursprung und eine kugelsymmetrisch verteilte räumliche Ladung mit der Dichte

$$\varrho = -\frac{q\,\alpha^2 e^{-\alpha r}}{4\pi r},$$

wobei $\int \varrho\, dV = -q$ ist.

120. Die Punktladung e_0 befindet sich im Koordinatenursprung und ist von einer räumlichen Ladung der Dichte

$$\varrho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

umgeben. Diese Form hat die Ladungsverteilung im Wasserstoffatom (s. Aufgabe 83).

121.

$$U = \int \frac{e_0}{r} \varrho(r)\,\mathrm{d}V = -\frac{e_0^2}{\pi a^3} \int_0^\infty r\,\mathrm{e}^{-2r/a} \cdot 4\pi\,\mathrm{d}r = -\frac{e_0^2}{a}.$$

122.

$$U = \frac{5e_0^2}{4a}.$$

123.

$$U = \frac{q_1 q_2}{a}, \qquad F = \frac{q_1 q_2}{a^2}.$$

124.

$$R = \frac{32\pi\alpha}{E_0^2}.$$

125. Es ist

$$U = \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\varkappa_1 \varkappa_2\,\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_2}{r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi^2 a\, b} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\, b\,\mathrm{d}l_1\,\mathrm{d}l_2}{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}},$$

wobei über alle Elemente $\mathrm{d}l_1$ und $\mathrm{d}l_2$ der beiden Ringe integriert wird und α_1, α_2 die Winkel bedeuten, die die Lage der Elemente bestimmen. Integriert man über $\mathrm{d}\alpha_2$ und setzt $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$, so erhält man

$$U = \frac{q_1 q_2 k}{\pi \sqrt{a\, b}} K(k),$$

wobei $k = 2\sqrt{a\, b}/\sqrt{c^2 + (a+b)^2}$ und

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}}$$

das vollständige elliptische Integral erster Gattung ist.

Bei der Berechnung der Kraft

$$F = -\frac{\partial U}{\partial c} = -\frac{\partial U}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial c}$$

muß man die Relation

$$2k^2 \frac{\mathrm{d}K(k)}{\mathrm{d}(k^2)} = \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k)$$

benutzen (s. [72], Formel 6.123), wobei

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung ist. Schließlich ergibt sich

$$F = \frac{q_1 q_2 c k^3}{4\pi (a b)^{3/2}} \frac{E(k)}{1 - k^2}.$$

126.

$$\mathfrak{F} = -\frac{3 q \mathfrak{r} (\mathfrak{p} \mathfrak{r})}{r^5} + \frac{q \mathfrak{p}}{r^3}, \qquad \mathfrak{N} = \frac{q \mathfrak{p} \times \mathfrak{r}}{r^3}.$$

127. Es ist

$$U = p_1 p_2 \frac{\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi - 2\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2}{r^3},$$

wobei $\vartheta_1 = \sphericalangle (\mathfrak{r}, \mathfrak{p}_1)$, $\vartheta_2 = \sphericalangle (\mathfrak{r}, \mathfrak{p}_2)$ und φ der Winkel zwischen den Ebenen $(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}_1)$ und $(\mathfrak{r}, \mathfrak{p}_2)$ sind, so daß

$$F = 3 p_1 p_2 \frac{\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi - 2\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2}{r^4}$$

wird. Die Kraft ist für $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \varphi = 0$, d.h. bei parallelen Dipolen, maximal.

128.

$$U_1 = \int \varrho(\mathfrak{r}') \varphi_1(\mathfrak{r}') \, \mathrm{d}V' =$$

$$= \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \, a_{lm} \int r'^l Y_{lm}(\vartheta', \alpha') \, \mathrm{d}V' = \sum_{l,m} a_{lm} Q_{lm}^*.$$

3. ELEKTROSTATIK DER LEITER UND DIELEKTRIKA

3.1. Grundbegriffe und Methoden der Elektrostatik

129.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r},$$

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathfrak{r}}{r^3}, \quad \mathfrak{D}_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathfrak{r}}{r^3}.$$

130.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{2\pi}{\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \varepsilon_3 \alpha_3} \frac{q}{r},$$

$$\mathfrak{D}_i = \frac{2\pi \varepsilon_i}{\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \varepsilon_3 \alpha_3} \frac{q\mathfrak{r}}{r^3}.$$

131. Man kann die Grenzbedingungen ($\varphi = \text{const}$ auf der Leiteroberfläche und $\varphi = 0$ für $r \to \infty$) durch ein Potential der Form $\varphi = C/r$ befriedigen; die Konstante C ergibt sich aus der Bedingung

$$\oint_S D_n \, \mathrm{d}S = 4\pi q$$

zu $C = 2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Daraus erhält man folgende Verteilungen der Oberflächenladungen:

$$\sigma_1 = \frac{q\,\varepsilon_1}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{q\,\varepsilon_2}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)};$$

$$\sigma_{1\mathrm{P}} = \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_{2\mathrm{P}} = \frac{q(\varepsilon_2 - 1)}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

132.

$$C = \left[\frac{(\varepsilon - 1)\,\Omega}{4\pi} + 1\right] \frac{a\,b}{b - a}.$$

133. Man erhält

$$C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}.$$

Die Polarisationsladungen befinden sich in den Inhomogenitäten des Dielektrikums, d.h. auf den Kugeln mit den Radien a, b, c:

$$\sigma_{a\mathrm{P}} = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}, \quad \sigma_{b\mathrm{P}} = \frac{q}{4\pi b^2} \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2},$$

$$\sigma_{c\mathrm{P}} = \frac{q}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Dabei ist q die Ladung der inneren Kondensatorbelegung. Die gesamte Polarisationsladung im Kondensator ist Null.

135. Die Kapazität des Kondensators ist

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi a \ln 2}.$$

Die Flächendichte der Polarisationsladungen ist

$$\sigma_P = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \quad \text{für} \quad x = 0,$$

$$\sigma_P = \sigma\left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_0}\right) \quad \text{für} \quad x = a.$$

Die Raumladungsdichte ergibt sich zu

$$\varrho_P = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 (x + a)^2}$$

(σ ist die Ladung der Belegung für $x = 0$).

136.

a) $$f_0 = \frac{E_0^2}{8\pi} = \frac{V^2}{8\pi a^2};$$

b) $$f = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} f_0 \quad \text{(flüssiges Dielektrikum)},$$

$$f = \frac{D^2}{8\pi} = f_0 \quad \text{(festes Dielektrikum)};$$

c) $$f = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \varepsilon f_0 \quad \text{(flüssiges Dielektrikum)},$$

$$f = \frac{(\varepsilon E)^2}{8\pi} = \varepsilon^2 f_0 \quad \text{(festes Dielektrikum)}.$$

137.

a) $$F = \frac{(\varepsilon - 1)\, b\, h_2 V^2}{8\pi \varepsilon h_1 \left[h_1 - \frac{h_2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\right]};$$

b) $$F = \frac{2\pi(\varepsilon - 1)\, h_1 h_2 q^2 \left[h_1 - \frac{h_2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\right]}{b\left\{a\left[h_1 - \frac{h_2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\right] + \frac{(\varepsilon - 1)\, h_2 x}{\varepsilon}\right\}}.$$

138. Wir vergleichen die Drücke in den Punkten A und B der Flüssigkeit (Abb. 36). Im Punkt B ist der Druck gleich dem Atmosphärendruck p_{atm}.

Der Druck im Punkt A kann auf zwei Weisen bestimmt werden. Einerseits folgt aus der Beziehung (3.25)

$$p_A = p_{\text{atm}} + \frac{E^2}{8\pi} \frac{\tau\,\partial\varepsilon}{\partial\tau}$$

mit $p_{\text{atm}} = p_0$ und $E = V/d$. Andererseits unterscheidet sich p_A vom Druck an der Oberfläche der Flüssigkeit im Kondensator, der durch die Beziehung (3.23) bestimmt wird, um den hydrostatischen Druck $r\,g\,h$:

$$p_A = r\,g\,h + \tau \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E^2 + p_{\text{atm}}.$$

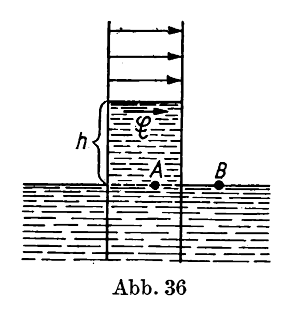
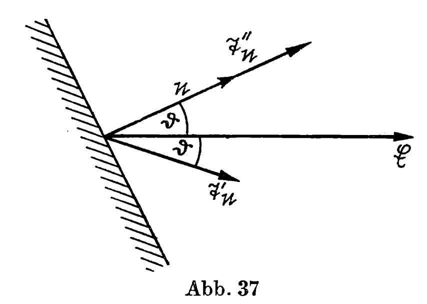


Abb. 36


Abb. 37

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke erhält man

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\,g\,\tau} E^2.$$

139. Der MAXWELLsche Spannungstensor $\mathfrak{T}'_{\mathfrak{n}}$ ist so gerichtet, daß das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ den Winkel zwischen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{T}'_{\mathfrak{n}}$ halbiert (Abb. 37). Bei beliebiger Orientierung der Fläche gilt $|\mathfrak{T}'_{\mathfrak{n}}| = w = \varepsilon E^2/8\pi$.

Die Striktionsspannung

$$\mathfrak{T}''_{\mathfrak{n}} = \frac{E^2\,\tau\,\mathfrak{n}}{8\pi} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}$$

hat immer den Charakter eines „negativen Druckes" und ist immer wie die Flächennormale $\mathfrak{n}$ gerichtet.

140.

a) Wir führen Zylinderkoordinaten ein (s. Abb. 38a). Das Feld hat in der $x\,y$-Ebene radiale Richtung und ist

$$E = \frac{2q\,r}{\varepsilon\left(r^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Zur Berechnung der Kraft F, die an einer Ladung, z.B. der linken, angreift, muß man die Spannungen aufsummieren, die an den Elementen $\mathrm{d}S$ dieser Ebene

an der Seite angreifen, die der anderen Ladung zugekehrt ist. Man erhält

$$T_z \, \mathrm{d}S = -\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \, \mathrm{d}S = -\frac{\varepsilon q^2}{2\pi} \frac{r^2}{\left(r^2 + \frac{a^2}{4}\right)^3 \varepsilon^2} \, \mathrm{d}S ,$$

wenn man den MAXWELLschen Spannungstensor benutzt. Daraus folgt

$$F_z = \int T_z \, \mathrm{d}S = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon q^2 \int\limits_0^\infty \frac{r^2 \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r}{\varepsilon^2 \left(r^2 + \frac{a^2}{4}\right)^3} = -\frac{q^2}{\varepsilon a^2} .$$

Dieser Wert wird gewöhnlich für die Kraft angenommen, die zwischen Ladungen in einem homogenen Dielektrikum wirkt.

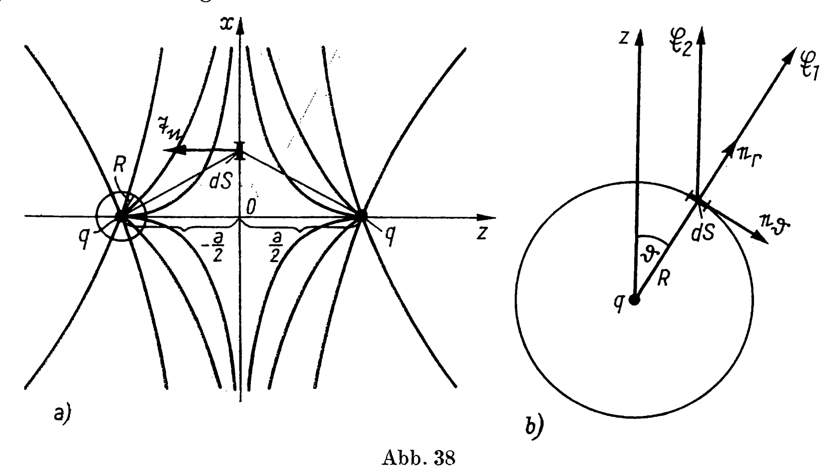


Abb. 38

Führt man die gleiche Rechnung mit dem vollständigen Spannungstensor durch, so erhält man die Kraft $F_z + \Delta F_z$, wobei der Zusatzterm $\Delta F_z = q^2 \varepsilon^{-2} a^{-2} \tau \, \partial\varepsilon/\partial\tau$ aus dem Striktionsterm folgt. In einer Theorie, in der die Elektrostriktionsspannungen berücksichtigt werden, muß man jedoch auch beachten, daß die Flüssigkeit in das Feld hineingesaugt wird, was gemäß (3.25) mit einer Zunahme des hydrostatischen Druckes in der Flüssigkeit um

$$\Delta p = \frac{E^2 \tau}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$$

verbunden ist. Die resultierende hydrostatische Kraft ist

$$\Delta F_{z\mathrm{h}} = -\frac{q^2 \tau}{\varepsilon^2 a^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\Delta F_z .$$

Die gesamte Wechselwirkungskraft $F_z + \Delta F_z + \Delta F_{z\text{h}} = -q^2/\varepsilon\, a^2$ zwischen den Ladungen stimmt mit der Kraft überein, die sich ohne Berücksichtigung der Striktionskräfte ergibt, und stellt demnach die Resultierende der elektrischen und mechanischen Kräfte dar.

b) Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn man die Wirkung der Spannungen auf der Oberfläche einer kleinen Kugel mit dem Radius R betrachtet, deren Mittelpunkt mit dem Ort der Ladung q, auf die die Kraft ausgeübt wird, zusammenfällt (Abb. 38*b*). Wir führen Kugelkoordinaten ein und betrachten die MAXWELLschen Spannungen

$$\mathfrak{T}'_n = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\mathfrak{E} E_r - \frac{1}{2} E^2 \mathfrak{e}_r\right)$$

mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$, wobei $\mathfrak{E}_1 = (q/\varepsilon R^2)\, \mathfrak{e}_r$ das Feld der Ladung ist, auf die eine Kraft ausgeübt wird, und $\mathfrak{E}_2 = q(\mathfrak{e}_\vartheta \sin\vartheta - \mathfrak{e}_r \cos\vartheta)/\varepsilon\, a^2$ das Feld der zweiten Ladung bedeutet, das als homogen angesehen werden kann, da der Abstand a zwischen den Ladungen groß gegen R ist. Summiert man die Spannungen, die an der Kugeloberfläche angreifen, so erhält man

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{T}'_n\, \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon\, a^2}\, \mathfrak{e}_z .$$

Die Berücksichtigung der Striktionsspannungen ergibt wegen der hydrostatischen Kompensation nichts Neues.

141. Man erhält in beiden Fällen

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{8mg}{\varepsilon - 1}},$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist.

142.

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q}{r_2} \quad \text{für} \quad z \geqq 0,$$

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r_1} \quad \text{für} \quad z \leqq 0.$$

143. Es ergibt sich

$$\sigma_P = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{q\, a}{2\pi\, r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} = r_1|_{z=0} = r_2|_{z=0}.$$

Für $\varepsilon_2 \to \infty$ erhält man den Fall einer Punktladung q, die sich im Dielektrikum ε_1 an dessen Grenze mit einem ebenen Leiter befindet. Dabei wird $\sigma_P \to -q\, a/2\pi\, r^3 \varepsilon_1$. Diese Grenzdichte ist die Summe aus den Dichten der Polarisationsladung an der Grenze eines Dielektrikums und einer wahren Ladung an der Leiteroberfläche.

144. Man erhält

$$F = \frac{q^2}{4a^2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Die Ladung wird für $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ von der Grenzfläche zwischen den Dielektrika abgestoßen und für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ angezogen. Die Ladung, die sich zu Anfang im Medium mit der größeren Dielektrizitätskonstanten befindet, wird von der Grenzfläche abgestoßen und strebt ins Unendliche. Die Ladung, die sich anfangs im Medium mit der kleineren Dielektrizitätskonstanten befindet, wird von der Grenzfläche angezogen, geht durch sie hindurch in das andere Medium, wird hier von der Grenzfläche abgestoßen und bewegt sich ins Unendliche. (Das ist nur dann richtig, wenn man die Reibungskraft, die von seiten des Mediums auf die Ladung wirkt, vernachlässigt.)

Man kann den angegebenen Wert von F auf verschiedenen Wegen erhalten, und zwar *a*) durch Betrachtung der Wechselwirkung zweier Punktladungen q' und q'', *b*) durch Berechnung der Kraft, die die Polarisationsladungen an der Grenze der Dielektrika auf eine Punktladung ausüben, und *c*) mit Hilfe des MAXWELLschen Spannungstensors. Im letzten Fall betrachtet man die Spannungen, die entweder an der Trennebene der Dielektrika oder an der Oberfläche einer kleinen Kugel, die die Ladung umgibt, angreifen.

145. Man erhält

$$F_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q_1^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2},$$

$$F_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q_2^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2}.$$

Die Ungleichheit von F_1 und F_2 ist darauf zurückzuführen, daß die Ladungen kein abgeschlossenes mechanisches System bilden: Es gibt noch Polarisationsladungen an der Grenze der Dielektrika. Die Vektorsumme der Kräfte, die an dieser Grenze und den Ladungen q_1 und q_2 angreifen, ist erwartungsgemäß gleich Null.

146. Setzt man im Metall $\varphi = 0$, so gilt im Dielektrikum $\varphi = q/\varepsilon r_1 - q/\varepsilon r_2$ (vgl. Abb. 10, S. 32: Ladung q im Punkt A, Ladung $-q$ im Punkt B'; $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 \to \infty$). Der Term $-q/\varepsilon r_2$, der durch die induzierte Ladung des Leiters und die Polarisationsladungen des Dielektrikums hervorgerufen wird, hat eine Form, als würde er das Feld einer Punktladung $-q/\varepsilon$ beschreiben, die sich im Punkt mit der Koordinate $z = -a$ befindet. Die Ladung $-q/\varepsilon$ heißt Bild der Ladung q/ε bezüglich der Ebene $z = 0$ (der Faktor $1/\varepsilon$ berücksichtigt den Einfluß des Dielektrikums). Es folgt schließlich

$$\sigma = -\frac{q a}{2\pi r^3}, \qquad F = -\frac{q^2}{4a^2 \varepsilon},$$

wobei $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor in der Ebene $z = 0$ ist.

147. Das Feld innerhalb des durch den Winkel α_0 bestimmten Gebietes wird durch die in Abb. 39 dargestellten Ladungssysteme erzeugt.

148. Der Dipol befinde sich im Punkt $(0, 0, z)$. Sind die x-, y- und z-Komponente des Dipolmoments $\mathfrak{p}$ gleich $p \sin\alpha$, 0 und $p \cos\alpha$, so sind die ent-

sprechenden Komponenten des Bildes $\mathfrak{p}'$ gleich $-p\sin\alpha$, 0 und $p\cos\alpha$. Damit folgt

$$U = \frac{(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}')\,r^2 - 3(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r})\,(\mathfrak{p}'\mathfrak{r})}{2\varepsilon\, r^5} = -\frac{p^2}{16z^3\,\varepsilon}(1+\cos^2\alpha),^{1)}$$

$$F_z = -\frac{3p^2}{16z^4\,\varepsilon}(1+\cos^2\alpha), \qquad N_\alpha = -\frac{p^2\sin^2\alpha}{16z^3\,\varepsilon}.$$

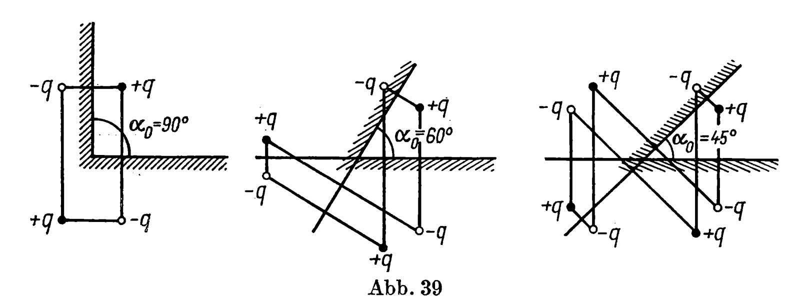


Abb. 39

Bei beliebiger Orientierung von $\mathfrak{p}$ wird der Dipol zur Ebene hingezogen. Das Drehmoment $\mathfrak{N}$ hat die Tendenz, den Dipol in der Richtung der positiven oder negativen z-Achse einzustellen ($\alpha = 0,\ \pi$). Das Drehmoment $\mathfrak{N}$ verschwindet auch bei $\alpha = \pi/2$, diese Gleichgewichtslage ist jedoch instabil.

149. Wir führen Polarkoordinaten ein, wobei wir den Pol in den Kugelmittelpunkt legen und die z-Achse parallel zur Richtung von $\mathfrak{E}_0$ wählen. Das Potential kann als Reihe nach LEGENDREschen Polynomen angesetzt werden (vgl. die Lösung der Aufgabe 153). Man erhält

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0\, r\cos\vartheta \qquad \text{für} \quad r < a,$$

$$\varphi_2 = -E_0\, r\cos\vartheta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0\, a^3 \frac{\cos\vartheta}{r^2} \qquad \text{für} \quad r > a.$$

Im Innern der Kugel erhält man ein homogenes elektrisches Feld der Stärke

$$E_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \begin{cases} > E_0 & \text{für} \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1, \\ < E_0 & \text{für} \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_1. \end{cases}$$

---

1) Der Faktor $1/2$ im Ausdruck für U tritt auf, weil das Feld $\mathfrak{E}'$ des Dipolmoments $\mathfrak{p}'$ proportional $\mathfrak{p}$ ist. Bei Zunahme von $\mathfrak{p}$ um $\mathrm{d}\mathfrak{p}$ (und ungeänderter Orientierung) wächst die Wechselwirkungsenergie um $\mathrm{d}U = -\mathfrak{E}'\,\mathrm{d}\mathfrak{p}$; daraus folgt

$$U = \int_0^p \mathrm{d}U = -\frac{1}{2}\mathfrak{E}'\,\mathfrak{p}$$

(vgl. die Lösung der Aufgabe 166).

Außerhalb der Kugel ist dem homogenen Feld E_0 das Feld des elektrischen Dipols überlagert, dessen Moment

$$p = E_0 a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

ist.

Dieses sekundäre Feld wird durch die Polarisationsladungen auf der Oberfläche der dielektrischen Kugel hervorgerufen:

$$\sigma_P = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos\vartheta, \qquad \varrho_P = 0.$$

Man erkennt leicht den Grund für eine solche Ladungsverteilung, wenn man sich jedes Element des polarisierten Dielektrikums als elementaren Dipol vorstellt.

150. Für das Dielektrikum mit unveränderter Polarisation ist $\mathfrak{E} = 4\pi\mathfrak{P}/3$ (vgl. Aufgabe 104).

Für das gewöhnliche Dielektrikum ergibt sich

$$\mathfrak{E} = \frac{12\pi\varepsilon}{(2\varepsilon + 1)(\varepsilon - 1)} \mathfrak{P}.$$

151. Man erhält

$$\varphi = -\mathfrak{E}_0 \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}}{r^3} \quad (r \geqq a),$$

wobei $\mathfrak{p} = R^3 \mathfrak{E}_0$ und R^3 die Polarisierbarkeit der Kugel ist; ferner ergibt sich

$$\sigma = \frac{3\varepsilon_0}{4\pi} E_0 \cos\vartheta.$$

152. Man erhält die an der Ladung q angreifende Kraft F durch Multiplikation von q_1 mit der Stärke des Feldes, das durch die zweite Ladung q_2 im Hohlraum, in dem sich q_1 befindet, erzeugt wird. Da der Hohlraum klein ist, wird das Feld in ihm homogen sein und die Stärke

$$\frac{3\varepsilon E_0}{2\varepsilon + 1} = \frac{3q}{(2\varepsilon + 1)a^2}$$

haben, wobei $E_0 = q/\varepsilon a^2$ das homogene Feld in der Umgebung des Hohlraums ist.

Daraus folgt

$$F = \frac{3q^2}{(2\varepsilon + 1)a^2}.$$

Diese Kraft unterscheidet sich von derjenigen, die zwischen den betrachteten Ladungen in einem flüssigen Dielektrikum mit derselben Dielektrizitätskonstanten ε wirkt (vgl. Aufgabe 140). Bei dem Versuch, analog zur Aufgabe 140 die an der Symmetrieebene angreifende Kraft zu bestimmen, würde man unter alleiniger Berücksichtigung der MAXWELLschen Spannungen die Kraft $F_1 =$

$= q^2/\varepsilon a^2$ finden; diese unterscheidet sich aber sowohl von der Kraft F, die an der Ladung selbst angreift, als auch von der elektrischen Gesamtkraft der Spannungen (ohne Berücksichtigung des Striktionsterms, der im Falle eines festen Körpers eine komplizierte Form annimmt). Dieselbe Kraft wird an einem beliebigen Gebiet eines Dielektrikums angreifen, das einen Hohlraum, der eine Ladung enthält, umschließt. Der Anteil $3q^2/(2\varepsilon + 1)\,a^2$ dieser Kraft greift an der Punktladung q und der Anteil $F' = -(2\varepsilon - 1)\,q^2/(2\varepsilon + 1)\,a^2\varepsilon$ an den auf der Hohlraumoberfläche induzierten Polarisationsladungen an.

153. Wir legen den Ursprung des Kugelkoordinatensystems in den Kugelmittelpunkt und die Polarachse durch die Punktladung. Das Potential setzen wir in der Form

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \sum_{l,m} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right) P_{lm}(\cos\vartheta)\, e^{im\alpha} \tag{1}$$

an, wobei r_1 der Abstand zwischen q und dem Aufpunkt ist. Die Reihe in (1) beschreibt offenbar das Feld der Ladungen, die auf der Kugel induziert werden. Da dieses im Unendlichen verschwinden muß, ist $a_{lm} = 0$. Aus Symmetriegründen hängt das Potential nicht vom Winkel α ab, so daß die Terme mit $m \neq 0$ ebenfalls Null sind. Die übrigen Konstanten $b_l \equiv b_{l0}$ bestimmen wir mit Hilfe der Randbedingungen.

Im Falle **a)** ist das Potential der Kugel $\varphi(R, \vartheta) = V = \text{const}$. Wir benutzen die Entwicklung für q/r_1 aus der Aufgabe 96:

$$\varphi(R, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{qR^l}{\varepsilon a^{l+1}} + \frac{b_l}{R^{l+1}}\right) P_l(\cos\vartheta) = V.$$

Daraus folgt

$$b_l = -\frac{qR^{2l+1}}{\varepsilon a^{l+1}} \quad \text{für} \quad l \neq 0$$

und

$$b_0 = VR - \frac{Rq}{\varepsilon a},$$

da das Potential außerhalb der Kugel

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{VR}{r} - \frac{qR}{\varepsilon a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{a}\right)^l \frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}} \tag{2}$$

ist. Wir bestimmen nun die Dichte der Ladungen, die auf der Kugeloberfläche induziert werden:

$$\sigma(R, \vartheta) = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\varepsilon V}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{R^{l-1}}{a^{l+1}} P_l(\cos\vartheta). \tag{3}$$

Im Falle **b)** ist das Potential V unbekannt und muß durch die Ladung Q der Kugel ausgedrückt werden. Offenbar gilt

$$Q = 2\pi \int \sigma(R, \vartheta)\, R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta = \varepsilon VR - \frac{qR}{a},$$

woraus

$$V = \frac{Q}{\varepsilon R} + \frac{q}{\varepsilon a}$$

folgt. Mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 96 kann man (2) in der Form

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{Q + q'}{\varepsilon r} - \frac{q'}{\varepsilon r_2} \tag{4}$$

schreiben mit

$$q' = q\frac{R}{a}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r\cos\vartheta}, \quad a' = \frac{R^2}{a}.$$

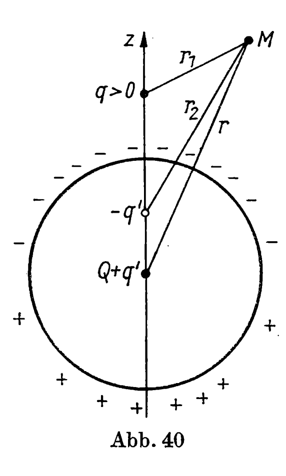


Abb. 40

Das Potential einer Punktladung und einer geladenen Kugel im Gebiet $r > a$ reduziert sich also auf das Potential von vier Punktladungen, die auf der Symmetrieachse liegen, und zwar der Ladung q im Abstand a vom Koordinatenursprung und ihrer drei Bildladungen, d. h. der Ladungen Q und $q' = q(R/a)$ im Koordinatenursprung und der Ladung $-q'$ im harmonisch konjugierten Punkt bezüglich der Kugeloberfläche $a' = R^2/a$. Die Ladung $-q'$ beschreibt die Wirkung der Ladungen, die auf der q benachbarten Seite der Kugeloberfläche induziert werden (Abb. 40). Diese Ladungen haben natürlich ein anderes Vorzeichen als q. Die Ladung q' beschreibt die Wirkung der Ladungen, die auf dem q gegenüberliegenden Teil der Kugeloberfläche induziert werden; sie haben dasselbe Vorzeichen wie q.

Ist die Kugel neutral, so fehlt der Term mit Q. Wenn die Kugel geerdet ist ($V = 0$), so wird

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{q'}{\varepsilon r_2}. \tag{5}$$

154. Man erhält

$$\varphi(M) = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{q'}{\varepsilon r_2} + V$$

(Abb. 41) mit

$$q' = q\frac{R}{a}, \quad a' = \frac{R^2}{a}.$$

155. Man erhält

$$\varphi(M) = \frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} + \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4}$$

(Abb. 42) mit

$$q' = \frac{q\,a}{b}, \quad b' = \frac{a^2}{b}.$$

Die Ladung auf der Halbkugel ist

$$Q = -q\left(1 - \frac{b^2 - a^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

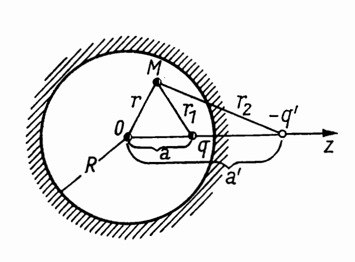


Abb. 41

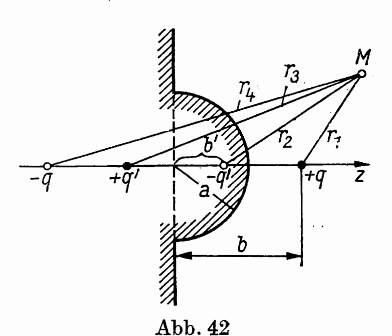


Abb. 42

156. Außerhalb der Kugel ist

$$\varphi \equiv \varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r},$$

im Leiter

$$\varphi \equiv \varphi_3 = \frac{q}{\varepsilon_1 R_1}$$

und im Hohlraum

$$\varphi \equiv \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 r_1} - \frac{q'}{\varepsilon_2 r_2} + \frac{q}{\varepsilon_1 R_1}$$

(vgl. Abb. 43) mit

$$q' = \frac{qR_2}{a}, \quad a' = \frac{R_2^2}{a}.$$

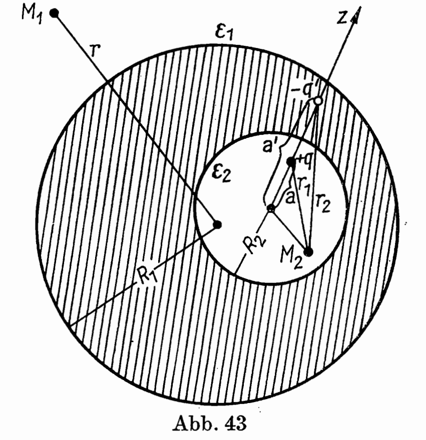
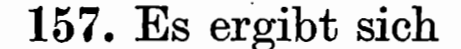


Abb. 43



157. Es ergibt sich

$$\varphi_1(r, \vartheta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2} \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos\vartheta) \qquad \text{für} \quad r \leqq R,$$

$$\varphi_2(r, \vartheta) = \frac{q}{\varepsilon_2 r_1} + q\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2} \frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}} \frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}} \quad \text{für} \quad r \geqq R,$$

wobei r_1 der Abstand zwischen q und dem Aufpunkt ist. Hier kann das Potential im Unterschied zum Fall der leitenden Kugel nicht als einfaches System von Bildern dargestellt werden.

158. Man erhält

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + q\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{\varepsilon_1 l+\varepsilon_2(l+1)}\frac{a^l r^l}{R^{2l+1}}P_l(\cos\vartheta) \quad \text{für} \quad r \leqq R,$$

$$\varphi_2 = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{\varepsilon_1 l+\varepsilon_2(l+1)}\frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta) \quad \text{für} \quad r \geqq R,$$

wobei r_1 der Abstand zwischen q und dem Aufpunkt ist.

Für $a = 0$ folgt

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r} + \left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\frac{q}{\varepsilon_2 R}, \qquad \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 r}.$$

159. Wir bezeichnen die Oberflächen der inneren und äußeren Kugel mit S_1 bzw. S_2 und setzen das Potential der äußeren Kugel gleich Null. Es ist günstig, das System in Kugelkoordinaten zu behandeln und dabei die Polarachse in die Verbindungsgerade zwischen den beiden Kugelmittelpunkten und den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der inneren Kugel zu legen. In Kugelkoordinaten besitzt die Gleichung der Oberfläche S_1 die Form $r = a$. Zur Ableitung der Gleichung für die Oberfläche S_2 bemerken wir, daß man mit Hilfe des Dreiecks $OO'A$ (Abb. 44) die Beziehung

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{R^2+c^2-2cR\cos\vartheta}} \tag{1}$$

erhält. Aus (1) folgt die Gleichung der Oberfläche S_2 bis auf Terme erster Ordnung in c genau in der Form

$$R(\vartheta) = b + cP_1(\cos\vartheta) \tag{2}$$

mit $P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$.

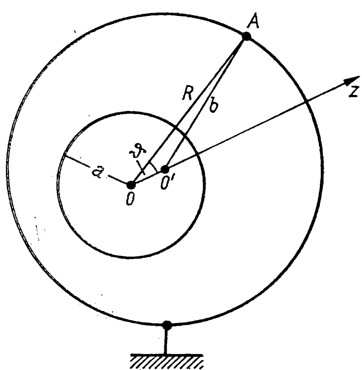


Abb. 44

Der Term $cP_1(\cos\vartheta) = c\cos\vartheta$ in (2) beschreibt die Abweichung von der Kugelsymmetrie, die für $c \to 0$ verschwindet. Es ist natürlich, das Potential als Entwicklung nach Kugelfunktionen anzusetzen (s. Anhang II), wobei wir uns auf die ersten beiden Terme beschränken. Dabei muß der zweite Term, der die Abweichung von der Kugelsymmetrie berücksichtigt, proportional c sein.

Wir setzen also

$$\varphi(r,\vartheta) = \left(A_1+\frac{B_1}{r}\right) + c\left(A_2 r+\frac{B_2}{r^2}\right)\cos\vartheta, \tag{3}$$

wobei A_i und B_i aus den Grenzbedingungen bestimmt werden:

$$\varphi|_{S_1} = \text{const}, \qquad \varphi|_{S_2} = 0, \qquad \oint_{S_1}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S_1 = -4\pi q.$$

Damit folgt schließlich

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) + \frac{q\,c}{b^3 - a^3}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\vartheta .$$

Die Ladungsdichte auf der inneren Kugel ergibt sich zu

$$\sigma = \frac{q}{4\pi\,a^2} - \frac{3q\,c}{4\pi(b^3 - a^3)}\cos\vartheta .$$

Die Kraft, die an der inneren Kugel angreift, ist

$$F = -\frac{q\,c}{b^3 - a^3}.$$

160.

$$\Delta C = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{(b-a)^2\,(b^3 - a^3)}.$$

161. Bei einer Vergrößerung der Ladung q um $\mathrm{d}q$ nimmt die Energie U ihrer Wechselwirkung mit der Kugel um $\mathrm{d}U = \varphi'\mathrm{d}q$ zu, wobei φ' das Potential der auf der Kugel induzierten Ladungen ist. Dieses Potential ist aber der Ladung q proportional, d.h. $\varphi' = \mathrm{const}\cdot q$. Daher gilt

$$U = \int\limits_0^q \mathrm{d}U = \frac{\mathrm{const}}{2}\,q^2 = \frac{1}{2}\,\varphi' q. \tag{1}$$

Würde φ' nicht von q abhängen (Potential des äußeren Feldes), so wäre die Wechselwirkungsenergie doppelt so groß ($U = \varphi' q$). Benutzt man (1) und die Ergebnisse der Aufgabe 153, so erhält man

$$U = -\frac{q^2 R}{2\varepsilon(a^2 - R^2)}, \qquad F = -\frac{q^2\,a R}{\varepsilon(a^2 - R^2)^2}.$$

162. Man erhält

$$U = \frac{Q\,q}{\varepsilon\,a} - \frac{q^2 R^3}{2a^2\,\varepsilon(a^2 - R^2)},$$

$$F = \frac{Q\,q}{\varepsilon\,a^2} - \frac{q^2 R^3(2a^2 - R^2)}{\varepsilon\,a^3(a^2 - R^2)^2}.$$

Im Falle gleichnamiger Ladungen gilt $Q\,q > 0$, und die Wechselwirkungskraft kann gleich Null und bei genügend großen q oder kleinen Abständen a sogar negativ werden (Anziehung).

163. Die Probeladung q muß klein gegen die Ladungen sein, die sich in anderen Leitern oder Dielektrika befinden, und darf sich nicht in allzu großer Nähe von Inhomogenitäten des Mediums befinden, z.B. von Grenzflächen zwischen Leitern und Dielektrika, damit die Rückwirkung der Ladungen, die durch den Probekörper induziert werden, klein ist. Bei der Messung des elektrischen Feldes einer geladenen leitenden Kugel muß z.B. die elektrische Bild-

kraft klein gegen die gemessene Kraft $q\,Q/a^2$ sein (Q ist die Ladung der Kugel und a der Abstand zwischen Probeladung und Kugelmittelpunkt). Das führt zu der Bedingung

$$\left|\frac{Q}{q}\right| \gg 2\,\frac{\left(\dfrac{2a}{R}-1\right)^2}{\dfrac{a}{R}\left(\dfrac{a}{R}-1\right)^2}$$

(vgl. die Lösung der vorigen Aufgabe), die nur bei nicht zu kleinem a/R und nicht zu großem q/Q erfüllt ist.

164. Das Bild des elektrischen Dipols $\mathfrak{p} = p(\mathfrak{e}_x \sin\alpha + \mathfrak{e}_z \cos\alpha)$ in der geerdeten Kugel ist das System aus der Punktladung $q = (pR/r^2)\cos\alpha$ und dem Dipol $\mathfrak{p}' = p(R/r)^3(-\mathfrak{e}_x \sin\alpha + \mathfrak{e}_z \cos\alpha)$ im Punkt A' (Abb. 45) im Abstand $r' = R^2/r$ vom Kugelmittelpunkt. Die gesuchten Größen sind

$$U = -\frac{p^2 R(r^2\cos^2\alpha + R^2)}{2\varepsilon(r^2 - R^2)^3},$$

$$F = -\frac{p^2 R\, r}{\varepsilon(r^2 - R^2)^4}\left[(2r^2 + R^2)\cos^2\alpha + 3R^2\right],$$

$$N = -\frac{p^2 R\, r^2 \sin 2\alpha}{2\varepsilon(r^2 - R^2)^3}.$$

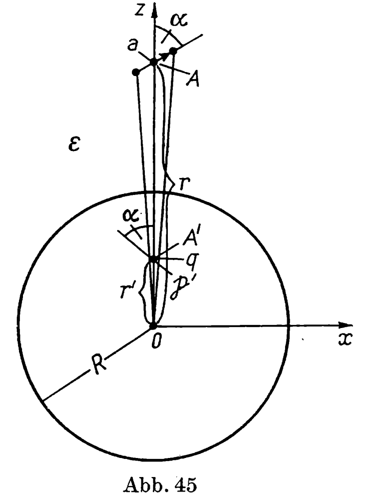


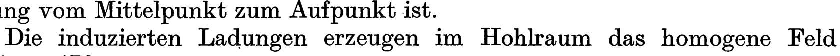
Abb. 45

Im Grenzfall $r \to R$ erhält man bei $r = R + z$ und $R \to \infty$, $z = \text{const}$ das Ergebnis der Aufgabe 148 (Dipol in der Nähe einer leitenden Ebene).

165. Es ergibt sich

$$\sigma = -\frac{3p}{4\pi R^3}\cos\vartheta,$$

wobei ϑ der Winkel zwischen $\mathfrak{p}$ und der Richtung vom Mittelpunkt zum Aufpunkt ist.



Die induzierten Ladungen erzeugen im Hohlraum das homogene Feld $E' = p/R^3$.

166. Man erhält die Kräfte, die auf die Inhomogenität wirken, durch Differentiation von

$$U' = \sum_{l,m} a_{lm}\, Q_{lm}^* \tag{1}$$

bei konstanten Q_{lm}^*.

U' unterscheidet sich von der reinen Wechselwirkungsenergie U zwischen dem Inhomogenitätsgebiet und dem äußeren Feld, die die Arbeit bestimmt, die man aufwenden muß, um bei Vorhandensein einer Inhomogenität das Potential φ zu erzeugen [vgl. mit (3.16)]. Bei der Bestimmung dieser Energie muß man berücksichtigen, daß die Momente Q_{lm} vom äußeren Feld abhängen. Ist das Inhomogenitätsgebiet insbesondere ein ungeladener Leiter

oder ein Dielektrikum, so wird die reine Wechselwirkungsenergie zwischen der Inhomogenität und dem äußeren Feld durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{lm} Q^*_{lm} \tag{2}$$

bestimmt. Den Faktor $^1/_2$ erhält man ebenso wie bei der Lösung der Aufgabe 161, wenn man berücksichtigt, daß in diesem Fall Q_{lm} proportional a_{lm} ist. Bei der Bestimmung der verallgemeinerten Kräfte mit Hilfe von (2) durch Differentiation nach den verallgemeinerten Koordinaten muß man sowohl Q_{lm} als auch a_{lm} als veränderliche Größen auffassen.

167. Man erhält

$$U_0 = q\,\varphi_0 - \mathfrak{p}\,\mathfrak{E}_0,$$

wobei

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \mathfrak{r}\,\mathfrak{E}_0, \qquad \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon r} + \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}}{\varepsilon r^3},$$

$$\mathfrak{F} = q\,\mathfrak{E}_0 + (\mathfrak{p}\,\vec{V})\,\mathfrak{E}_0, \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}_0$$

ist (das Drehmoment wird in bezug auf den Koordinatenursprung berechnet).

169. Der Körper ist bestrebt, die Lage einzunehmen, bei der seine potentielle Energie $U = -\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}/2$ minimal ist. Man legt die Koordinatenachsen in die Hauptachsenrichtungen des Tensors β_{ik}, so daß

$$U = -\frac{1}{2}(\beta^{(x)} E_x^2 + \beta^{(y)} E_y^2 + \beta^{(z)} E_z^2)$$

ist. Daraus folgt, daß sich im Falle $\beta^{(x)} \geqq \beta^{(y)} \geqq \beta^{(z)} > 0$ bei $\mathfrak{E} \parallel x$-Achse ein Minimum für U ergibt, während bei $\mathfrak{E} \parallel z$-Achse für $\beta^{(x)} \leqq \beta^{(y)} \leqq \beta^{(z)} < 0$ ein Minimum vorliegt.

170. Die Achse des Stabes und die Ebene der Scheibe sind bestrebt, sich bei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ parallel und bei $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ senkrecht zur Feldrichtung einzustellen.

171. Es ergibt sich

$$F = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)}{l\,\varepsilon_1 + (l+1)\,\varepsilon_2} \, \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}.$$

Für $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ erfolgt Anziehung, für $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ Abstoßung. Im Falle einer leitenden Kugel gilt $\varepsilon_1 \to \infty$. Durch Aufsummieren der geometrischen Reihe findet man die Wechselwirkungsenergie

$$U = -\frac{q^2 R}{2\varepsilon_2 (R^2 - a^2)}$$

und daraus

$$F = -\frac{q^2\, a R}{\varepsilon_2 (a^2 - R^2)^2}$$

(vgl. Aufgabe 161).

Zur Berechnung der Kraft mit Hilfe von (3.16) betrachten wir die Größe

$$U' = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{V'} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \mathfrak{E}\, \mathfrak{E}_1 \, \mathrm{d}V'.$$

Das Volumen V' wird durch die Kugeloberfläche S begrenzt, die der Oberfläche der dielektrischen Kugel infinitesimal benachbart ist und sich ganz in ihr befindet. Das Integral, das in den Ausdruck für U' eingeht, unterscheidet sich nur um eine unendlich kleine Größe von der potentiellen Wechselwirkungsenergie U zwischen Punktladung und Kugel. An Stelle der Feldstärken des Gesamtfeldes $\mathfrak{E}$ und des Feldes $\mathfrak{E}_1$ der Punktladung im homogenen Dielektrikum ε_2 führen wir die entsprechenden Potentiale ein und ziehen die Konstante $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ vor das Integralzeichen. Wir erhalten

$$U' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} \int\limits_{V'} \vec{\nabla}\varphi\, \vec{\nabla}\varphi_1 \, \mathrm{d}V'.$$

Mit Hilfe der Greenschen Formel

$$\int \vec{\nabla}\varphi\, \vec{\nabla}\varphi_1 \, \mathrm{d}V = \oint\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \mathrm{d}S + \int \varphi \Delta \varphi_1 \, \mathrm{d}V$$

und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß innerhalb der Kugel $\Delta \varphi_1 = 0$ gilt, erhält man für U den Ausdruck

$$U = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{l\,\varepsilon_1 + (l+1)\,\varepsilon_2} \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}.$$

Er stimmt mit dem Ausdruck überein, den man aus der Gleichung (2) der Aufgabe 166 erhält. Daraus ergibt sich der oben angegebene Wert für F.

172.

$$C_g = \frac{\varkappa}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ar\,cosh} \frac{a^2 - R_1^2 - R_2^2}{2 R_1 R_2} \right]^{-1}.$$

173. Es ist

$$\sigma = \pm \frac{|E|}{4\pi} = \pm \frac{4 b^2 \varkappa^2}{\pi [(x^2 - y^2 - b^2)^2 + 4 x^2 y^2]}$$

mit $b = 2R^4/a^2 \sqrt{a^2 - 4R^2}$. Koordinatenursprung ist der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke der Zylinderachsen, die als x-Achse gewählt wurde.

174.

$$C = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ar\,cosh} \frac{R_1^2 + R_2^2 - a^2}{2 R_1 R_2} \right]^{-1}.$$

175. Sind die Achsen x, y, z den Hauptachsen des Tensors ε_{ik} parallel, so erhält man

$$\varphi(x, y, z) = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(y)} \varepsilon^{(z)}}} \left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}} \right]^{-1/2}. \qquad (1)$$

Bei beliebiger Orientierung des Koordinatensystems lautet die Beziehung (1)

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \frac{e}{\sqrt{|\varepsilon_{ik}|\, \varepsilon_{ik}^{-1} x_i x_k}},$$

wobei $|\varepsilon_{ik}|$ die Determinante des Tensors ε_{ik} ist.

176.

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{(\varepsilon_{ik} - \delta_{ik})\, n_i E_{0k}}{\varepsilon_{lm}\, n_l\, n_m}\, \mathfrak{n}.$$

177. Es ist

$$C = \frac{S\, \varepsilon^{(z)}}{4\pi a},$$

wobei z die Koordinate senkrecht zu den Kondensatorplatten bedeutet.

178. Wählt man die x- und z-Achse in der Ebene $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{n}$ mit $z \parallel \mathfrak{n}$, so gilt

$$\tan\vartheta = \frac{E_x}{E_z} = \frac{\varepsilon_{zz} \tan\vartheta_0}{1 - \varepsilon_{zx} \tan\vartheta_0},$$

wobei $\tan\vartheta_0 = E_{0x}/E_{0z}$ ist. Dabei bleibt die Kraftlinie im Dielektrikum in der Ebene $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{n}$.

3.2. Potential- und Kapazitätskoeffizienten

180. Wir bezeichnen die Ladung des ersten Leiters mit q_1 und die Ladung auf der äußeren Oberfläche des zweiten Leiters mit q' (die Ladung auf der inneren Oberfläche des zweiten Leiters ist dann $-q_1$, wie aus dem Gaussschen Satz der Elektrostatik folgt). Das System (3.28) hat in diesem Fall die Form

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2, \\ -q_1 + q' &= c_{12} V_1 + c_{22} V_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt

$$q' = (c_{11} + c_{12})\, V_1 + (c_{12} + c_{22})\, V_2. \tag{2}$$

q' bestimmt das Feld im ganzen äußeren Raum und insbesondere das Potential V_2 des zweiten Leiters. Gleichung (2) muß also für beliebige V_1 und feste q', V_2 gelten; das ist nur der Fall, wenn

$$c_{11} + c_{12} = 0 \tag{3}$$

ist. Damit erhält man aus der ersten der Gleichungen (1)

$$q_1 = c_{11}(V_1 - V_2). \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) folgt

$$C = c_{11} = -c_{12} = -c_{21},$$
$$C' = c_{12} + c_{22}.$$

181.

$$s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{12} = s_{21} - \frac{c_{12}}{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}.$$

183.

$$C = \frac{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}.$$

184.

$$q_1 = \frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{13}}{s_{11} - s_{12}}\,\frac{q}{8}, \quad q_2 = \frac{q}{2}, \quad q_3 = \frac{q}{4}, \quad q_4 = \frac{s_{11} - s_{13}}{s_{11} - s_{12}}\,\frac{q}{8}.$$

185.

$$q_1 = -\frac{2a}{b}\,q, \quad q_2 = -\frac{a}{b}\,q, \quad q_3 = \frac{3a^2}{b^2}\,q.$$

186.

$$F = \frac{C_1\,C_2(\varepsilon\,r\,V_1 - C_2\,V_2)\,(\varepsilon\,r\,V_2 - C_1\,V_1)}{(\varepsilon^2\,r^2 - C_1\,C_2)^2}.$$

187.

$$q_1 = q\,\frac{V_0 - V_P}{V_1 - V_0}, \quad q_0 = q\,\frac{V_1 - V_P}{V_0 - V_1}.$$

189. Die eigentliche Kapazität des vereinigten Leiters ist

$$c_{00} = c_{11} + c_{22} + 2c_{12},$$

die gegenseitige Kapazität des vereinigten Leiters und des i-ten Leiters im System

$$c_{0i} = c_{1i} + c_{2i}.$$

190. Die Energie vermindert sich um

$$\Delta W = \frac{(q - q')^2}{4}\,\frac{r - b}{r\,b}.$$

191. Bis auf $1/r$ genau ist

$$F = -\frac{b\,C^2\,q^2}{r^3[C + a\,b\,(b - a)^{-1}]^2}.$$

192. Kugel und Leiter haben bei der Berührung dasselbe Potential:

$$V_1 = q\,s_{11} + (Q - q)\,s_{12} = q\,s_{12} + (Q - q)\,s_{22} = V_2.$$

Daraus folgt

$$\frac{s_{11} - s_{12}}{s_{22} - s_{12}} = \frac{Q}{q} - 1, \tag{1}$$

wobei s_{ik} die Potentialkoeffizienten bedeuten (die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf die Kugel bzw. den Leiter).

Mit q_k bezeichnen wir die Ladung des Leiters nach dem k-ten Kontakt. Da die Potentiale von Leiter und Kugel bei Berührung gleich sind, folgt

$$q_k\,s_{11} + (Q + q_{k-1} - q_k)\,s_{12} = q_k\,s_{12} + (Q - q_k + q_{k-1})\,s_{22}.$$

Daraus erhält man mit Hilfe von (1) eine Rekursionsformel für q_k:

$$q_k = q + \frac{q}{Q} q_{k-1}. \tag{2}$$

Die sukzessive Anwendung von (2) liefert an der Grenze $k \to \infty$

$$q = \lim_{k\to\infty} q_k = q\left[1 + \frac{q}{Q} + \left(\frac{q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{q}{Q}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{qQ}{Q-q}.$$

3.3. Spezielle Methoden der Elektrostatik

193. Die LAPLACEsche Gleichung hat die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(R_\xi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right) = 0, \qquad R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi + c^2)}.$$

Diese Gleichung ist unter den Randbedingungen $\varphi = \text{const}$ für $\xi = 0$ (auf der Oberfläche des Ellipsoids) und $\varphi \to 0$ für $\xi \to \infty$ zu integrieren. Benutzt man für die Bestimmung der Integrationskonstanten, daß $\xi \to r^2$ für $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \to \infty$ ist, so erhält man

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{2\varepsilon}\int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi}, \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi}$$

und daraus

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{q\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}}{4\pi a b c}.$$

Die Ladungsdichten an den Enden der Halbachsen sind den Längen der Halbachsen direkt proportional: $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = a : b : c$.

194. Für $a = b > c$ (abgeplattetes Ellipsoid) erhält man

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2 - c^2}} \arctan\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}},$$

$$C = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos\dfrac{c}{a}}.$$

Insbesondere gilt für $c = 0$ (Scheibe):

$$C = \frac{2a}{\pi}.$$

Für $a > b = c$ (gestrecktes Ellipsoid) ergibt sich

$$\varphi = \frac{q}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\xi + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}.$$

Insbesondere ist für $b \ll a$ (Stab):

$$C = \frac{a}{\ln \dfrac{2a}{b}}.$$

195. Zunächst betrachten wir das Ellipsoid als ungeladen: $q = 0$. Ist das homogene elektrische Feld $\mathfrak{E}_0$ parallel zur x-Achse, so erhalten wir

$$\varphi_0 = -E_0 x = \mp E_0 \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}.$$

Das Minuszeichen entspricht $x > 0$, das Pluszeichen $x < 0$. Sowohl die Funktion φ_0 als auch das Potential φ' des Feldes der auf dem Ellipsoid induzierten Ladungen genügen der LAPLACEschen Gleichung. Setzt man $\varphi' = \varphi_0 F(\xi)$ in die LAPLACEsche Gleichung ein, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Funktion $F(\xi)$:

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \ln[R_\xi(\xi + a^2)] = 0,$$

die sich leicht integrieren läßt. Die Lösung, die den Randbedingungen genügt, lautet

$$\varphi|_{q=0} = \varphi_0 \left[1 - \frac{\displaystyle\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}} \right].$$

Hat das Ellipsoid die Eigenladung q, so kann man die Lösung, die den Randbedingungen

$$\varphi|_{\xi=0} = \text{const}, \qquad -\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 4\pi q$$

genügt (S ist eine geschlossene Fläche, die das Ellipsoid enthält), durch Superposition erhalten (vgl. Aufgabe 193):

$$\varphi|_q = \varphi_{q=0} + \frac{1}{2} q \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}.$$

196. Das Potential hat dieselbe Form wie in der vorigen Aufgabe. Die darin eingehenden Integrale können durch elementare Funktionen ausgedrückt werden; das ist immer dann der Fall, wenn das Ellipsoid rotationssymmetrisch ist. Man erhält

$$\varphi = -E_0 x \left[1 - \frac{\ln \dfrac{\sqrt{1+\xi/a^2}+e}{\sqrt{1+\xi/a^2}-e} - \dfrac{2e}{\sqrt{1+\xi/a^2}}}{\ln \dfrac{1+e}{1-e} - 2e} \right].$$

Dabei bedeuten a die große, b die kleine Halbachse und $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ die Exzentrizität des Ellipsoids; die x-Achse steht senkrecht auf der Ebene, und es ist

$$x = \frac{a}{e} \sqrt{\left(1 + \frac{\xi}{a^2}\right)\left(1 + \frac{\zeta}{a^2}\right)}$$

(s. Aufgabe 66). Die Feldstärke ist an den Polen des Ellipsoids maximal:

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = -\frac{1}{E_0 h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0,\, \zeta=-b^2} = \frac{2e^3(1-e^2)^{-1}}{\ln \dfrac{1+e}{1-e} - 2e} = \frac{1}{n^{(x)}}.$$

Dabei ist $n^{(x)}$ der Depolarisationskoeffizient (s. Aufgabe 198). Im Falle einer Kugel gilt $e = 0$ und $E_{\max}/E_0 = 3$. Im Falle eines stark gestreckten Stabes (Blitzableiter) ist

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = \frac{a^2}{b^2}\left(\ln \frac{2a}{b} - 1\right)^{-1}, \qquad a \gg b.$$

Daher ist eine Funkenentladung der Luft am Ende eines solchen Spitzenleiters weitaus wahrscheinlicher als an seinen anderen Teilen.

197. Man erhält das Feld in beliebigem Abstand vom Ellipsoid durch Superposition der drei Feldformen, die in der Aufgabe 195 gefunden wurden (das Feld $\mathfrak{E}_0$ wird in Komponenten zerlegt, die den Hauptachsenrichtungen des Ellipsoids parallel sind).

In großen Abständen vom Ellipsoid gilt

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}}{r^3},$$

$$p_x = \beta^{(x)} E_x, \qquad p_y = \beta^{(y)} E_y, \qquad p_z = \beta^{(z)} E_z.$$

Der Polarisierbarkeitstensor des Ellipsoids hat die Hauptwerte

$$\beta^{(x)} = \frac{a\,b\,c}{3n^{(x)}}, \qquad \beta^{(y)} = \frac{a\,b\,c}{3n^{(y)}}, \qquad \beta^{(z)} = \frac{a\,b\,c}{3n^{(z)}}.$$

198. Man erhält

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{2e^2}\left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e\right) \leqq \frac{1}{3},$$

$$n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1 - n^{(x)}}{2},$$

wobei $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ die Exzentrizität des Ellipsoids ist.

Im Falle $e \to 1$ (Stab) wird

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2},$$

im Falle $e \ll 1$ (nahezu Kugelform)

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} e^2.$$

199. Man erhält

$$n^{(z)} = \frac{1 + e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctan} e) \geqq \frac{1}{3},$$

$$n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1 - n^{(z)}}{2}, \quad e = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1}.$$

Im Spezialfall einer Scheibe wird

$$n^{(z)} = 1, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = 0.$$

200. Es ist

$$\varphi = \varphi_x + \varphi_y + \varphi_z.$$

Innerhalb des Ellipsoids gilt

$$\varphi_x = \varphi_{1x} = -E_0 \, x \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(x)}\right)^{-1}$$

und außerhalb des Ellipsoids

$$\varphi_x = \varphi_{2x} = -E_0 \, x \left[1 - \frac{a\, b\, c (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}}{2[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \, n^{(x)}]}\right]$$

mit

$$n^{(x)} = \frac{1}{2} a\, b\, c \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}.$$

Die Größen φ_y und φ_z werden durch analoge Ausdrücke bestimmt, wobei x durch y bzw. z und a durch b bzw. c zu ersetzen ist. Innerhalb des Ellipsoids ist das homogene Feld

$$\mathfrak{E} = \frac{E_{0x} \, \mathfrak{e}_x}{1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(x)}} + \frac{E_{0y} \, \mathfrak{e}_y}{1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(y)}} + \frac{E_{0z} \, \mathfrak{e}_z}{1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(z)}}.$$

In großen Abständen vom Ellipsoid ist

$$\varphi_2 = -\mathfrak{E}_0 \, \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{p}\, \mathfrak{r}}{r^3}$$

mit

$$p_x = \beta^{(x)} E_x, \quad \beta^{(x)} = \frac{a\, b\, c}{3\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + n^{(x)}\right)}$$

usw.

201. Mit Hilfe der Gleichung (3.16) erhält man

$$U = \frac{a\,b\,c(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,E_0^2\{2[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,n]\sin^2\vartheta + [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,n]\cos^2\vartheta\}}{6\,[\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + n\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]\,[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,n]},$$

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{a\,b\,c(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 E_0^2(3n - 1)\sin 2\vartheta}{6[\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]\,[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,n]}.$$

Dabei bedeuten ϑ den Winkel zwischen der Symmetrieachse und der Richtung des Feldes $\mathfrak{E}_0$ und n den Depolarisationskoeffizienten bezüglich der Symmetrieachse des Ellipsoids (siehe z.B. die Lösung der vorigen Aufgabe).

Aus der Gleichung für N geht hervor, daß das äußere Feld danach strebt, die Symmetrieachse eines gestreckten ($n < 1/3$) bzw. abgeplatteten Ellipsoids ($n > 1/3$) in eine Lage parallel bzw. senkrecht zur Feldrichtung rückzudrehen.

Im Falle eines leitenden Ellipsoids gilt $\varepsilon_1 \to \infty$ und

$$N = \frac{a\,b\,c(3n - 1)\,E_0^2 \sin 2\vartheta}{6n(1 - n)}.$$

202. Die potentielle Energie eines geladenen Flüssigkeitstropfens in Form eines Rotationsellipsoids mit der Exzentrizität $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$, dessen Volumen gleich dem einer Kugel mit dem Radius R ist (Ladung q), kann durch die Beziehung

$$U(e) = \frac{q^2}{2C} + \alpha S =$$

$$= \frac{q^2(1 - e^2)^{1/3}}{4R\,e} \ln\frac{1 + e}{1 - e} + 2\pi R^2 \alpha \left\{(1 - e^2)^{1/3} + \frac{\arcsin e}{e(1 - e^2)^{1/6}}\right\} \qquad (1)$$

ausgedrückt werden (dabei haben wir den Ausdruck für die Kapazität C eines gestreckten Rotationsellipsoids benutzt, der bei der Lösung der Aufgabe 194 angegeben wurde).

Um die Frage der Stabilität eines geladenen kugelförmigen Tropfens beantworten zu können, müssen wir die e-Abhängigkeit (1) der Energie bei kleinem e klären. Dazu entwickeln wir U in eine Reihe bis auf Glieder mit e^4:

$$U(e) = \frac{q^2}{2R} + 4\pi R^2 \alpha + \frac{e^4}{45}\left(8\pi R^2 \alpha - \frac{q^2}{2R}\right).$$

Diese Beziehung zeigt, daß ein Tropfen mit der Ladung $q < q_{\mathrm{kr}} = (16\pi R^3 \alpha)^{1/2}$ bei kleinen Deformationen die Tendenz hat, in die Kugelform zurückzukehren, d.h. der Tropfen stabil ist. Bei $q > q_{\mathrm{kr}}$ vergrößert sich eine entstehende Deformation, und der Tropfen ist instabil. Der Prozeß endet mit einer Aufspaltung des instabilen Tropfens in zwei oder mehr kleinere stabile Tropfen.[1] Daß sich schließlich stabile Tropfen ergeben, folgt aus dem Ausdruck für q_{kr}. Mit kleiner

[1] Man kann leicht unmittelbar zeigen, daß z.B. die Energie bei der Aufspaltung eines geladenen Tropfens in zwei gleiche kugelförmige Tropfen um den Faktor $2^{2/3}$ abnimmt.

werdenden Abmessungen des Tropfens nimmt die kritische Ladung q_{kr} proportional der Quadratwurzel aus seinem Volumen ab, während die Ladung q des Tropfens im Mittel proportional zum Volumen abnimmt; bei genügend kleinen Abmessungen des Tropfens beginnen also die Stabilitätsbedingungen erfüllt zu sein.

203. Man erhält

$$\varphi = -\frac{E_0 z}{\pi}\left(\arctan\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}}\right) = -\frac{E_0}{\pi}\sqrt{-\eta}\left(\frac{\sqrt{\xi}}{a}\arctan\frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1\right),$$

wobei $\xi^{1/2}$ für $z > 0$ mit dem Plus- und für $z < 0$ mit dem Minuszeichen zu nehmen ist. In großen Abständen von der Öffnung gilt $\xi \approx r^2$, und das Potential wird

$$\varphi \approx \frac{E_0 a^3 z}{3\pi r^3} \quad \text{für} \quad z > 0.$$

Diese Form hat das Potential eines elektrischen Dipols mit dem Moment $p = E_0 a^3/3\pi$, dessen Achse mit der z-Achse übereinstimmt. Daraus folgt, daß sich die Kraftlinien, die durch die Öffnung hindurchgehen, auf der anderen Seite des Metallschirms schließen.

204. Es ergibt sich

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2}\left(\pi - \arcsin\frac{a}{r_1} + \frac{a}{\sqrt{r_1^2 - a^2}}\right) \quad \text{für} \quad z \to -0,$$

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2}\left(\frac{a}{\sqrt{r_1^2 - a^2}} - \arcsin\frac{a}{r_1}\right) \quad \text{für} \quad z \to +0,$$

wobei $r_1 = (\xi + a^2)^{1/2}$ der Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Öffnung und dem Aufpunkt in der Ebene ist.

205. Man hat die Gleichung

$$\Delta\varphi = -4\pi q\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)$$

zu lösen. Die δ-Funktion muß dabei in Zylinderkoordinaten geschrieben werden:

$$\delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) = \frac{1}{r_0}\,\delta(r - r_0)\,\delta(\alpha - \gamma)\,\delta(z).$$

Die Fourier-Komponente

$$\varphi_k(r, \alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r, \alpha, z)\cos kz\, dk \tag{1}$$

des Potentials $\varphi(r, \alpha, z)$ genügt der Gleichung

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\alpha^2} - k^2\varphi_k = -\frac{4q}{r_0}\,\delta(r - r_0)\,\delta(\alpha - \gamma) \tag{2}$$

und den Randbedingungen (s. Abb. 11, S. 42)

$$\varphi_k(r,0) = \varphi_k(r,\beta) = 0\,, \tag{3}$$

$$\varphi_k(\infty,\alpha) = 0\,. \tag{4}$$

Wir betrachten die der Beziehung (2) entsprechende homogene Gleichung. Sie besitzt die partikulären Lösungen $R_n(r)\sin(n\,\pi\,\alpha/\beta)$, die den Randbedingungen (3) genügen ($n = 1, 2, \ldots$), wobei $R_n(r)$ bis auf einen konstanten Faktor entweder gleich $I_{n\pi/\beta}(k\,r)$ oder gleich $K_{n\pi/\beta}(k\,r)$ ist. Wir setzen die Lösung der inhomogenen Gleichung (2) als Superposition solcher partikulären Lösungen an:

$$\varphi_k = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n I_{n\pi/\beta}(k\,r)\sin\dfrac{n\,\pi\,\alpha}{\beta} & \text{für} \quad r < a\,, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n K_{n\pi/\beta}(k\,r)\sin\dfrac{n\,\pi\,\alpha}{\beta} & \text{für} \quad r > a\,. \end{cases} \tag{5}$$

In Gleichung (5) ist berücksichtigt, daß das Potential φ_k der Randbedingung (4) genügen und für $r = 0$ endlich sein muß (s. Anhang III).

Zur Bestimmung der Konstanten A_n und B_n benutzen wir erstens die Stetigkeit des Potentials bei $r = r_0$. Daraus folgt

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{I_{n\pi/\beta}(k\,r_0)}{K_{n\pi/\beta}(k\,r_0)}\,. \tag{6}$$

Zweitens fordern wir, daß das Potential (5) der Gleichung (2) genügt. Wir setzen (5) in (2) ein, multiplizieren beide Seiten der erhaltenen Gleichung mit $\sin(m\,\pi\,\alpha/\beta)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ und integrieren über α von 0 bis β. Wegen der Orthogonalität der Funktionen $\sin(n\,\pi\,\alpha/\beta)$ im Integrationsbereich ergibt sich

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}r}\right) - \left(k^2 + \frac{m^2\pi^2}{\beta^2 r^2}\right)R_m = -\frac{8q}{\beta\,r_0}\,\delta(r - r_0)\sin\frac{m\,\pi\,\gamma}{\beta} \tag{7}$$

mit

$$R_m(r) = \begin{cases} A_m I_{m\pi/\beta}(k\,r) & \text{für} \quad r < a\,, \\ B_m K_{m\pi/\beta}(k\,r) & \text{für} \quad r > a\,. \end{cases}$$

Die Funktion $R_m(r)$ ist bei $r = r_0$ stetig, während ihre erste Ableitung nach r den Sprung

$$b \equiv R_m'(r_0 + 0) - R_m'(r_0 - 0) = k B_m K_{m\pi/\beta}'(k\,r_0) - k A_m I_{m\pi/\beta}'(k\,r_0)$$

erleidet. Daher ist die zweite Ableitung von $R_m(r)$ gleich $R_m''(r) = b\,\delta(r - r_0)$.

Setzt man dies in (7) ein und vernachlässigt die bei $r = r_0$ endlichen Terme, so erhält man eine zweite Gleichung zur Bestimmung von A_n und B_n:

$$k B_n K_{n\pi/\beta}'(k\,r_0) - k A_n I_{n\pi/\beta}'(k\,r_0) = -\frac{8q}{\beta\,r_0}\sin\frac{n\,\pi\,\gamma}{\beta}\,. \tag{8}$$

Zur Vereinfachung der Ausdrücke für A_n und B_n benutzt man die Beziehung

$$K_\nu(x)\,I_\nu'(x) - K_\nu'(x)\,I_\nu(x) = \frac{1}{x}\,.$$

207. Man erhält

$$\varphi(r,\alpha,z) = \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{1}{R_0}\operatorname{arc\,tan}\sqrt{\frac{\cosh\frac{\eta}{2}+\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cosh\frac{\eta}{2}-\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}} - \frac{1}{R_0'}\operatorname{arc\,tan}\sqrt{\frac{\cosh\frac{\eta}{2}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cosh\frac{\eta}{2}-\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}}\right\},$$

wobei

$$R_0 = \sqrt{r_0^2+r^2+z^2-2rr_0\cos(\gamma-\alpha)} = \sqrt{2rr_0}\sqrt{\cosh\eta-\cos(\gamma-\alpha)}\,,$$

$$R_0' = \sqrt{r_0^2+r^2+z^2-2rr_0\cos(\gamma+\alpha)} = \sqrt{2rr_0}\sqrt{\cosh\eta-\cos(\gamma+\alpha)}$$

ist.

208. Es ergibt sich

$$\sigma = \text{const}\cdot r^{\pi/\beta-1},$$

wobei r der Abstand von der Kante des Keils ist. Im Spezialfall eines Keiles, der sich im Feld einer Punktladung befindet (s. Aufgabe 205), erhält man

$$\text{const} = -\frac{q\sqrt{\pi}\,r_0^{\pi/\beta}\sin\frac{\pi\gamma}{\beta}}{\beta^2(r_0^2+z^2)^{\pi/\beta+1/2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\pi}{\beta}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\pi}{\beta}+1\right)}.$$

Daraus folgt $\sigma\to 0$ für $r\to 0$ und $\beta<\pi$ sowie $\sigma\to\infty$ für $r\to 0$ und $\beta>\pi$. Befindet sich die Ladung insbesondere am Rand der Ebene, so ist

$$\sigma\sim\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

209. Die Ladung q befinde sich im Koordinatenursprung und die z-Achse stehe senkrecht auf der Oberfläche der Platte. Dann lauten die Gleichungen der vorderen und hinteren Oberfläche der Platte $z=a$ bzw. $z=a+c$. Wir setzen das Potential in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= q\int_0^\infty J_0(kr_1)\,e^{-k|z|}\,dk + \int_0^\infty A_1(k)\,J_0(kr_1)\,e^{kz}\,dk \quad (-\infty<z<a),\\
\varphi_2 &= \int_0^\infty B_1(k)\,J_0(kr_1)\,e^{-kz}\,dk + \int_0^\infty B_2(k)\,J_0(kr_1)\,e^{kz}\,dk \quad (a<z<b),\\
\varphi_3 &= \int_0^\infty A_2(k)\,J_0(kr_1)\,e^{-kz}\,dk \qquad (b<z<\infty,\ b=a+c)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

an. Die Randbedingungen auf den Oberflächen der Platte liefern ein System von vier algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten A_1, A_2, B_1, B_2, dessen Lösung

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= q\beta\frac{e^{-2kb} - e^{-2ka}}{1-\beta^2 e^{-2kc}}, & A_2 &= q\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 e^{-2kc}}, \\ B_1 &= \frac{q(1-\beta)}{1-\beta^2 e^{-2kc}}, & B_2 &= \frac{q\beta(1-\beta)\,e^{-2kb}}{1-\beta^2 e^{-2kc}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

mit $\beta = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1)$, $b = a + c$ ist.

Die Gleichungen (2) und (1) stellen die Lösung unseres Problems dar. In großen Abständen von der Platte ($z > 0$) hat das Feld die Form

$$\varphi(r_1, z) \approx \frac{q}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} + \frac{p\,z}{(r_1^2 + z^2)^{3/2}},$$

wobei $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $p = -(\varepsilon - 1)^2 c\,q/2\varepsilon$ ist.

210. Man erhält

$$\varphi(M) = \frac{2q}{\varepsilon + 1}\int\limits_0^\infty \frac{\sinh k(a - |z|)}{\cosh ka} J_0(k r_1)\,\mathrm{d}k$$

mit $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (s. Abb. 46).

Für $\sqrt{z^2 + r_1^2} \to 0$ (in der Nähe der Ladung) wird

$$\varphi \to \frac{2q}{(\varepsilon + 1)\sqrt{r_1^2 + z^2}}$$

(vgl. Aufgabe 129).

Man kann das Potential in der Form

$$\varphi = \frac{2q}{\varepsilon + 1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{r_1^2 + (z - 2an)^2}}$$

darstellen.

Das entsprechende System der Bilder ist in Abb. 48*b*, S. 227, dargestellt.

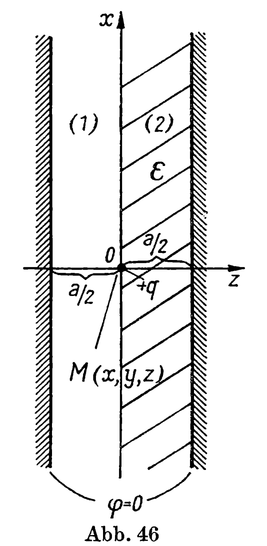


Abb. 46

211. Man kann die räumlichen Bipolarkoordinaten so einführen, daß die Oberflächen der inneren und äußeren Belegung die Koordinatenflächen $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ sind. Dazu muß die z-Achse in der in Abb. 47 dargestellten Weise durch die Mittelpunkte der Belegungen gelegt werden. Die Mittelpunkte der Belegungen haben dabei die Koordinaten $z_1 = a\coth\xi_1$ und $z_2 = a\coth\xi_2$ (a ist der Parameter der räumlichen Bipolarkoordinaten). Die Radien der Belegungen sind mit a, ξ_1, ξ_2 durch die Gleichungen $a = a_1\sinh\xi_1$, $a = a_2\sinh\xi_2$, $b = z_2 - z_1 = a(\coth\xi_2 - \coth\xi_1)$ verknüpft, aus denen

$$\cosh\xi_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - b^2}{2a_1 b}, \qquad \cosh\xi_2 = \frac{a_2^2 + b^2 - a_1^2}{2a_2 b} \tag{1}$$

folgt. Die Funktion ψ genügt im Raum zwischen den Kondensatorbelegungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\sin^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{4}\psi = 0. \tag{2}$$

Abb. 47

Separiert man in (2) die Variablen und berücksichtigt, daß ψ in unserem Fall nicht vom Azimutwinkel α abhängt, so erhält man partikuläre Lösungen, die für $\eta = 0, \pi$ endlich sind:

$$\psi_l(\xi, \eta) = \left[A_l \cosh\left(l + \frac{1}{2}\right)\xi + B_l \sinh\left(l + \frac{1}{2}\right)\xi\right] P_l(\cos\eta) \tag{3}$$

mit $l = 0, 1, 2, \ldots$

Wir setzen ψ als Reihe an:

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l(\xi, \eta).$$

Die Koeffizienten A_l und B_l werden durch die Randbedingungen $\psi(\xi_2, \eta) = 0$ und

$$\psi(\xi_1, \eta) = V(2\cosh\xi_1 - 2\cos\eta)^{-1/2} = V\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(l+1/2)\xi_1} P_l(\cos\eta)$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$\varphi(\xi, \eta) = V\sqrt{2\cosh\xi - 2\cos\eta}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(l+1/2)\xi_1}\sinh\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi - \xi_2)}{\sinh\left(l + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 - \xi_2)} P_l(\cos\eta). \tag{4}$$

Die Kapazität des Kondensators ist

$$C = \frac{q_1}{V} = \frac{1}{4\pi V}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} h_\eta h_\alpha\bigg|_{\xi=\xi_1} \mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\alpha.$$

In dieser Gleichung steht das Pluszeichen, weil die Koordinate ξ in Richtung der äußeren Normalen zur inneren Belegung abnimmt. Setzt man (4) ein und

benutzt die Orthogonalität der LEGENDREschen Polynome, so folgt

$$C = \frac{a_1}{2} + a_1 \sinh \xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(2l+1)\xi_1} \coth\left(l + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 - \xi_2).$$

213. Man erhält

$$c_{11} = \frac{a_1}{2} + a_1 \sinh \xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+1/2)\xi_1} \coth\left(l + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 + \xi_2),$$

$$c_{22} = \frac{a_2}{2} + a_2 \sinh \xi_2 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+1/2)\xi_2} \coth\left(l + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 + \xi_2),$$

$$c_{12} = -a_1 \sinh \xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-(l+1/2)(\xi_1+\xi_2)}}{\sinh\left(l + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 + \xi_2)}$$

mit

$$\cosh \xi_1 = \frac{b^2 + a_1^2 - a_2^2}{2b\, a_1}, \qquad \cosh \xi_2 = \frac{b^2 - a_1^2 + a_2^2}{2b\, a_2}.$$

Die Oberflächen des ersten und zweiten Leiters werden durch die Gleichungen $\xi = -\xi_1$ bzw. $\xi = \xi_2$ beschrieben, wobei $a_1 \sinh \xi_1 = a_2 \sinh \xi_2$ ist.

214. Man erhält

$$c_{11} = a_1(1 + m\,n + m\,n^3 + m^2\,n^2),$$

$$c_{12} = -a_1\,n(1 + m\,n),$$

$$c_{22} = a_2(1 + m\,n + m^3\,n + m^2\,n^2)$$

mit $m = a_1/b$ und $n = a_2/b$.

215. Das Potential sei auf den Kugeln Null und im Unendlichen gleich $-V$. Wir führen eine Inversion des Systems an einer Kugel mit dem Radius $R = 2a$ durch, deren Mittelpunkt mit dem Berührungspunkt der leitenden Kugeln

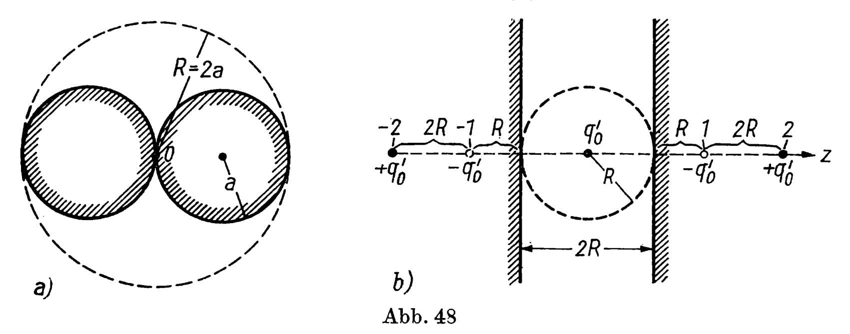


Abb. 48

zusammenfällt (vgl. Abb. 48*a*, in der die Inversionskugel gestrichelt dargestellt ist). Nach der Inversion hat das System die Form eines Plattenkondensators (s. Abb. 48*b*; die Inversionskugel ist wieder gestrichelt dargestellt), und der Abstand zwischen den geerdeten Belegungen ist $2R$. Dem Innern der

Kugel entspricht dabei das Äußere des Kondensators. In das Inversionszentrum im Kondensator fällt der unendlich ferne Punkt des ursprünglichen Systems mit dem Potential $+V$. Dem entspricht die Punktladung $q_0' = -RV$ im Inversionszentrum. Das Feld im gespiegelten System kann gemäß Aufgabe 210 ($\varepsilon = 1$) als Feld des folgenden unendlichen Systems von Bildern dargestellt werden: Auf der z'-Achse, die durch das Inversionszentrum hindurchgeht und auf den Kondensatorbelegungen senkrecht steht, befinden sich in den Punkten $z_n' = 2Rn$ die Punktladungen $(-1)^n q_0'$. Da wir uns für die Kapazität interessieren, müssen wir die Gesamtladung des ursprünglichen Systems bestimmen:

$$q = 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n' R}{z_n'} = q_0' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -q_0' \ln 2 = RV\ln 2 .$$

Bei der Berechnung der Summe haben wir die bekannte Reihenentwicklung von $\ln 2$ benutzt (s. [72], 0.232). Damit ergibt sich die Kapazität zu

$$C = \frac{q}{V} = 2a\ln 2 .$$

Zur Bestimmung des Potentials mit Hilfe der Formeln (3.32) und (3.33) schreiben wir $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ in Zylinderkoordinaten (die z-Achse stimmt mit der Symmetrieachse des Systems überein, der Koordinatenursprung liegt im Berührungspunkt der Kugeln). Dann gilt $z' = R^2 z/r^2$, $r_1' = R^2 r_1/r^2$, $r^2 = r_1^2 + z^2$, und wir erhalten für das Potential

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \frac{q}{C} - \frac{R^2 q}{C r}\int_0^{\infty} \frac{\sinh k\left(R - \frac{R^2|z|}{r^2}\right)}{\cosh kR} J_0\left(\frac{kR^2 r_1}{r^2}\right) \mathrm{d}k .$$

Der Term q/C wurde hinzugefügt, damit $\varphi(\mathfrak{r})$ für $r \to \infty$ gleich Null wird.

217. Der Winkel β, unter dem sich die Kugelflächen schneiden (wir zählen ihn außerhalb des Leiters), wird durch

$$\beta = \begin{cases} 2\pi - |\xi_2 - \xi_1| & \text{für gleichnamige } \xi_1, \xi_2, \\ 2\pi - |\xi_1 + \xi_2| & \text{für ungleichnamige } \xi_1, \xi_2 \end{cases}$$

gegeben. Wählt man das Inversionszentrum O auf der Schnittlinie der Kugeln, setzt den Inversionsradius gleich $2a$ und führt die Inversion durch, so erhält man einen Keil mit dem Winkel β und einer Kante (z'-Achse), die senkrecht auf der Symmetrieebene ($\alpha = 0, \pi$) des betrachteten Leiters steht. In Abb. 49 ist der Fall $\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$ dargestellt. Bei der Inversion erscheint im Punkt O die Ladung $q_0' = -2aV$. Wie man leicht zeigt, ist $\gamma = \xi_1$, wenn man γ von der Keilbegrenzung aus zählt, in die die Kugeloberfläche $\xi = \xi_1$ übergeht. Bei der Inversion gehen die Flächen $\xi = \mathrm{const}$ in die Halbebenen $\alpha' = \mathrm{const}$

über, wobei

$$\xi = \begin{cases} \gamma - \alpha' & \text{für} \quad 0 \leqq \alpha' \leqq \pi + \gamma, \\ \gamma - \alpha' + 2\pi & \text{für} \quad \pi + \gamma < \alpha' < \beta \quad (\text{bei } \beta > \pi + \gamma) \end{cases} \tag{1}$$

ist.

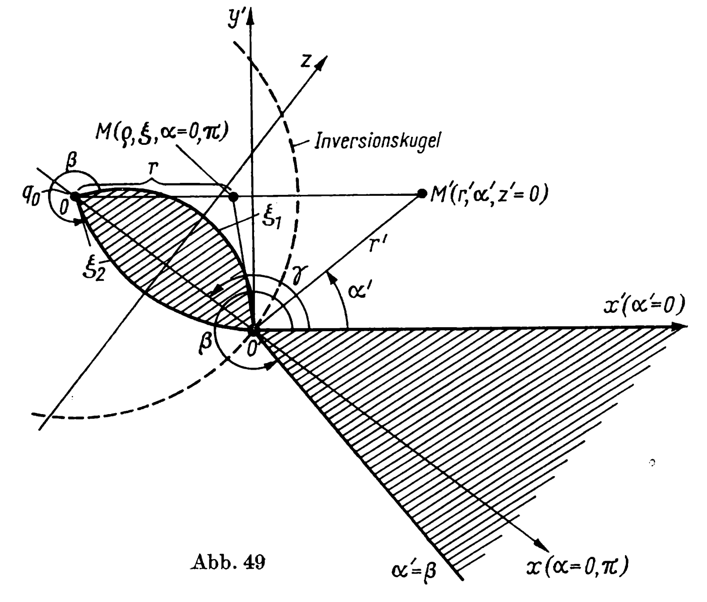


Abb. 49

Die Abstände r und r' können durch die Koordinaten ϱ, ξ des Aufpunktes M ausgedrückt werden. Dabei muß man die Beziehungen zwischen kartesischen und Ringkoordinaten (Aufgabe 68) berücksichtigen und die ähnlichen Dreiecke $OO'M'$ und $OO'M$ betrachten:

$$r = \frac{2a\,\mathrm{e}^{\varrho/2}}{\sqrt{2(\cosh\varrho - \cos\xi)}}, \qquad r' = 2a\,\mathrm{e}^{-\varrho}. \tag{2}$$

Benutzt man den in der Aufgabe 206 erhaltenen Ausdruck für das Potential eines Keils sowie die Gleichungen (1) und (2), so erhält man nach einigen Umformungen

$$C = \frac{q}{V} = \lim_{\substack{r \to \infty \\ (\text{oder } \varrho \to 0,\ \xi \to 0)}} \frac{r(\varphi + V)}{V} = \frac{a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sinh\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{\pi}{\beta} \frac{\sinh\frac{\pi\zeta}{\beta}}{\cosh\frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos\frac{2\pi\gamma}{\beta}} - \frac{\pi}{\beta} \frac{\sinh\frac{\pi\zeta}{\beta}}{\cosh\frac{\pi\zeta}{\beta} - 1} + \frac{\sinh\zeta}{\cosh\zeta - 1} \right).$$

218. Man erhält

a) $C = \frac{R}{\pi}(\sin\Theta + \Theta)$,

b) $C = 2R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \frac{11}{13}R$.

Das Integral wird mit Hilfe der Substitution $e^{-\zeta/2} = x$ berechnet.

219.

$$C = \frac{a}{2}\left(5 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

4. STATIONÄRER STROM

220.

$$\frac{i}{I} = \frac{V_1 - V_2}{V_2 - V^{(e)}}.$$

221. Der Widerstand der Galvanometerspule muß gleich dem Außenwiderstand R sein.

222. Man erhält

$$R = \frac{3}{2} r \quad \text{für} \quad n = 2,$$

$$R = \frac{13}{7} r \quad \text{für} \quad n = 3,$$

$$R = \frac{47}{22} r \quad \text{für} \quad n = 4.$$

Aus Symmetriegründen kann man sich z.B. im Falle $n = 3$ auf insgesamt drei Ringströme beschränken.

223. Wir führen die in Abb. 12 eingezeichneten Ringströme I_k ein. Die KIRCHHOFFsche Gleichung für die Zelle $B_k A_k A_{k+1} B_{k+1}$ lautet

$$I_{k-1} + I_{k+1} = \left(2 + \frac{R}{r}\right) I_k. \tag{1}$$

Diese lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung hat die beiden linear unabhängigen Lösungen $e^{k\alpha}$ und $e^{-k\alpha}$ mit

$$\sinh \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{r}}.\,^{1)} \tag{2}$$

Die allgemeine Lösung von (1) lautet

$$I_k = A' e^{k\alpha} + B' e^{-k\alpha}.$$

Im vorliegenden Fall schreibt man die Gleichung (1) durch Umordnung der Terme zweckmäßiger in der Form

$$I_k = A \cosh (\beta - k)\, \alpha, \tag{3}$$

wobei A und β zunächst willkürliche Konstanten sind, die sich aus den Randbedingungen an den Leitungsenden ergeben. Wir betrachten die letzte Zelle.

---

[1]) Bei der Ableitung dieses und der folgenden Ausdrücke muß man benutzen, daß sich die Formeln für die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen durch die Substitutionen $\cos\alpha \to \cosh\alpha$, $\sin\alpha \to i \sinh\alpha$ aus den gewöhnlichen ergeben.

Die KIRCHHOFFsche Gleichung für sie lautet

$$I_n(R + R_a + r) - I_{n-1}\, r = 0\,. \tag{4}$$

Setzt man die Ströme I_n und I_{n-1} aus (3) in (4) ein und benutzt (2), so erhält man nach Kürzung mit A die Gleichung

$$\tanh \beta\,\alpha = \frac{R_a \cosh n\,\alpha + \sqrt{R\,r}\,\sinh\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{R_a \sinh n\,\alpha + \sqrt{R\,r}\,\cosh\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha} \tag{5}$$

zur Bestimmung von β. A ergibt sich aus der KIRCHHOFFschen Gleichung für die Anfangszelle der Leitung:

$$I_0(R + R_i + r) - I_1\, r = V^{(e)}\,. \tag{6}$$

Mit Hilfe von (6) erhält man nach einigen Umformungen

$$A = \frac{V^{(e)}}{R_i \cosh \beta\,\alpha + \sqrt{R\,r}\,\sinh\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha}\,.$$

Schließlich erhält man für den Strom im Abschnitt $A_k A_{k+1}$

$$I_k = \frac{V^{(e)} \cosh(\beta - k)\,\alpha}{R_i \cosh \beta\alpha + \sqrt{R\,r}\,\sinh\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha}\,. \tag{7}$$

Die Konstanten α und β in (7) werden durch die Gleichungen (2) und (5) bestimmt.

Bei trockener Isolation gilt $r \to \infty$, $\alpha \to 0$, und Gleichung (7) lautet erwartungsgemäß

$$I_k = \frac{V^{(e)}}{R_i + R_a + (n+1)\,R}\,. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) erhält man für das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte $V_0^{(e)}$ und $V^{(e)}$, die bei trockener bzw. feuchter Isolation denselben Strom durch den Widerstand R_a gewährleisten,

$$\frac{V^{(e)}}{V_0^{(e)}} = \frac{R_i \cosh \beta\alpha + \sqrt{R\,r}\,\sinh\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha}{[R_i + R_a + (n+1)\,R]\cosh\left(\beta - n + \frac{1}{2}\right)\alpha}\,. \tag{9}$$

Ist der Lastwiderstand $R_a = 0$, so vereinfacht sich Gleichung (5), und man erhält

$$\beta = n + \frac{1}{2}\,. \tag{10}$$

224. Sind $I(x)$ und $\varphi(x)$ Strom und Potential der Ader (gegen Erde) im Querschnitt mit der Koordinate x, so erhält man

$$\varphi(x) = -\varrho' \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}, \qquad I = -\varrho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\varrho}{\varrho'} I.$$

225. Man erhält

$$I(x) = \frac{V^{(e)} \cosh s(x - x_0)}{R_i \cosh s x_0 + \sqrt{\varrho\,\varrho'}\, \sinh s x_0} \tag{1}$$

mit $s = \sqrt{\varrho/\varrho'}$. Die Konstante x_0 ergibt sich aus der Gleichung

$$\tanh s(x_0 - a) = \frac{R_a}{\sqrt{\varrho\,\varrho'}}. \tag{2}$$

Für $R_i = R_a = 0$ gilt

$$I(x) = \frac{V^{(e)} \cosh s(x - a)}{\sqrt{\varrho\,\varrho'}\, \sinh s a}. \tag{3}$$

Bei fehlender Ableitung ist $\varrho' \to \infty$, $x_0 \to a$, $s \to 0$, und der Strom hat längs des Kabels den konstanten Wert

$$I_0 = \frac{V^{(e)}}{R_i + \varrho\, a + R_a}.$$

Benutzt man Gleichung (7) aus der Lösung der Aufgabe 223, so muß man

$$R = \varrho\, \mathrm{d}x, \qquad r = \frac{\varrho'}{\mathrm{d}x}, \qquad k = \frac{x}{\mathrm{d}x}, \qquad n = \frac{a}{\mathrm{d}x}$$

setzen. Dann ergibt sich aus der Gleichung (2) der Lösung zur Aufgabe 223 die Beziehung $\alpha = s\,\mathrm{d}x$. In Aufgabe 223 ist β mit x_0 durch die Beziehung $\beta = x_0/\mathrm{d}x$ verknüpft, so daß $\beta\,\alpha = x_0 s$ wird. Setzt man dies in die Gleichungen (5) und (7) in der Lösung von Aufgabe 223 ein, so erhält man die oben angegebenen Gleichungen (1) und (2).

226. Man findet

$$E_1 = \frac{\varkappa_2 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}, \qquad D_1 = \frac{\varepsilon_1 \varkappa_2 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1},$$

$$E_2 = \frac{\varkappa_1 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}, \qquad D_2 = \frac{\varepsilon_2 \varkappa_1 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1},$$

$$j_1 = j_2 = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 V}{\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1}.$$

An der Grenzfläche zwischen den Platten gilt

$$\sigma_P = \frac{E_2 - E_1}{4\pi} - \sigma = \frac{\varkappa_2(\varepsilon_1 - 1) - \varkappa_1(\varepsilon_2 - 1)}{4\pi(\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1)} V,$$

$$\sigma = \frac{D_2 - D_1}{4\pi} = \frac{(\varepsilon_2 \varkappa_1 - \varepsilon_1 \varkappa_2) V}{4\pi(\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1)}.$$

V ist größer als Null, wenn die erste Platte der positiven Belegung zugewandt ist.

An der Grenzfläche zwischen der Belegung und der ersten Platte ist

$$\sigma = \frac{D_1}{4\pi}, \quad \sigma_P = \frac{E_1 - D_1}{4\pi},$$

an der Grenzfläche zwischen der Belegung und der zweiten Platte

$$\sigma = -\frac{D_2}{4\pi}, \quad \sigma_P = -\frac{E_2 - D_2}{4\pi}.$$

227. Man erhält

$$\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2},$$

wobei β_1 und β_2 die Winkel bedeuten, die die Stromlinien mit der Normalen der Trennfläche im ersten bzw. zweiten Medium bilden.

228. Man findet

$$\varphi = \frac{I z \ln \frac{r}{b}}{\pi a^2 \varkappa \ln \frac{a}{b}}.$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß das elektrische Feld im Raum zwischen den Leitern nicht die Richtung der z-Achse hat. Da somit die radiale Komponente E_r des elektrischen Feldes von Null verschieden ist, besitzen die zylinderförmigen Oberflächen der Leiter die Flächenladungsdichte

$$\sigma_1 = \left.\frac{\varepsilon E_r}{4\pi}\right|_{r=a} = \frac{\varepsilon I z}{4\pi^2 a^3 \varkappa \ln \frac{a}{b}},$$

$$\sigma_2 = \left.\frac{\varepsilon E_r}{4\pi}\right|_{r=b} = -\frac{\varepsilon I z}{4\pi^2 a^2 b \varkappa \ln \frac{a}{b}}.$$

Für $z = 0$ ist $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Die Lage des Querschnitts, für den dies gilt, ist nicht bestimmt. Man kann ihn verschieben, indem man z.B. auf dem Leiter eine zusätzliche konstante Ladung anbringt. Die Ladungen $q_1 = 2\pi a \sigma_1$ und $q_2 = 2\pi b \sigma_2 = -q_1$ je Längeneinheit des Leiters und des Mantels (bei dem-

selben z-Wert) sind mit der Potentialdifferenz

$$V = \int_a^b E_r \, \mathrm{d}r = -\frac{I z}{a^2 \varkappa}$$

zwischen ihnen durch die Beziehung

$$\frac{q_1}{V} = \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}} = \text{const}$$

verknüpft. Das Verhältnis q_1/V ist hier gleich der Kapazität je Längeneinheit eines Zylinderkondensators im elektrostatischen Fall.

Das Magnetfeld hat offenbar die gleiche Form wie das Feld eines unendlich langen geradlinigen Leiters mit dem Strom I.

229. Es ergibt sich

$$E_0 = -k(\varkappa_2 l_1 + \varkappa_1 l_2) V^{(e)}, \qquad E_1 = k \varkappa_2 V^{(e)}, \qquad E_2 = k \varkappa_1 V^{(e)}$$

mit

$$k = \frac{\varkappa_0}{l_0(\varkappa_0 \varkappa_1 l_2 + \varkappa_0 \varkappa_2 l_1 + \varkappa_1 \varkappa_2 l_0)}.$$

$V^{(e)} = E^{(e)} l_0$ ist die elektromotorische Kraft der Quelle. In der Quelle ist das elektrische Feld dem Strom entgegengerichtet ($E_0 < 0$).

Die Ladungen, die dieses elektrische Feld erzeugen, entstehen an den Grenzen der Leiter mit verschiedener Leitfähigkeit und können mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden; die Ladung an der Grenze 01 z.B. ist

$$q_{01} = \frac{r^2}{4} (E_1 - E_0).$$

230. Wir betrachten z.B. den Energiefluß durch die Oberfläche des nullten Leiters, in dem die elektromotorische Kraft wirkt. Das Magnetfeld in der Nähe der Oberfläche stimmt mit dem Feld eines unendlich langen geradlinigen Leiters, $H = 2I/c\,r$, überein. Der POYNTINGsche Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E}_0 \times \mathfrak{H}$$

($\mathfrak{E}_0$ ist die elektrische Feldstärke im nullten Leiter und ist dem Strom entgegengerichtet, s. Aufgabe 229) ist, wie man leicht sieht, längs der Flächennormalen aus dem Leiter heraus gerichtet. Der Energiefluß durch diesen Leiter ist folglich

$$2\pi r l_0 |\mathfrak{S}| = I V,$$

wobei $V = E_0 l_0$ die Potentialdifferenz an den Leiterenden ist. Das Produkt $I V$ ist gleich der Differenz zwischen der Arbeit der elektromotorischen Kraft $V^{(e)} I$ ($V^{(e)} = E^{(e)} l_0$) und den JOULEschen Verlusten je Zeiteinheit in der Quelle.

Die Energie IV fließt je Sekunde durch die äußere Oberfläche der Quelle in den die Leiter umgebenden Raum (hauptsächlich außerhalb der Leiter) und in den ersten und zweiten Leiter durch deren Oberflächen; in diesen Leitern wandeln sie sich in JOULEsche Wärme um. Betrachtet man wie oben den POYNTINGschen Vektor, so überzeugt man sich leicht davon, daß die Gesamtenergien, die je Sekunde in den ersten bzw. zweiten Leiter fließen, gleich IV_1 bzw. IV_2 sind.

231. Man erhält

$$R = \int_1^2 \frac{dl}{S\varkappa},$$

wobei das Element dl längs der Normalen zur Äquipotentialfläche mit dem Inhalt S gerichtet ist; die Zahlen *1* und *2* bezeichnen die Leiterrandflächen.

232.

a) $R = \frac{1}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right);$

b) $R = \frac{1}{4\pi\varkappa_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{4\pi\varkappa_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right);$

c) $R = \frac{1}{2\pi l\varkappa}\ln\frac{b}{a}.$

233.

$$R = \frac{1}{2\pi\varkappa_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2\pi\varkappa_1}\frac{1}{b}.$$

234.

$$I_k = \frac{4\pi\varkappa}{\varepsilon} q_k, \qquad R_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi\varkappa} s_{ik}.$$

235.

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi\varkappa R}.$$

236.

$$Q = \sum_{i,k} R_{ik} I_i I_k.$$

237.

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\varkappa}(s_{11} - 2s_{12} + s_{22}) = \frac{\varepsilon}{4\pi\varkappa}\frac{c_{11} + 2c_{12} + c_{22}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}.$$

238. Man erhält

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = R_1 + R_2 - \frac{1}{\pi\varkappa l} \approx R_1 + R_2,$$

wobei $R_1 = 1/2\pi\varkappa a_1$ und $R_2 = 1/2\pi\varkappa a_2$ die Widerstände der einzelnen Erdungen bedeuten (s. Aufgabe 233).

239. Wir bezeichnen die Exzentrizität der Rotationsellipsoide mit

$$e_0 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

(b/a ist das Verhältnis der kleinen zur großen Halbachse). Dann gilt

$$R = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{4}{3\pi^2 V}\right)^{1/3} \frac{(1-e_0^2)^{1/6}}{e_0} \arccos\sqrt{1-e_0^2}$$

im Falle eines abgeplatteten und

$$R = \frac{1}{\varkappa}\frac{(1-e_0^2)^{1/3}}{(6\pi^2 V)^{1/3} e_0} \ln\frac{1+e_0}{1-e_0}$$

im Falle eines gestreckten Rotationsellipsoids.

Am günstigsten (bei festem Volumen V) ist eine stark gestreckte oder eine stark abgeplattete Form der Erdung.

240. Die Stromdichte im Raum zwischen den Elektroden,

$$j = \varrho v, \tag{1}$$

hängt nicht von x ab [$v(x)$ bedeutet die Geschwindigkeit der Teilchen im Aufpunkt x]. Die Geschwindigkeit hängt mit dem Potential $\varphi(x)$ durch die Beziehung

$$v = \sqrt{-\frac{2e\varphi}{m}} \tag{2}$$

zusammen ($\varphi = 0$ für $x = 0$).

Aus (1) und (2) folgt $\varrho = j\sqrt{-m/2e\varphi}$, so daß die Poissonsche Gleichung die Form

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi j\sqrt{-\frac{m}{2e\varphi}} \tag{3}$$

annimmt.

Integriert man die Gleichung (3) mit den Grenzbedingungen

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=a} = \varphi_0,$$

so erhält man das „$^3/_2$-Gesetz“

$$j = \frac{1}{9\pi a^2}\sqrt{\frac{2|e|}{m}}\,|\varphi_0|^{3/2}.$$

241.

$$H_r = H_z = 0, \qquad H_\alpha = \begin{cases} \dfrac{2Ir}{c\,a^2} & \text{für} \quad r < a, \\ \dfrac{2I}{c\,r} & \text{für} \quad a \leqq r \leqq b, \\ 0 & \text{für} \quad r > b. \end{cases}$$

242. Wir geben die Lösung der Aufgabe mit der Methode des Vektorpotentials an. Legt man die z-Achse in die Zylinderachse, so genügen die kartesischen Komponenten von $\mathfrak{A}$ den Gleichungen

$$\varDelta A_x = 0, \qquad \varDelta A_y = 0, \qquad \varDelta A_z = -\frac{4\pi\,\mu_0}{c} j_z, \tag{1}$$

wobei $j_z = 0$ für $r > a$ und $j_z = I/\pi\,a^2$ für $r \leqq a$ ist.

Man kann die Komponenten A_x und A_y gleich Null setzen, da ihre Gleichungen den Strom I nicht enthalten. A_z hängt nur vom Abstand r von der z-Achse ab. Integriert man die Gleichung für A_z und benutzt die Stetigkeit von A_z und H_α an der Grenze $r = a$ und die Endlichkeit von H für $r = 0$, so erhält man

$$A_z = C - \frac{\mu_0 I}{c}\left(\frac{r}{a}\right)^2, \qquad B_\alpha = \frac{2\mu_0 I}{c\,a^2} r, \qquad H_\alpha = \frac{2I}{c\,a^2} r \tag{2}$$

für $r < a$ und

$$A_z = C - \frac{I}{c}\left(\mu_0 + 2\mu \ln\frac{r}{a}\right), \qquad B_\alpha = \frac{2\mu I}{c\,r}, \qquad H_\alpha = \frac{2I}{c\,r} \tag{2'}$$

für $r > a$. Die Integrationskonstante C ist willkürlich wählbar.

243. Man erhält

$$A_z = C_1, \qquad \mathfrak{B} = 0$$

für $r < a$,

$$A_z = \frac{2\mu_0 I\,a^2}{c(b^2 - a^2)}\left(\ln\frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2}\right) + C_2, \qquad B_\alpha = \frac{2\mu_0 I}{c(b^2 - a^2)}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

für $a \leqq r \leqq b$ und

$$A_z = \frac{2\mu I}{c}\ln\frac{b}{r} + C_3, \qquad B_\alpha = \frac{2\mu I}{c\,r}$$

für $r > b$.

Die übrigen Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind Null. Man kann zwei der Konstanten in A_z durch die dritte ausdrücken, indem man benutzt, daß das Vektorpotential an den Grenzen stetig sein muß.

244. Man erhält

$$H_x = \frac{2I}{c\,a}\left(\operatorname{arctan}\frac{a+2x}{2y} + \operatorname{arctan}\frac{a-2x}{2y}\right),$$

$$H_y = \frac{I}{c\,a}\ln\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}, \qquad H_z = 0.$$

Die y-Achse steht senkrecht auf dem Streifen und geht durch seine Mitte.

245. Die Platten stoßen sich mit der Kraft

$$f = \frac{4I^2}{c^2 a^2}\left(a\operatorname{arctan}\frac{a}{b} - \frac{1}{2}b\ln\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)$$

ab.

246. Es ergibt sich

$$A_z = \frac{2I}{c}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{I}{c}\ln\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2},$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{8I}{c}\frac{a\,x\,y}{r_1^2 r_2^2},$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{2I}{c}\left(\frac{a-x}{r_1^2} + \frac{a+x}{r_2^2}\right).$$

Die Koordinaten der stromführenden Leiter sind in der zu ihnen senkrechten Ebene gleich $(a, 0)$ für den Strom $+I$ und gleich $(-a, 0)$ für den Strom $-I$; r_1 und r_2 sind die Abstände zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $(-a, 0)$ und dem Aufpunkt.

247.

a) Zwischen den Ebenen ist $H = 4\pi\, i/c$ und im übrigen Raum $H = 0$;

b) Zwischen den Ebenen gilt $H = 0$ und im übrigen Raum $H = 4\pi\, i/c$.

In beiden Fällen ist das Magnetfeld senkrecht zum Strom und parallel zu den stromführenden Ebenen gerichtet.

248. Man erhält

$$H_y = \frac{2I\,d}{c(b^2 - a^2)}, \qquad H_x = H_z = 0.$$

Die y-Achse steht senkrecht auf der Ebene durch die Achsen der Zylinder.

249. In Zylinderkoordinaten, deren z-Achse senkrecht auf der Ringebene steht und durch den Ringmittelpunkt hindurchgeht, gilt

$$A_\alpha = \frac{2\mu I}{c}\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right], \qquad A_z = A_r = 0,$$

wobei $K(k)$ und $E(k)$ vollständige LEGENDREsche elliptische Integrale sind mit $k^2 = 4a\,r/[(a+r)^2+z^2]$.

Die Komponenten des Magnetfeldes sind

$$H_r = \frac{2I}{c}\,\frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[-K(k)+\frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}\,E(k)\right],$$

$$H_z = \frac{2I}{c}\,\frac{1}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[K(k)+\frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}\,E(k)\right], \qquad H_\alpha = 0.$$

Diese Ausdrücke gehen auf der Schraubenachse ($r = 0$) in

$$H_r = 0, \qquad H_z = \frac{2\pi a^2 I}{c(a^2+z^2)^{3/2}}$$

über.

250. Der Induktionsfluß ist für jeden Querschnitt der betrachteten Röhre gleich. Die Gleichung ihrer Oberfläche ist daher

$$N = \int\limits_S \mathfrak{B}\,d\mathfrak{S} = f(r,z) = \text{const},$$

wobei die Integrationsfläche S aus einem Kreis mit dem Radius r besteht, dessen Ebene senkrecht zur Symmetrieachse ist (der Kreismittelpunkt liegt auf der Symmetrieachse). Da A_α nicht von α abhängt, folgt mit Hilfe des STOKESschen Satzes

$$\int \mathfrak{B}\,d\mathfrak{S} = \oint \mathfrak{A}\,d\mathfrak{l} = 2\pi\, r A_\alpha(r,z) = \text{const}.$$

Die Schnittlinien dieser Flächen mit den Ebenen $\alpha = \text{const}$ stellen die gesuchten Linien der magnetischen Induktion dar.

251. Die Komponenten des Magnetfeldes sind

$$H_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\,H^{(2n)}(z)\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = H(z) - \frac{r^2}{4}H''(z) + \dots,$$

$$H_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,n!}\,H^{(2n-1)}(z)\left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1} = -\frac{r}{2}H'(z) + \dots,$$

$$H_\alpha = 0.$$

Das Vektorpotential wird mit Hilfe des STOKESschen Satzes und der Beziehung $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ durch die magnetische Feldstärke ausgedrückt:

$$A_\alpha(r,z) = \frac{1}{r}\int\limits_0^r H_z\, r\,dr = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\,H^{(2n)}(z)\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} = \frac{r}{2}H(r) - \dots$$

252. Man erhält

$$H_z = \frac{2\pi n I}{c}(\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2)$$

mit (s. Abb. 50)

$$\cos\Theta_1 = \frac{h - z}{\sqrt{a^2 + (h - z)^2}}, \qquad \cos\Theta_2 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

253. Wir lösen die Aufgabe mit der Methode des Vektorpotentials. Die Dichte des Oberflächenstroms, der bei der Rotation der Kugel entsteht, ist

$$\mathfrak{i} = \frac{e\,\omega}{4\pi\,a} \sin\vartheta\; \mathfrak{e}_\alpha$$

(die Polarachse ist in die Richtung des Vektors $\vec{\omega}$ gelegt). Das Vektorpotential genügt in allen Punkten, die nicht auf der Kugeloberfläche liegen, der LAPLACEschen Gleichung. Auf Grund der Symmetrie des Systems kann man es so wählen, daß nur die Komponente A_α, die nicht vom Winkel α abhängt, von Null verschieden ist. Die Gleichung für das Vektorpotential lautet daher

$$\Delta A_\alpha - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} A_\alpha = 0 \tag{1}$$

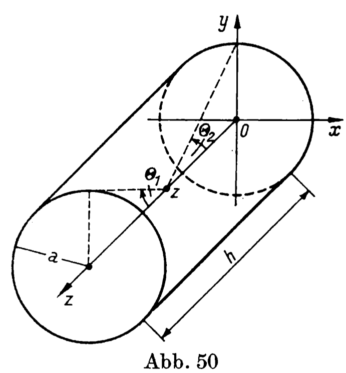


Abb. 50

(s. die Lösung der Aufgabe 47).

Da die Stromdichte wie $\sin\vartheta$ vom Winkel ϑ abhängt, setzt man die Lösung der Gleichung (1) in der Form

$$A_\alpha(r, \vartheta) = F(r)\sin\vartheta \tag{2}$$

an. Wie wir sehen werden, läßt sich dann $F(r)$ so wählen, daß die Gleichung und die Randbedingungen erfüllt sind. Wir bemerken noch, daß das Vektorpotential (2) der Bedingung

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$$

genügt, die notwendig ist, damit (1) gilt.

Bestimmt man $F(r)$ mit Hilfe der Gleichung (1) und der Randbedingungen, so erhält man A_α und $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$.

Die magnetische Feldstärke ist innerhalb der Kugel $(r < a)$

$$\mathfrak{H} = \frac{2e\vec{\omega}}{3c}$$

und für $r > a$

$$\mathfrak{H} = \frac{3\mathfrak{r}(\mathfrak{m}\,\mathfrak{r})}{r^5} - \frac{\mathfrak{m}}{r^3},$$

wobei $\mathfrak{m} = e\,a^2\vec{\omega}/3c$ das magnetische Moment des Systems bedeutet.

254. In den Punkten mit $j = 0$ kann man $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\psi$ setzen. Dann ist die Gleichung $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$ für alle ψ erfüllt, während die Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$

$$\Delta\,\psi = 0$$

liefert. Diese Gleichung muß unter der Zusatzbedingung

$$\int_l \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \frac{4\pi}{c} I$$

gelöst werden, wobei l eine beliebige geschlossene Kurve ist, die den Strom I umschließt. Wir führen Zylinderkoordinaten r, α, z ein und setzen die Lösung in der Form $\psi = \psi(\alpha)$ an.

Es ergibt sich

$$\psi = -\frac{2I}{c}\alpha, \qquad H_\alpha = \frac{2I}{cr}, \qquad H_r = H_z = 0.$$

255.

a) Damit das skalare Potential ψ des Magnetfeldes eine eindeutige Funktion ist, wählen wir eine Fläche S auf der stromführenden Leitung und nehmen an, daß ψ beim Durchgang durch sie den Sprung

$$\psi(2) - \psi(1) = \frac{4\pi}{c} I \tag{1}$$

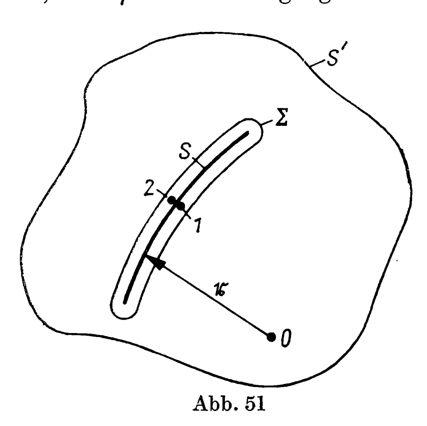


Abb. 51

erfährt. Die Punkte *1* und *2* liegen infinitesimal benachbart auf verschiedenen Seiten der Fläche, wobei die Richtung von *1* nach *2* mit der Stromrichtung ein Rechtssystem bildet (Abb. 51).

Die Lösung der LAPLACEschen Gleichung läßt sich in der Form

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS \tag{2}$$

schreiben (s. [77]). In (2) muß über die unendlich ferne geschlossene Fläche S' sowie über alle geschlossenen Flächen Σ_i in endlichem Abstand vom Koordinatenursprung, in denen ψ oder $\partial\psi/\partial n$ Sprünge aufweisen, integriert werden. Im betrachteten Fall ist das Integral über die unendlich ferne Fläche Null, da die Quelle des Feldes (die stromführende Leitung) endliche Abmessungen hat. Flächen, auf denen die Normalableitungen $\partial\psi/\partial n = -H_n$ Sprünge aufweisen, sind nicht vorhanden, da H_n stetig ist. Daher erstreckt sich das Integral in (2) nur über die eine Fläche Σ, die S umgibt.

Wir deformieren die Fläche Σ, bis sie mit S zusammenfällt. Da die Größen $1/r$, $\partial\psi/\partial n$ und $\partial(1/r)/\partial n$ auf S stetig sind, lautet Gleichung (2)

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int [\psi(1) - \psi(2)] \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{3}$$

wobei nun über die nicht geschlossene Fläche S zu integrieren ist.

Mit Hilfe der Gleichung (1) erhalten wir

$$\psi = \frac{I}{c} \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\frac{I}{c} \int \frac{\mathfrak{r}\, d\mathfrak{S}}{r^3}. \tag{4}$$

Das Integral $\int \mathfrak{r}\, d\mathfrak{S}/r^3$ stellt den Raumwinkel Ω dar, unter dem die stromführende Leitung vom Aufpunkt aus gesehen wird; daher kann man (4) auch in der Form

$$\psi = -\frac{I}{c}\,\Omega$$

schreiben. Das Vorzeichen von Ω ist positiv, wenn der Radiusvektor $\mathfrak{r}$, der vom Aufpunkt zu irgendeinem Punkt von S führt, mit der Stromrichtung in der Leitung ein Rechtssystem bildet.

b) Wir transformieren das Linienintegral in ein Integral über die von dem Stromkreis begrenzte Fläche. Mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe 55 erhalten wir dann

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{c} \int d\mathfrak{S} \times \vec{V}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{I}{c} \int \vec{V}_M\left(\frac{1}{r}\right) \times d\mathfrak{S},$$

wobei der Index M Differentiation nach den Koordinaten des Aufpunktes M bedeutet. Aus $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ ergibt sich

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{c} \int (d\mathfrak{S}\, \vec{V}_M)\, \vec{V}_M\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{I}{c}\, \vec{V}_M \int d\mathfrak{S}\, \vec{V}_M\left(\frac{1}{r}\right). \tag{5}$$

[Bei der Umformung benutzen wir die Gleichung $\Delta(1/r) = 0$; es wird angenommen, daß der Punkt $r = 0$ nicht auf der Integrationsfläche liegt.] Vergleicht man (5) mit der Beziehung $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi$, so erhält man

$$\psi = -\frac{I}{c} \int d\mathfrak{S}\, \vec{V}_M\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{I}{c} \int \frac{\mathfrak{r}\, d\mathfrak{S}}{r^3} = -\frac{I}{c}\,\Omega.$$

256. Man erhält

$$\mathfrak{F} = 0, \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H},$$

wobei

$$\mathfrak{m} = \frac{I}{c} \int \mathfrak{n}\, dS$$

das magnetische Moment des Stromkreises ist.

257. Es ergibt sich

$$U = \frac{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}{r^3} - \frac{3(\mathfrak{m}_1 \mathfrak{r})(\mathfrak{m}_2 \mathfrak{r})}{r^5},$$

$$\mathfrak{F}_2 = -\mathfrak{F}_1 = \frac{3}{r^5}\left[(\mathfrak{m}_1 \mathfrak{r})\, \mathfrak{m}_2 + (\mathfrak{m}_2 \mathfrak{r})\, \mathfrak{m}_1 + (\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2)\, \mathfrak{r}\right] - \frac{15}{r^7} (\mathfrak{m}_1 \mathfrak{r})(\mathfrak{m}_2 \mathfrak{r})\, \mathfrak{r},$$

wobei $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor vom ersten zum zweiten Strom ist und $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ die Kräfte bedeuten, die am ersten bzw. zweiten Strom angreifen; außerdem

erhält man

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{3(\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{r}}{r^5} + \frac{\mathfrak{m}_2 \times \mathfrak{m}_1}{r^3},$$

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{3(\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{m}_2 \times \mathfrak{r}}{r^5} + \frac{\mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2}{r^3},$$

wobei $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ das am ersten bzw. zweiten Strom angreifende Drehmoment bedeuten. Wir bemerken, daß $\mathfrak{N}_1 \neq -\mathfrak{N}_2$ ist; es gilt aber

$$\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_2 = 0.$$

Sind die magnetischen Momente parallel ($\mathfrak{m}_1 = m_1\,\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_2 = m_2\,\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r} = r\,\mathfrak{r}_0$; $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{r}_0$ sind Einheitsvektoren), so erhält man

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{3m_1\,m_2[2\,\mathfrak{n}\cos\vartheta - \mathfrak{r}_0(5\cos^2\vartheta - 1)]}{r^4},$$

wobei ϑ der Winkel zwischen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{r}_0$ ist.

259. Die Potentialfunktion des Stromes I_2 im Felde des Stromes I_1 ist

$$u_{21} = \frac{2I_1I_2}{c^2}\ln a + \text{const},$$

wobei a den Abstand zwischen den Strömen bedeutet.

Die Kraft, die je Längeneinheit des zweiten Stromes angreift, ist

$$f = -\frac{\partial u_{21}}{\partial a} = -\frac{2I_1I_2}{c^2\,a}.$$

Bei parallelen Strömen (gleiche Vorzeichen von I_1 und I_2) erfolgt Anziehung.

260. Die Kraft $\mathfrak{F}$ und das Drehmoment $\mathfrak{N}$ ergeben sich durch Differentiation der Potentialfunktion

$$U(r,\alpha) = -\frac{I_1I_2\,a}{c^2}\ln\frac{4r^2 + a^2 + 4a\,r\cos\alpha}{4r^2 + a^2 - 4a\,r\cos\alpha}.$$

261.

$$N = \frac{4I_1\,I_2a}{c}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

262.

$$L = \frac{1}{2}\mu_0 + 2\mu\ln\frac{b}{a}.$$

263.

$$L = 2\mu\ln\frac{b}{a}.$$

264.

$$L_{12} = 4\pi\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right),$$

$$F = \frac{I_1I_2}{c^2}\,\frac{\partial L_{21}}{\partial b} = \frac{4\pi I_1I_2}{c^2}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right).$$

265. Bei der Lösung dieser Aufgabe wendet man am besten die Gleichung (5.23) an. Berechnet man das Integral wie in Aufgabe 89, so erhält man

$$L_{12} = 4\pi \sqrt{a\,b} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$$

mit

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, \mathrm{d}\psi,$$

$$k^2 = \frac{4a\,b}{(a+b)^2 + l^2}.$$

Für $l \gg a, b$ ist der Parameter k klein:

$$k^2 \approx \frac{4a\,b}{l^2}, \qquad k \approx \frac{2\sqrt{a\,b}}{l} \ll 1;$$

daher kann man für E und K die Näherungsformeln

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{q}{64}k^4\right), \qquad E(k) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4\right)$$

benutzen (s. [72], 6.113 und 6.114). Berücksichtigt man im Ausdruck für L_{12} nur die Terme proportional k^3, so erhält man in der ersten nichtverschwindenden Näherung

$$L_{12} = \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{l^3}.$$

Dieses Ergebnis folgt auch leicht aus der Gleichung

$$L_{12} = \frac{c\,\Phi_{12}}{I_1},$$

wenn man den stromführenden Ring als magnetischen Dipol betrachtet.

266. Mit den Bezeichnungen der vorigen Aufgabe ergibt sich

$$F = \frac{4\pi I_1 I_2}{c^2} \frac{l}{\sqrt{(a+b)^2 + l^2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + b^2 + l^2}{(a+b)^2 + l^2} E(k) \right].$$

267. Man erhält $L = 4\pi\, n^2 S$. Für eine Spule mit großer, aber endlicher Länge h ergibt sich unter Vernachlässigung des Randeffektes die Gesamtinduktivität

$$L = 4\pi\, n^2 S\, h.$$

268. Wir berechnen die magnetische Energie mit Hilfe der Beziehung

$$W = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\mathfrak{i}_1\, \mathfrak{i}_2}{R}\, \mathrm{d}S_1\, \mathrm{d}S_2.$$

Dabei sind dS_1 und dS_2 Oberflächenelemente der Spule, R der Abstand zwischen ihnen, i ($i_1 = i_2 = i = nI$) die Dichte des Oberflächenstroms, durch den der in der Spulenwicklung fließende Strom ersetzt ist, und n die Windungszahl je Längeneinheit.

Es ist vorteilhaft, das Integral in Zylinderkoordinaten auszudrücken:

$$W = \frac{\pi n^2 a^2 I^2}{c^2} \int_0^h dz_1 \int_0^h dz_2 \oint \frac{\cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + 4a^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{2\pi^2 a^2 n^2 I^2 h \left(1 - \frac{8a}{3\pi h}\right)}{c^2}.$$

Dabei wurden alle Terme höherer als erster Ordnung in a/h vernachlässigt. Daraus folgt

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h \left(1 - \frac{8a}{3\pi h}\right).$$

Vernachlässigt man auch den Term mit a/h gegen 1, so erhält man das Ergebnis der vorigen Aufgabe:

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h = 4\pi n^2 S h.$$

269. Für den kreisförmigen Querschnitt wird

$$L = 4\pi N^2 \left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right).$$

Der Selbstinduktionskoeffizient $L_\infty = L/2\pi b$ für eine unendlich lange Spule ergibt sich durch den Grenzübergang $b \to \infty$ bei vorgegebener Windungszahl je Längeneinheit $n = N/2\pi b$:

$$L_\infty = 4\pi^2 n^2 a^2 = 4\pi n^2 S$$

(vgl. mit Aufgabe 267).

Für den rechteckförmigen Querschnitt ergibt sich

$$L = 2N^2 h \ln \frac{2b + a}{2b - a}.$$

Für $b \gg a$ wird wiederum $L_\infty = 4\pi n^2 S$.

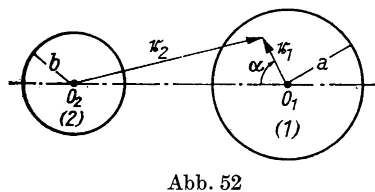


Abb. 52

270. Wir berechnen die magnetische Energie je Längeneinheit der Leitung nach Gleichung (5.16). Das Vektorpotential eines geradlinigen stromführenden Leiters wurde bei der Lösung der Aufgabe 242 bestimmt. Für die Leitung *1* (Abb. 52) schreiben wir es in der Form

$$\left.\begin{aligned} A_{1z} &= C - \frac{I r_1^2}{c a^2} && \text{für} \quad r_1 < a, \\ A_{1z} &= C - \frac{I}{c}\left(1 + 2\ln\frac{r_1}{a}\right) && \text{für} \quad r_1 > a. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Das Vektorpotential, das in der Leitung *2* hervorgerufen wird, ergibt sich aus (1) durch die Substitutionen $I \to -I$, $a \to b$, $r_1 \to r_2$.

Wir erhalten die magnetische Energie

$$W = \frac{I}{2\pi c a^2} \int\limits_{1} (A_{1z} + A_{2z}) \mathrm{d}S_1 - \frac{I}{2\pi c b^2} \int\limits_{2} (A_{1z} + A_{2z}) \mathrm{d}S_2. \qquad (2)$$

Man kann das in (2) vorkommende Integral berechnen, indem man die Formel 3.765 aus [72] benutzt. Berücksichtigt man den Zusammenhang zwischen dem Selbstinduktionskoeffizienten und der magnetischen Energie des Systems, so erhält man schließlich

$$L = 1 + 2 \ln \frac{h^2}{a b}.$$

271. Die magnetische Gesamtenergie des Stromes, der im Leiter fließt, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$W = W_1 + W_2. \qquad (1)$$

Dabei ist

$$W_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \int H_1^2 \,\mathrm{d}V$$

die innerhalb des Leiters vorhandene Energie (zu integrieren ist über das Leitervolumen) und

$$W_2 = \frac{\mu}{8\pi} \int H_2^2 \,\mathrm{d}V$$

die Energie im übrigen Raum.

Wir führen den Parameter r_0 ein, der die Dimension einer Länge habe und der Bedingung

$$a \ll r_0 \ll R \qquad (2)$$

genüge, wobei a den Leiterradius und R den Krümmungsradius der Achsenlinie des Leiters (der im allgemeinen ortsabhängig ist) bedeuten. Dann kann man annehmen, daß das Magnetfeld in Abständen kleiner als r_0 identisch mit dem Feld eines unendlich langen geradlinigen Leiters ist. Insbesondere gilt innerhalb des Leiters

$$H_1 = \frac{2 I r}{c a^2}$$

(s. Aufgabe 242). Damit erhält man die „innere“ Energie

$$W_1 = \frac{\mu_0 l I^2}{4 c^2}. \qquad (3)$$

Zur Bestimmung der „äußeren“ Energie W_2 konstruieren wir die Hilfsfläche S durch eine beliebige geschlossene Kurve auf der Leiteroberfläche und führen das skalare Potential ψ ein. ψ erfährt auf S den Sprung

$$\psi_+ - \psi_- = \frac{4\pi}{c} I. \qquad (4)$$

Das Integral für W_2 läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\int \mathfrak{B}\,\mathfrak{H}\,\mathrm{d}V = -\int \mathfrak{B}\,\mathrm{grad}\,\psi\,\mathrm{d}V = -\int \mathrm{div}(\psi\,\mathfrak{B})\,\mathrm{d}V = -\oint \psi B_n\,\mathrm{d}S$$

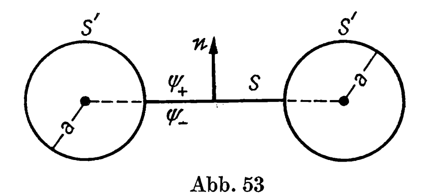


Abb. 53

(dabei wurde der Index 2 fortgelassen und die Beziehung $\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0$ benutzt). Das letzte Integral läuft über beide Seiten der Hilfsfläche S und die Leiteroberfläche S' (s. Abb. 53, wo der Leiterquerschnitt in irgendeiner Ebene dargestellt ist). Das Integral über die unendlich ferne Fläche wird wegen der endlichen Abmessungen des stromführenden Leiters gleich Null. Es gilt also

$$W_2 = -\frac{1}{8\pi}\int_{S'} \psi B_n\,\mathrm{d}S + \frac{1}{8\pi}\int_{S} \psi_+ B_n\,\mathrm{d}S - \frac{1}{8\pi}\int_{S} \psi_- B_n\,\mathrm{d}S. \tag{5}$$

Das erste Integral in (5) ist Null, da das Magnetfeld wegen (2) auf der Fläche S' mit dem Feld eines geradlinigen Leiters übereinstimmt und nur eine von Null verschiedene Tangentialkomponente hat. Zur Umformung der beiden anderen Integrale muß man die Gleichung (4) und die Bedingung, daß die Komponente B_n stetig sein muß, benutzen. Es ergibt sich

$$W_2 = \frac{I}{2c}\int_{S} B_n\,\mathrm{d}S. \tag{6}$$

In großen Abständen vom Leiter ($r > r_0$) hängt das Magnetfeld nicht von der Stromverteilung auf dem Leiterquerschnitt ab; man kann daher annehmen, daß der Strom entlang der Achse fließt. Bei kleinen Abständen ($a \leqq r < r_0$) ist das Magnetfeld gleich demjenigen eines unendlich langen Kreiszylinders, und man kann ebenfalls annehmen, daß der Strom entlang der Achse fließt. Das Integral in (6) bedeutet also den Induktionsfluß, der durch den längs der Leiterachse fließenden Strom erzeugt wird und durch die Fläche geht, die von der geschlossenen Kurve auf der Leiteroberfläche gebildet wird. Mit Hilfe von Gleichung (5.22) erhalten wir

$$W_2 = \frac{I^2}{2c^2}L'. \tag{7}$$

Mit den Beziehungen (1), (3), (7) und dem Zusammenhang zwischen dem Selbstinduktionskoeffizienten und der magnetischen Energie des Systems ergibt sich die gesuchte Beziehung für den Selbstinduktionskoeffizienten:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2} + L'. \tag{8}$$

272. Mit Hilfe des Ergebnisses der vorigen Aufgabe erhält man

$$L' = 4\pi\,\mu\,b\left(\ln\frac{8b}{a} - 2\right).$$

Dabei ist μ die Permeabilität des Mediums, in dem sich der Leiter befindet. Die Gesamtinduktivität ist

$$L = 4\pi\,b\left(\mu\ln\frac{8b}{a} - 2\mu + \frac{1}{4}\mu_0\right)$$

oder, falls $\mu_0 = \mu = 1$ ist,

$$L = 4\pi\,b\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{7}{4}\right).$$

273.

$$L_{12} = 2l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + 2a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l}.$$

274. Mit dem Ergebnis der Aufgabe 273 erhält man

$$L_{12} = 8\left[l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + \sqrt{2a^2 + l^2} + a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l} - \right.$$
$$\left. - a\ln\frac{a + \sqrt{2a^2 + l^2}}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right],$$

$$F = \frac{8I_1 I_2}{c^2}\left[\frac{a^2 + 2l^2}{l\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{l\sqrt{2a^2 + l^2}}{a^2 + l^2} - 1\right].$$

275.

$$L = 2\mu_0\,b + 8\mu\,b\left[\ln\frac{2b}{a(1 + \sqrt{2})} + \sqrt{2} - 2\right].$$

276. Benutzt man bei der Integration über die Winkel in (5.13) die Beziehung $\overline{n_i\,n_k} = \delta_{ik}/3$ (s. Aufgabe 32), so ergibt sich

$$\mathfrak{m} = \frac{e\,a^2}{5c}\vec{\omega}$$

im Falle einer homogenen räumlichen Verteilung der Ladung und

$$\mathfrak{m} = \frac{e\,a^2}{3c}\vec{\omega}$$

im Falle einer homogenen Ladungsverteilung auf der Oberfläche.

Wendet man diese Formeln auf eine Kugel mit dem klassischen Elektronenradius ($2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm) an, deren magnetisches Moment gleich dem experimentell bekannten Moment des Elektrons ($0{,}9 \cdot 10^{-20}$ erg/Gauß) ist, so ergibt sich, daß die Geschwindigkeit $v = a\,\omega \approx 10^{13}$ cm/s auf dem Äquator eines solchen „Elektrons“ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum übersteigt.

Das zeigt die Unzulässigkeit klassischer Vorstellungen bei der Beschreibung des Elektronenspins. Näheres zu dieser Frage findet man in [27] und [2].

278. Das sekundäre Feld $\mathfrak{H}'$ genügt der Gleichung $\operatorname{rot}\mathfrak{H}' = 0$, ist also ein Potentialfeld. Führt man mit Hilfe der Gleichung $\mathfrak{H}' = -\operatorname{grad}\psi$ das skalare Potential ein, so erhält man eine Beziehung, die mit der elektrostatischen Gleichung im inhomogenen Medium übereinstimmt:

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}\psi) = -4\pi\,\varrho_m.$$

Dabei spielt die Größe $\varrho_m = -\,\mathfrak{H}_0 \operatorname{grad}\mu/4\pi$ die Rolle einer Dichte der magnetischen Ladungen.

An der Grenze zweier Medien müssen die Tangentialkomponenten des Feldes den Bedingungen

$$H'_{1t} = H'_{2t} \quad \text{oder} \quad (\vec{\nabla}\psi_1)_t = (\vec{\nabla}\psi_2)_t$$

und die Normalkomponenten den Bedingungen

$$\mu_2 H'_{2n} - \mu_1 H'_{1n} = (\mu_1 - \mu_2)\,H_{0n} \quad \text{oder} \quad \mu_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = 4\pi\,\sigma_m$$

genügen. Dabei spielt die Größe $\sigma_m = (\mu_1 - \mu_2)\,H_{0n}/4\pi$ die Rolle einer Flächenladungsdichte. Wir bemerken, daß dieser Ausdruck für σ_m auch durch Grenzübergang aus der Gleichung für die Raumladungsdichte ϱ_m folgt:

$$\sigma_m = \lim_{h\to 0} \varrho_m\, h.$$

Wir ersetzen die Trennfläche durch eine dünne Schicht der Dicke h. Dann ist $\operatorname{grad}\mu$ senkrecht zur Schicht gerichtet und gleich $(\mu_2 - \mu_1)/h$, so daß

$$\varrho_m = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mu_2 - \mu_1}{h}\,H_{0n}, \qquad \sigma_m = \lim_{h\to 0} \varrho_m h = \frac{1}{4\pi}\,(\mu_1 - \mu_2)\,H_{0n}$$

wird.

279. Man erhält

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\,\mathfrak{H}_0, \qquad \mathfrak{H}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\,\mathfrak{H}_0.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{H}_0$ das Feld, das von dem Stromkreis im Vakuum hervorgerufen wird, und $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ die Felder in den Medien mit den Permeabilitäten μ_1, μ_2.

280. Das Magnetfeld im Medium *1* stimmt mit dem Feld überein, das im Vakuum durch die beiden geradlinigen Ströme

$$I_1 = \mu I, \qquad I_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2}\,I$$

erzeugt wird. Der Strom I_1 fließt in demselben Leiter wie der Anfangsstrom I, der Strom I_2 dagegen in einem Leiter, der das Spiegelbild des ersten Leiters in bezug auf die Trennebene der Leiter darstellt.

Das Magnetfeld im Medium *2* stimmt mit dem Feld überein, das von dem Strom

$$I_1 = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I,$$

der in demselben Leiter wie der Anfangsstrom I fließt, im Vakuum erzeugt wird.

281. Die Feldvektoren genügen im ganzen Raum den homogenen Gleichungen $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$, so daß man das skalare Potential ψ ($\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi$) einführen kann, das der LAPLACEschen Gleichung genügt. Dabei wird das magnetostatische Problem in ein elektrostatisches übergeführt. Die Lösung lautet (s. Aufgabe 149)

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{3}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0$$

innerhalb der Kugel und

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_D$$

außerhalb der Kugel, wobei $\mathfrak{H}_D$ das von einem magnetischen Dipol mit dem Moment

$$\mathfrak{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathfrak{H}_0$$

erzeugte Feld bedeutet. Da das Feld innerhalb der Kugel homogen ist, ist die Magnetisierung konstant:

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{m}}{\frac{4\pi}{3} a^3} = \frac{3(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} \mathfrak{H}_0.$$

Die Dichte des äquivalenten Volumenstroms ist daher gleich Null:

$$\mathfrak{j}_{\mathrm{Mol}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{M} = 0.$$

Die Dichte des Oberflächenstroms kann mit Hilfe der Gleichung

$$\mathfrak{i}_{\mathrm{Mol}} = c\, \mathfrak{n} \times (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1)$$

bestimmt werden, die sich aus (5.3) durch Grenzübergang ergibt (vgl. mit der Ableitung der Grenzbedingung für $\mathfrak{H}_t$ aus den MAXWELLschen Gleichungen). Setzt man $\mathfrak{M}_2 = 0$ und $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$, so erhält man

$$\mathfrak{i}_{\mathrm{Mol}} = \frac{3c(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} H_0 \sin\vartheta\, \mathfrak{e}_\alpha.$$

Interessant ist, daß man diesen Oberflächenstrom auch erhält, wenn man eine Kugel, deren Oberfläche gleichmäßig aufgeladen ist, um einen ihrer Durchmesser in Drehung versetzt (s. Aufgabe 253).

282. Legt man die Koordinatenachsen in die Hauptachsenrichtungen des Permeabilitätstensors, so sind die Feldkomponenten innerhalb der Kugel gleich

$$\frac{3}{\mu^{(k)} + 2} \mathfrak{H}_{0k},$$

wobei $\mathfrak{H}_0$ das äußere Feld bedeutet. Außerhalb der Kugel gilt

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_D,$$

wobei $\mathfrak{H}_D$ das Feld eines magnetischen Dipols mit dem Moment $\mathfrak{m}$ mit

$$m_k = \frac{\mu^{(k)} - 1}{\mu^{(k)} + 2} a^3 H_{0k}$$

bedeutet.

Das an der Kugel angreifende Drehmoment ist

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}_0.$$

283. Man erhält

$$H = \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}\right] H_0.$$

Für $\mu_1 \gg \mu_2$ wird das Feld im Hohlraum stark abgeschwächt; es erfolgt eine magnetische Abschirmung.

284. Es ergibt sich

$$H = \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3}{\frac{(\mu_1 + 2\mu_2)(2\mu_1 + \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2)^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^3}\right] H_0.$$

Für $\mu_1 \gg \mu_2$ wird das Feld stark abgeschwächt ($H \ll H_0$).

285. Das Magnetfeld ist

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

mit

$$A_z = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} r^2 + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} B_0 r \sin\alpha \qquad \text{für} \quad r < a,$$

$$A_z = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln\frac{a}{r} + \left(1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r^2}\right) B_0 r \sin\alpha \quad \text{für} \quad r > a.$$

Die z-Achse liegt in der Zylinderachse; die übrigen Komponenten von A sind Null.

288.

$$f = \frac{2I^2 a^2(\mu - 1)}{c^2 b(b^2 - a^2)(\mu + 1)}.$$

289.

$$f = \frac{2I^2 b(\mu - 1)}{c^2(a^2 - b^2)(\mu + 1)}.$$

290. Es ergibt sich

$$\mathfrak{H}_i = \frac{1}{\mu_i} \frac{2\pi \mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_1 \mu_2 \alpha_3 + \mu_2 \mu_3 \alpha_1 + \mu_1 \mu_3 \alpha_2} \mathfrak{H}_0,$$

wobei $\mathfrak{H}_0$ das Feld ist, das derselbe Strom im Vakuum hervorruft.

291. Im Außengebiet hängen die Induktion $\mathfrak{B}$ und das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ durch die übliche Beziehung $\mathfrak{B}_2 = \mu_2 \mathfrak{H}_2$ miteinander zusammen. Innerhalb der Kugel gilt wegen (5.27) $\mathfrak{B}_1 = \mu_1 \mathfrak{H}_1 + 4\pi \mathfrak{M}_0$, wobei $\mathfrak{M}_0$ die konstante Magnetisierung bedeutet. Führt man wie in Aufgabe 281 das skalare Potential ein, so erhält man

$$\psi_1 = -\mathfrak{H}_1 \mathfrak{r}, \qquad \psi_2 = \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{r}}{r^3}$$

mit

$$\mathfrak{H}_1 = -\frac{4\pi \mathfrak{M}_0}{2\mu_2 + \mu_1}, \qquad \mathfrak{m} = \frac{4\pi a^3 \mathfrak{M}_0}{2\mu_2 + \mu_1}.$$

Das Feld ist also innerhalb der Kugel homogen und stimmt außerhalb der Kugel mit demjenigen eines magnetischen Dipols mit dem Moment $\mathfrak{m}$ überein.

292. Das Feld innerhalb des Zylinders ist

$$\mathfrak{H}_1 = -\frac{4\pi \mathfrak{M}_0}{\mu_2 + \mu_1}$$

und außerhalb des Zylinders

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{2\mathfrak{r}(\mathfrak{m}\,\mathfrak{r})}{r^4} - \frac{\mathfrak{m}}{r^2},$$

wobei $\mathfrak{M}_0$ die permanente Magnetisierung bedeutet und $\mathfrak{m} = 4\pi a^2 \mathfrak{M}_0/(\mu_2 + \mu_1)$ ist.

293. Das Feld innerhalb der Kugel ist

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{3}{\mu + 2}\mathfrak{H}_0 - \frac{4\pi \mathfrak{M}_0}{\mu + 2};$$

außerhalb der Kugel erhält man

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_0 + \frac{3\mathfrak{r}(\mathfrak{m}\,\mathfrak{r})}{r^5} - \frac{\mathfrak{m}}{r^3} \tag{1}$$

mit

$$\mathfrak{m} = \frac{4\pi a^3 \mathfrak{M}_0}{\mu + 2} + \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathfrak{H}_0.$$

Wegen der Homogenität des äußeren Feldes ist die an der Kugel angreifende resultierende Kraft Null. Sind jedoch die Richtungen von $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ verschieden, so greift an der Kugel ein Drehmoment an, das man mit Hilfe des Spannungstensors des magnetischen Feldes berechnen kann. Das Drehmoment, das an einem permanenten Magneten angreift, ergibt sich aus der Beziehung

$$N_i = \oint\limits_S e_{ikl}\, x_k T_{lm}\, \mathrm{d}S_m, \tag{2}$$

wobei T_{lm} den Spannungstensor (5.26) und e_{ikl} den antisymmetrischen Einheitstensor bedeuten. Integriert wird über die äußere Oberfläche des Magneten.

Wenn man (5.26) in (2) einsetzt und zur Vektorschreibweise übergeht, erhält man

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi} \oint [\mathfrak{r} \times \mathfrak{H}_2] (\mathfrak{H}_2 \, d\mathfrak{S}) - \frac{1}{8\pi} \oint H_2^2 \, \mathfrak{r} \times d\mathfrak{S}. \tag{3}$$

Da der Koordinatenursprung mit dem Kugelmittelpunkt übereinstimmt, haben $\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{S}$ die gleiche Richtung, und das zweite Integral in (3) ist Null. Zur Berechnung des ersten Integrals setzen wir $d\mathfrak{S} = \mathfrak{n} \, dS = \mathfrak{n} \, a^2 \, d\Omega$, $\mathfrak{r} = a \, \mathfrak{n}$ und setzen $\mathfrak{H}_2$ aus (1) ein. Es wird

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi} \int [a^3 \, \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{m} \times \mathfrak{n}] \left(\mathfrak{H}_0 \, \mathfrak{n} + \frac{2}{a^3} \, \mathfrak{m} \, \mathfrak{n} \right) d\Omega \tag{4}$$

oder in der Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} N_i = {} & a^3 \, e_{ikl} \, H_{0l} H_{0m} \, \overline{n_k n_m} + 2 e_{ikl} \, H_{0l} \, m_s \, \overline{n_k n_s} + \\ & + e_{ikl} \, m_k H_{0m} \, \overline{n_l n_m} + \frac{2}{a^3} \, e_{ikl} \, m_k \, m_s \, \overline{n_l n_s}. \end{aligned} \tag{5}$$

Wegen der Beziehung $\overline{n_k n_m} = {}^1/_3 \delta_{km}$ (s. Aufgabe 32) ergibt sich, daß zwei der vier Terme auf der rechten Seite der Gleichung (5) verschwinden und die übrigen die Beziehung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}_0 \tag{6}$$

liefern; drückt man noch $\mathfrak{m}$ durch die permanente Magnetisierung aus, so folgt

$$\mathfrak{N} = \frac{4\pi \, a^3}{\mu + 2} \, \mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{H}_0. \tag{7}$$

Wie man dieser Beziehung entnimmt, liefert der induzierte Teil des magnetischen Momentes $a^3 \, \mathfrak{H}_0 (\mu - 1)/(\mu + 2)$ keinen Beitrag zum resultierenden Drehmoment.

294. Es ergibt sich

$$F = \frac{3}{16} \, \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \, \frac{m^2 (1 + \cos^2 \Theta)}{a^4},$$

$$N = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \, \frac{m^2 \sin \Theta \cos \Theta}{8 \, a^3},$$

wobei a den Abstand zwischen dem Magneten und der Ebene und Θ den Winkel zwischen $\mathfrak{m}$ und der Normalen an die Ebene bedeuten. Für $\mu \gg 1$ (weiches Eisen im schwachen Magnetfeld) erhalten wir dasselbe Ergebnis wie im Falle des elektrischen Dipols in der Nähe einer Metallebene (s. Aufgabe 148).

295. Man findet die gesuchten Größen, indem man in der Lösung von Aufgabe 201 die elektrischen durch die entsprechenden magnetischen Größen ersetzt. Insbesondere ergibt sich das innere Magnetfeld $\mathfrak{H}_1$ im Ellipsoid bei beliebiger Wahl der Koordinatenachsen in der Form

$$H_{1k} = H_{0k} - 4\pi N_{kl} M_l,$$

wobei $\mathfrak{M}$ den Magnetisierungsvektor und N_{kl} die Entmagnetisierungsfaktoren bedeuten (die von der Form abhängigen Komponenten des Entmagnetisierungstensors). Die Hauptwerte dieses Tensors wurden in der Aufgabe 197 mit $n^{(i)}$ bezeichnet und Depolarisationskoeffizienten genannt.

296. Die in der Lösung der vorigen Aufgabe angegebene Gleichung bleibt auch im Falle eines anisotropen Magnetikums richtig. Eine weitere Beziehung, die $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}_1$ miteinander verknüpft, ist

$$H_{1k} + 4\pi\, M_k = \mu_{kl} H_{1l}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen erhalten wir

$$H_{0k} = b_{km} H_{1m}$$

mit $b_{km} = \delta_{km} - N_{km} + N_{kl}\,\mu_{lm}$. Daraus folgt

$$H_{1k} = b_{km}^{-1} H_{0m},$$

wobei b_{km}^{-1} die Komponenten des inversen Tensors sind, die sich mit Hilfe der Beziehungen in der Lösung zur Aufgabe 11 ergeben.

Wir betrachten noch einen Spezialfall. Legt man die Koordinatenachsen in die Hauptachsenrichtungen des Ellipsoids, so hat der Tensor μ_{ik} Diagonalform:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu^{(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{(z)} \end{pmatrix}.$$

Der Tensor b_{ik} hat dann ebenfalls Diagonalform, und auch der inverse Tensor b_{ik}^{-1} ist diagonal:

$$b_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} [1 + N^{(x)}(\mu^{(x)} - 1)]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [1 + N^{(y)}(\mu^{(y)} - 1)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [1 + N^{(z)}(\mu^{(z)} - 1)]^{-1} \end{pmatrix}.$$

6. ELEKTRISCHE UND MAGNETISCHE EIGENSCHAFTEN DER MATERIE

6.1. Polarisation im statischen Feld

297. Man erhält
$$\beta = \frac{3}{4} a_0^3.$$

Ist die Ladung des Elektrons gleichförmig in einer Kugel mit dem Radius a_0 verteilt, so folgt $\beta = a_0^3$.[1])

299. Wegen der Symmetrie des Moleküls stimmt eine Hauptachse des Polarisierbarkeitstensors mit der Molekülachse überein, während die beiden anderen Hauptachsen in der senkrecht auf der Molekülachse stehenden Ebene beliebig gewählt werden können. Von den drei Hauptwerten des Polarisierbarkeitstensors sind daher nur zwei voneinander verschieden: $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)} = \beta^{(3)}$. Zu ihrer Bestimmung muß man folgende Fälle unterscheiden:

a) Das äußere Feld habe die Richtung der Molekülachse. Das induzierte Dipolmoment jedes Atoms hat dann die Richtung des äußeren Feldes. Bezeichnet man die Momente mit $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$, so erhält man zu ihrer Bestimmung die beiden Gleichungen
$$\mathfrak{p}' = \beta'(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}'), \qquad \mathfrak{p}'' = \beta''(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}''). \tag{1}$$
Dabei bedeuten $\mathfrak{E}$ das äußere Feld und $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ die Zusatzfelder, die im Zentrum jedes Atoms durch die Anwesenheit des anderen Atoms hervorgerufen werden. Man kann die Felder $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ durch die Dipolmomente der entsprechenden Atome ausdrücken, indem man die Gleichung für die Feldstärke benutzt, die durch einen Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}$ hervorgerufen wird, und berücksichtigt, daß alle Vektoren die Richtung der Molekülachse haben. Bestimmt man damit p' und p'' aus (1), so findet man mit Hilfe der Beziehung $p = p' + p'' = \beta^{(1)} E$
$$\beta^{(1)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\beta'} - \dfrac{2(a^3 + 2\beta')}{a^3(a^3 + 2\beta'')}} + \frac{1}{\dfrac{1}{\beta''} - \dfrac{2(a^3 + 2\beta'')}{a^3(a^3 + 2\beta')}}.$$

b) Das äußere Feld stehe senkrecht auf der Molekülachse. Man erhält analog wie im Fall *a*)
$$\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\beta'} + \dfrac{a^3 - \beta'}{a^3(a^3 - \beta'')}} + \frac{1}{\dfrac{1}{\beta''} + \dfrac{a^3 - \beta''}{a^3(a^3 - \beta')}}.$$

---

[1]) Das in dieser Aufgabe betrachtete Modell ist sehr grob und gestattet nur eine größenordnungsmäßige Abschätzung. Die exakte quantenmechanische Rechnung ergibt für das Wasserstoffatom $\beta = {}^9/_2 a_0^3$.

Für $\beta' = \beta''$ vereinfachen sich die Ausdrücke für $\beta^{(1)}$ und $\beta^{(2)}$ zu

$$\beta^{(1)} = \frac{2\beta'}{1 - \dfrac{2\beta'}{a^3}}, \qquad \beta^{(2)} = \frac{2\beta'}{1 + \dfrac{\beta'}{a^3}}.$$

Die mittlere Polarisierbarkeit ist

$$\bar{\beta} = \frac{1}{3}(\beta^{(1)} + 2\beta^{(2)}) = \frac{2}{3}\beta'\left(\frac{1}{1 - \dfrac{2\beta'}{a^3}} + \frac{2}{1 + \dfrac{\beta'}{a^3}}\right).$$

301.

a) Das Dielektrikum wird insgesamt anisotrop sein. Sein Polarisierbarkeitstensor hat die Hauptwerte [vgl. (6.4′)]

$$\alpha^{(i)} = \frac{N\beta^{(i)}}{1 - \dfrac{4\pi}{3} N \beta^{(i)}}.$$

b) Im Falle ungeordneter Molekülorientierungen gibt es im Dielektrikum außer der Richtung des äußeren Feldes in makroskopischen Volumina keine weiteren physikalisch ausgezeichneten Richtungen. Daher wird das mittlere Dipolmoment $\bar{\mathfrak{p}}$ des Moleküls dem Feld $\mathfrak{F}$, das auf das Molekül wirkt, proportional sein:

$$\bar{\mathfrak{p}} = \beta\,\mathfrak{F}.$$

Andererseits gilt offenbar

$$\bar{p}_i = \overline{\beta_{ik} F_k} = \bar{\beta}_{ik} F_k,$$

wobei über ein makroskopisch kleines Volumen gemittelt wird. Durch Vergleich der beiden Gleichungen folgt

$$\beta = \bar{\beta}_{11} = \bar{\beta}_{22} = \bar{\beta}_{33}, \qquad \bar{\beta}_{ik} = 0 \quad (\text{für } i \neq k).$$

Es ist also

$$\beta = \frac{1}{3}\overline{(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33})}.$$

Die Summe aus den Diagonalelementen des Tensors ist jedoch invariant und gleich der Summe $\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}$ der Hauptwerte (s. Aufgabe 9). Daher gilt

$$\beta = \frac{1}{3}(\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}).$$

Die dielektrische Suszeptibilität α des Dielektrikums hängt mit β durch die übliche Beziehung (6.4′) zusammen.

302. Bildet die Molekülachse mit der Richtung des äußeren Feldes $\mathfrak{E}_0$ den Winkel Θ, so ist die Energie des Moleküls

$$W = -\frac{1}{2}\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}_0 = -\frac{1}{2}(\beta_1 \cos^2\Theta + \beta_2 \sin^2\Theta) E_0^2.$$

Die Zahl der Teilchen je Volumeneinheit, deren Achsen mit $\mathfrak{E}_0$ den Winkel Θ bilden, ist durch die BOLTZMANNsche Formel (6.6) gegeben. In der Normierungsbedingung (6.7) muß N die Bedeutung einer Teilchenzahl je Volumeneinheit haben. Der Polarisationsvektor wird durch die Gleichung $\mathfrak{P} = N\overline{\mathfrak{p}}$ bestimmt, wobei $\overline{\mathfrak{p}}$ das bezüglich der BOLTZMANN-Verteilung gemittelte Dipolmoment eines Moleküls ist. Da die Moleküle bei Abwesenheit eines Feldes völlig ungeordnet verteilt sind, hat $\overline{\mathfrak{p}}$ die Richtung des äußeren Feldes.

Infolgedessen berechnen wir $\overline{p}$ mit Hilfe der Gleichung

$$\overline{p} = \frac{1}{N}\int p_{\|}\,\mathrm{d}N = \frac{E_0\int\limits_0^\pi \exp\left(-\frac{W(\Theta)}{kT}\right)(\beta_1\cos^2\Theta + \beta_2\sin^2\Theta)\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta}{\int\limits_0^\pi \exp\left(-\frac{W(\Theta)}{kT}\right)\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta},$$

wobei $p_{\|}$ die dem Feld parallele Komponente des Dipolmomentes des Moleküls bezeichnet. Da das Feld in der Aufgabenstellung als schwach vorausgesetzt wurde, genügt es, nur die Terme zu berücksichtigen, die in

$$a = \frac{(\beta_1 - \beta_2)\,E_0^2}{2kT} \ll 1$$

linear sind. Benutzt man ferner die Gleichung $P = N\overline{p} = \alpha E_0$, so erhält man schließlich

$$\alpha = N\beta_2 + \frac{1}{3}N(\beta_1 - \beta_2)\left[1 + \frac{2}{15}\,\frac{(\beta_1-\beta_2)\,E_0^2}{kT}\right].$$

Diese Beziehung zeigt, daß sich eine nichtlineare Abhängigkeit zwischen P und E_0 ergibt, da α von E_0 abhängig ist. Schätzt man den Korrektionsterm bei gewöhnlichen Temperaturen ($T = 300\,°\mathrm{K}$) ab, so findet man unter der Annahme, daß $\beta_1 - \beta_2$ von der Größenordnung $10^{-24}\,\mathrm{cm}^3$ ist, den Wert $kT/(\beta_1 - \beta_2) \approx 10^6$. Dieser Term ist also für $E_0 \ll 10^3\,\mathrm{V/cm}$ klein. Vernachlässigt man den Korrektionsterm, so erhält man für α den oben berechneten Ausdruck

$$\alpha = \frac{1}{3}N(\beta_1 + 2\beta_2)$$

(s. Aufgabe 301).

305. Das zusätzliche Potential, das durch die Quadrupolpolarisation des Dielektrikums hervorgerufen wird, ist

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i\,\partial x_k}\,Q_{ik}\,\mathrm{d}V, \tag{1}$$

wobei R den Abstand zwischen Aufpunkt und Volumenelement $\mathrm{d}V$ bedeutet und über das Volumen des Dielektrikums integriert wird. Andererseits ist das

Potential der räumlichen und Oberflächenladungen im allgemeinen

$$\varphi = \int \frac{\varrho'}{R} \mathrm{d}V + \int \frac{\sigma'}{R} \mathrm{d}S + \int \vec{\tau}' \vec{V} \left(\frac{1}{R}\right) \mathrm{d}S, \tag{2}$$

wobei ϱ' die Raumladungsdichte, σ' die Flächenladungsdichte und $\vec{\tau}'$ das Moment der Doppelschicht bedeuten. Bringt man (1) in die Form (2), so erhält man

$$\varrho' = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \sigma' = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{in}}{\partial x_i}, \quad \tau_k' = \frac{1}{2} Q_{ki} n_i. \tag{3}$$

Die Quadrupolpolarisation ist also der Raumladungsdichte ϱ' innerhalb des Dielektrikums, der Flächenladungsdichte σ' und der elektrischen Doppelschicht mit dem Moment $\vec{\tau}'$ auf der Oberfläche des Dielektrikums äquivalent. Da die Raum- und Flächenladungsdichte im Dielektrikum mit dem Polarisationsvektor durch die Beziehungen $\varrho' = -\operatorname{div} \mathfrak{P}'$ und $\sigma' = P_n'$ zusammenhängen, ergibt sich aus (3), daß die Quadrupolpolarisation der zusätzlichen Dipolpolarisation

$$P_k' = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_i}$$

und der Doppelschicht mit dem Moment $\vec{\tau}_k'$ äquivalent ist.

Man kann die Gleichung (3) auch erhalten, indem man die Energie des Dielektrikums betrachtet, die durch die Quadrupolpolarisation hervorgerufen wird.

306. Man erhält

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \left[1 + 3x + 3\left(1 + \frac{2}{3}x + x^2\right)^{1/2}\right]$$

mit $x = 4\pi N \beta$. Die Polarisierbarkeit β ist für polare Stoffe in schwachen Feldern durch die Beziehung

$$\beta = \frac{p^2}{3kT}$$

gegeben, wobei p das Dipolmoment des Moleküls, k die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur bedeuten.

Für $x \ll 1$, wo der Unterschied zwischen dem Feld, das das Molekül beeinflußt, und dem mittleren Feld sehr klein wird, ergibt sich

$$\varepsilon = 1 + x = 1 + 4\pi N \beta.$$

307. Die gesamte magnetische Suszeptibilität ist gleich der Summe aus der paramagnetischen und der diamagnetischen Suszeptibilität (s. [84]):

$$\chi = \frac{N \mathfrak{m}_0^2}{3kT} - \frac{N e^2}{6 m c^2} \overline{r^2}. \tag{1}$$

Das in (1) vorkommende magnetische Moment $\mathfrak{m}_0$ eines Rotators kann folgendermaßen berechnet werden. Nach einem bekannten Satz gilt

$$|\mathfrak{m}_0| = \frac{e}{2m\,c} L, \tag{2}$$

wobei L der Drehimpuls des Teilchens ist. Im Falle des Rotators hängt L mit der kinetischen Energie durch die Beziehung

$$W_k = \frac{L^2}{2m\,a^2} \tag{3}$$

zusammen. Daher ist der statistische Mittelwert $\overline{L^2}$ mit der mittleren kinetischen Energie durch

$$\overline{L^2} = 2m\,a^2\,\overline{W}_k \tag{4}$$

verknüpft.

Die mittlere kinetische Energie $\overline{W}_k$ kann mit Hilfe des Gleichverteilungssatzes der Energie bestimmt werden. Da der Rotator zwei Freiheitsgrade besitzt, gilt $\overline{W}_k = kT$. Setzt man (4) und (2) in (1) ein, so erhält man $\chi = 0$. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Satz, daß das magnetische Gesamtmoment eines Körpers, der der klassischen Statistik gehorcht, Null ist. Ein von Null verschiedenes magnetisches Moment ergibt sich nur dann, wenn eine Annahme über die Existenz diskreter Elektronenbahnen in den Atomen gemacht wird. Eine solche Annahme geht jedoch über den Rahmen der klassischen Theorie hinaus.[1])

308. Die Konzentration der Ionen (N) und der Elektronen (n) wird durch die BOLTZMANNsche Formel (6.6) bestimmt:

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-Ze\varphi/kT}, \qquad n = n_0\,\mathrm{e}^{e\varphi/kT}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet $\varphi(x, y, z)$ das elektrostatische Potential. Die Faktoren vor den Exponentialfunktionen sind so gewählt, daß N und n für $T \to \infty$, wo die Wechselwirkung zwischen den Teilchen unbedeutend wird, die Werte N_0 und n_0 annehmen. Gemäß (1) schreiben wir die Ladungsdichte in der Form

$$\varrho = Z\,eN - e\,n = e(ZN_0\,\mathrm{e}^{-Ze\varphi/kT} - n_0\,\mathrm{e}^{e\varphi/kT}). \tag{2}$$

Das Potential φ ergibt sich aus der POISSONschen Gleichung

$$\Delta\varphi = -4\pi\,\varrho = -4\pi\,e(ZN_0\,\mathrm{e}^{-Ze\varphi/kT} - n_0\,\mathrm{e}^{e\varphi/kT}). \tag{3}$$

Bei der Lösung dieser Gleichung benutzen wir, daß die Wechselwirkungsenergie klein gegen die thermische Energie ist:

$$\left|\frac{Z\,e\,\varphi}{kT}\right| \ll 1, \qquad \left|\frac{e\,\varphi}{k\,T}\right| \ll 1.$$

---

[1]) Näheres hierzu findet man z.B. in der „Einführung in die statistische Physik“ von B.G. LEWITSCH, Moskau 1954, S. 410.

Entwickeln wir die Exponentialfunktionen in Reihen, wobei nur die in φ linearen Terme berücksichtigt werden, und benutzen die Bedingung $Z N_0 = n_0$ für die elektrische Neutralität des Gases, so erhalten wir

$$\varrho = -\frac{\varkappa^2}{4\pi}\varphi, \quad \varkappa^2 = \frac{4\pi\, e^2 (Z^2 N_0 + n_0)}{k\, T}. \tag{4}$$

Damit können wir die Gleichung (3) in der Form

$$\Delta\varphi = \varkappa^2 \varphi \tag{5}$$

schreiben. φ kann nur vom Abstand r des betrachteten Ions abhängen. Die kugelsymmetrische Lösung der Gleichung (5) lautet

$$\varphi = C_1 \frac{e^{-\varkappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{\varkappa r}}{r}.$$

Da das Potential nicht unendlich groß werden darf, gilt $C_2 = 0$. C_1 wird mit Hilfe der Bedingung bestimmt, daß das Potential für $r \ll 1/\varkappa$ in das reine COULOMB-Potential des betrachteten Ions übergehen muß:

$$\varphi|_{r \ll 1/\varkappa} = \frac{Z\, e}{r} = \frac{C_1}{r}, \quad C_1 = Z\, e.$$

Das Ion ist also von einer ,,Wolke`` von Elektronen und Ionen umgeben, deren Dichte nach einem Exponentialgesetz abnimmt, während der mittlere Radius $1/\varkappa$ um so kleiner ist, je kleiner die Temperatur ist.

Die in dieser Aufgabe betrachtete Methode der Potentialberechnung geht auf DEBYE und HÜCKEL zurück, die sie in der Theorie starker Elektrolyte anwandten. Die Konstante $1/\varkappa$ wird als DEBYE-HÜCKELscher Radius bezeichnet.

309. Die dielektrische Verschiebung wird innerhalb der Platte durch die Beziehung

$$D(x) = E_0 \frac{\cosh \varkappa x}{\cosh \varkappa h}$$

mit $\varkappa = \sqrt{4\pi\, e^2\, n_0/\varepsilon\, k T}$ beschrieben. Für $\varkappa\, h \gg 1$ wird in der Nähe der Oberflächen $x = \pm h$

$$D(x) = E_0\, e^{-\varkappa(h - |x|)}.$$

Daraus folgt $D(x) = 0$ für $|x - h| \gg 1/\varkappa$, d.h., das Feld dringt bis zur Tiefe $1/\varkappa$ in den Leiter ein. In der Schicht dieser Tiefe ist die Ladung

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial x} = \pm \frac{\varkappa E_0}{4\pi}\, e^{-\varkappa(h - |x|)}$$

konzentriert.

Die in der makroskopischen Theorie betrachtete Dichte der ,,Oberflächen``-ladung ergibt sich durch Integration von ϱ. An der Grenze $x = h$ wird

$$\sigma = \int \varrho\, dx = -\frac{\varkappa E_0}{4\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa x'}\, dx' = \frac{E_0}{4\pi},$$

was mit der üblichen Grenzbedingung an der Oberfläche eines Leiters übereinstimmt.

310. Man erhält

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\sinh \varkappa x}{\sinh \varkappa h}, \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{8\pi e^2 n_0}{\varepsilon k T}}.$$

$\varkappa^2$ ist hier doppelt so groß wie in der vorigen Aufgabe, da zwei Sorten beweglicher Ionen vorhanden sind.

6.2. Polarisation im zeitlich veränderlichen Feld

311. Man erhält

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N a^3, \qquad \mu = 1 - 2\pi N a^3 < 1.$$

Ein solches Dielektrikum ist diamagnetisch. Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ hängen infolge der Annahme über die ideale Leitfähigkeit der Kugeln nicht von der Frequenz ab.

Man kann das künstliche Dielektrikum als dichtes Medium betrachten, wenn die Bedingungen $\lambda \gg l$, $\lambda \gg a$ erfüllt sind, wobei l den mittleren Abstand zwischen den Kugeln bedeutet. Den Unterschied zwischen dem wirksamen und dem mittleren Feld kann man nur vernachlässigen, wenn die Polarisierbarkeit des Mediums klein ist (d.h. für $4\pi N a^3 \ll 1$).

312. Die Bewegungsgleichung des Elektrons ist

$$m \ddot{\mathfrak{r}} + \eta \dot{\mathfrak{r}} = e \mathfrak{E}_0 e^{-i\omega t}. \tag{1}$$

Ihre partikuläre Lösung, die den erzwungenen Schwingungen entspricht, lautet

$$\mathfrak{r} = -\frac{e \mathfrak{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

mit $\gamma = \eta/m$.

Das Dipolmoment je Volumeneinheit erhält man durch Multiplikation von $\mathfrak{r}$ mit der Ladung e des Elektrons und mit der Teilchenzahl N je Volumeneinheit. Die Polarisierbarkeit $\alpha(\omega)$ des Mediums und die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\omega)$ sind dann folgendermaßen miteinander verknüpft:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \tag{2}$$

Den Zusammenhang zwischen dem spezifischen Widerstand ϱ und dem Koeffizienten η erhalten wir mit Hilfe der Gleichung (1) und des Ohmschen Gesetzes:

$$\varrho \equiv \frac{1}{\sigma} = \frac{\eta}{N e^2}. \tag{3}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Vergleich der Dielektrizitätskonstanten (2) mit der komplexen Dielektrizitätskonstanten (8.8), die durch die Leit-

fähigkeit ausgedrückt wird:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{4}$$

Trennt man in (2) Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \qquad \sigma = \frac{e^2 N \gamma}{m(\omega^2 + \gamma^2)}. \tag{5}$$

Aus (5) folgt, daß ε' und σ von der Frequenz abhängen. Für $\omega \ll \gamma$ nehmen sie ihre statischen Werte

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2} < 1, \qquad \sigma = \frac{e^2 N}{m\gamma}$$

an.

Wie aus (4) und (5) folgt, wird die komplexe Dielektrizitätskonstante einer leitenden Kugel für kleine Frequenzen ($\omega \to 0$) unendlich groß. Für große Frequenzen wird

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Eine solche Abhängigkeit $\varepsilon(\omega)$ für große Frequenzen gilt auch für Dielektrika.

Wir schätzen nun die Größenordnung von $\gamma = \eta/m$ für Kupfer ab (die Leitfähigkeit im statischen Fall ist $\sigma = 5 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}^{-1}$). Aus (3) folgt

$$\gamma = \frac{N e^2}{\sigma m} = \frac{N_0 e^2 d}{\sigma m A},$$

wobei $N_0 \approx 6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{Mol}^{-1}$ die LOSCHMIDTsche Zahl, $A \approx 63{,}5\,\mathrm{g/Mol}$ das Atomgewicht und $d \approx 8{,}9\,\mathrm{g/cm}^3$ die Dichte von Kupfer bedeuten. Die Abschätzung ergibt $\gamma \approx 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$; zum Vergleich sei bemerkt, daß dem sichtbaren Teil des Spektrums Frequenzen von $\approx 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ entsprechen.

Man kann also annehmen, daß die Leitfähigkeit im vorliegenden Fall den Wert, den sie im stationären Fall hat, bis zu Frequenzen im infraroten Teil des Spektrums beibehält. Bei hohen Frequenzen, bei denen die freie Weglänge des Elektrons mit der Eindringtiefe des Feldes im Metall vergleichbar wird, beginnen sich allerdings Effekte der räumlichen Feldinhomogenität bemerkbar zu machen, und die makroskopische Größe ε (Dielektrizitätskonstante) verliert ihren Sinn (Ausführlicheres hierzu findet man in [33] und [55], § 67).

Die in dieser Aufgabe für einen unbegrenzten Frequenzbereich erhaltenen Ergebnisse sind auf Metalle, Halbleiter und ionisierte Gase (Plasmen) anwendbar, wenn die Bewegungen der positiven Ionen vernachlässigt werden können. Zur Berechnung der Dielektrizitätskonstanten eines Plasmas unter Berücksichtigung der Bewegung der positiven Ionen s. Aufgabe 321.

313. Da die Moleküle des Dielektrikums nicht kugelsymmetrisch sind, werden sie durch das äußere Feld $\mathfrak{E}_a$ zum Teil ausgerichtet, und das Dielektrikum wird insgesamt anisotrop. Dabei kann man die orientierende Wirkung des veränderlichen Feldes auf Grund der Bedingung $E_0 \ll E_a$ vernachlässigen. Da das äußere elektrische Feld $\mathfrak{E}_a$ die Ursache für die Anisotropie ist, wird eine

Hauptachse des dielektrischen Tensors mit der Richtung von $\mathfrak{E}_a$ übereinstimmen, während die beiden anderen Hauptachsen senkrecht auf $\mathfrak{E}_a$ stehen.

Wir bezeichnen die Komponenten des Polarisierbarkeitstensors des Moleküls in diesen Hauptachsen mit β'_{ik} (die Werte $i, k = 1$ entsprechen der zu $\mathfrak{E}_a$ parallelen Hauptachse). Zwischen β'_{ik} und $\beta^{(i)}$ besteht der übliche Zusammenhang

$$\beta'_{ik} = \alpha_{il}\,\alpha_{km}\,\beta_{lm} = (\beta - \beta')\,\alpha_{i1}\,\alpha_{k1} + \beta'\,\delta_{ik}.$$

Dabei bedeuten die Größen α_{il} die Kosinus der Winkel zwischen den Symmetrieachsen des Moleküls und den Hauptachsen des dielektrischen Tensors (benutzt wurde die Beziehung $\alpha_{il}\,\alpha_{kl} = \delta_{ik}$, die sich auf Grund der Orthogonalität der Matrix α_{ik} ergibt). Um den Tensor der dielektrischen Suszeptibilität je Volumeneinheit des Dielektrikums berechnen zu können, muß man mit Hilfe der BOLTZMANNschen Formel die statistischen Mittelwerte der β'_{ik} bestimmen, d.h. die Produkte $\alpha_{i1}\,\alpha_{k1}$ mitteln.

Bezeichnet man die Polarwinkel der Symmetrieachse des Moleküls im gestrichenen System mit ϑ und φ, so können die α_{1i} in der Form

$$\alpha_{11} = \cos\vartheta, \qquad \alpha_{12} = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \alpha_{13} = \sin\vartheta\sin\varphi$$

geschrieben werden.

Führt man die Mittelung mit Hilfe der BOLTZMANNschen Formel durch (wie in Aufgabe 302), so erhält man bis auf lineare Terme bezüglich $a = (\beta_0 - \beta'_0)\,E_a^2/2kT$ genau

$$\overline{\alpha_{11}^2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{15}a\right), \qquad \overline{\alpha_{12}^2} = \overline{\alpha_{13}^2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{15}a\right),$$

$$\overline{\alpha_{i1}\,\alpha_{k1}} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

(β_0 und β'_0 sind die statischen Werte des Polarisierbarkeitstensors des Moleküls). Daraus folgt

$$\overline{\beta'_{11}} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 + \frac{4}{15}a\right) + \beta',$$

$$\overline{\beta'_{22}} = \overline{\beta'_{33}} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 - \frac{2}{15}a\right) + \beta'.$$

Unter Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen dem auf das Molekül wirkenden Feld und dem mittleren Feld erhält man die Hauptwerte des dielektrischen Tensors in der Form

$$\varepsilon^{(1)} = 1 + 4\pi N\,\overline{\beta'_{11}}, \qquad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\,\overline{\beta'_{22}}.$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß das Dielektrikum in einem starken konstanten elektrischen Feld bezüglich hochfrequenter Schwingungen (z.B. Lichtschwingungen) anisotrop wird. Man bezeichnet diese Entstehung einer Anisotropie unter der Wirkung eines konstanten elektrischen Feldes als KERR-Effekt. Die Trägheit dieses Effektes ist sehr klein; die Anisotropie entsteht bzw. verschwindet in einer Zeit der Größenordnung 10^{-10} s (diese wird durch die Zeit bestimmt, in der sich im Dielektrikum statistisches Gleichgewicht einstellt).

Der KERR-Effekt wird in der Technik vielfach zur schnellen Modulation der Lichtstärke benutzt.

Die gestellte Aufgabe wurde zuerst 1910 von P. LANGEVIN gelöst.

314. Setzt man den Parameter $pE_a/kT = a$ als klein voraus, so erhält man bis auf Terme der Ordnung a^2 genau die Beziehungen

$$\overline{\beta'_{11}} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 + \frac{2}{15}a^2\right) + \beta',$$

$$\overline{\beta'_{22}} = \overline{\beta'_{33}} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 - \frac{1}{15}a^2\right) + \beta',$$

$$\varepsilon^{(1)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta'_{11}}, \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta'_{22}}.$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in der vorigen Aufgabe.

315. Die Amplitude des Feldes $\mathfrak{E}$ nehme um $\mathrm{d}\mathfrak{E} = (\mathrm{d}E_x, \mathrm{d}E_y, \mathrm{d}E_z)$ zu. Dabei wird am Molekül die Arbeit

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathfrak{p}\,\mathrm{d}\mathfrak{E}^*) = \frac{1}{4}(\mathfrak{p}\,\mathrm{d}\mathfrak{E}^* + \mathfrak{p}^*\,\mathrm{d}\mathfrak{E}) \tag{1}$$

geleistet, wobei $p_i = \beta_{ik}E_k$ die Komponenten des Dipolmomentes des Systems bedeuten. Da keine Energie absorbiert wird, erscheint diese Arbeit vollständig als Vergrößerung der mittleren potentiellen Energie des Moleküls im äußeren Feld:

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\overline{W}.$$

Daher muß der Ausdruck für $\mathrm{d}A$ ein vollständiges Differential einer Funktion der Feldamplitude, der Energie des Systems, sein. Schreibt man $\mathrm{d}\overline{W}$ in der Form

$$\mathrm{d}\overline{W} = \frac{1}{4}\sum_{i,k}(\beta_{ik}E_k\,\mathrm{d}E_i^* + \beta_{ki}^*E_i^*\,\mathrm{d}E_k), \tag{2}$$

so sieht man, daß dieser Ausdruck nur bei $\beta_{ik} = \beta_{ki}^*$ ein vollständiges Differential sein kann; dann gilt aber

$$\mathrm{d}\overline{W} = \frac{1}{4}\sum_{i,k}\beta_{ik}(E_k\,\mathrm{d}E_i^* + E_i^*\,\mathrm{d}E_k) = \frac{1}{4}\sum_{i,k}\beta_{ik}\,\mathrm{d}(E_i^*E_k) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{4}\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}^*\right),$$

$$\overline{W} = \frac{1}{4}\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}^*.$$

Genauso kann man zeigen, daß der Tensor der magnetischen Polarisierbarkeit für ein System, in dem keine Energiedissipation stattfindet, hermitesch ist.

317. Die Bewegungsgleichung eines Atomelektrons, das durch eine elastische Kraft an den Kern angekoppelt ist, lautet

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \omega_0^2\mathfrak{r} = \frac{e}{m}\left[\mathfrak{E}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H}_0\right],$$

wobei ω_0 die Frequenz der Eigenschwingungen bedeutet. Löst man sie mit der Methode der sukzessiven Näherungen, so erhält man in der bezüglich $\mathfrak{H}_0$ linearen Näherung

$$\mathfrak{r} = \frac{e\,\mathfrak{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} - i\,\frac{e\,\omega}{m^2\,c(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}_0.$$

Zur Berechnung des Polarisierbarkeitstensors des Atoms benutzen wir die Schreibweise des Vektorproduktes mit Hilfe des antisymmetrischen Tensors e_{ikl} (s. Aufgabe 26). Es ergibt sich

$$\beta_{ik} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\,\delta_{ik} - i\,\frac{e^2\,\omega\,H_{0l}}{m^2\,c(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\,e_{ikl}.$$

Nach der allgemeinen Aussage, die in der Aufgabe 315 bewiesen wurde, ist dieser Tensor hermitesch. Der Gyrationsvektor (s. Aufgabe 316) ist im vorliegenden Fall

$$\mathfrak{g} = \frac{e^2\,\omega}{m^2\,c(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\,\mathfrak{H}_0 = -\frac{2e\,\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\,\vec{\omega}_{\mathrm{L}},$$

wobei $\vec{\omega}_{\mathrm{L}} = e\,\mathfrak{H}_0/2m\,c$ die LARMOR-Frequenz bedeutet.

318. Man erhält

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\varepsilon^+ + \varepsilon^-) & \frac{i}{2}(\varepsilon^+ - \varepsilon^-) & 0 \\ -\frac{i}{2}(\varepsilon^+ - \varepsilon^-) & \frac{1}{2}(\varepsilon^+ + \varepsilon^-) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\varepsilon^\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega \pm 2\omega_{\mathrm{L}}) - \omega_0^2}, \quad \varepsilon^0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi\,e^2 N}{m}.$$

Der Gyrationsvektor ist dem Betrage nach

$$g = \frac{1}{2}(\varepsilon^+ - \varepsilon^-)$$

und hat die Richtung der z-Achse.

Das Ergebnis der vorigen Aufgabe folgt aus der exakten Lösung unter der Bedingung $2\omega_{\mathrm{L}}\,\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$.

319. Der Tensor ε_{ik} hat dieselbe Form wie in der vorigen Aufgabe. Jedoch sind $\varepsilon^\pm$ und ε^0 durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\varepsilon^\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega(i\,\gamma \pm 2\omega_{\mathrm{L}})},$$

$$\varepsilon^0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\,\omega\,\gamma},$$

$$\gamma = \frac{\eta}{m}, \quad \omega_{\mathrm{L}} = -\frac{eH_0}{2m\,c} > 0, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi\,e^2 N}{m}.$$

Da im Elektronengas eine „Reibung" vorhanden ist ($\eta \neq 0$), erfolgt eine Energiedissipation, und der Tensor ε_{ik} ist nicht hermitesch.

320. Wir erhalten

$$\mathfrak{j} = \sigma\,\mathfrak{E} + \mathfrak{E} \times \mathfrak{a}$$

mit

$$\sigma = \frac{e^2 N}{m\,\gamma}, \quad \mathfrak{a} = \frac{e^3 N}{m^2 \gamma^2 c}\,\mathfrak{H}_0, \quad \gamma = \frac{\eta}{m}.$$

Das Magnetfeld führt zur Entstehung eines Stromes, der auf dem elektrischen Feld senkrecht steht (HALL-Strom).

Die Umkehrformel lautet in derselben Näherung

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{j} + R\,\mathfrak{j} \times \mathfrak{H}_0,$$

wobei $R = 1/c\,e N$ die HALL-Konstante ist.

Der Tensor der elektrischen Leitfähigkeit ist

$$\sigma_{ik} = \sigma\,\delta_{ik} - e_{ikl}\,a_l.$$

321. Wir bezeichnen Masse, Geschwindigkeit und Ladung des Elektrons mit m, $\dot{\mathfrak{r}}$ und $-e$, des Ions mit M, $\dot{\mathfrak{R}}$ und $+e$. Dann erhalten wir das folgende System von Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\mathfrak{r}} &= -e\,\mathfrak{E}_0\,e^{-i\omega t} - \frac{e}{c}\,\dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{H}_0 - m\,\gamma(\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}}), \\ M\ddot{\mathfrak{R}} &= e\,\mathfrak{E}_0\,e^{-i\omega t} + \frac{e}{c}\,\dot{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{H}_0 - m\,\gamma(\dot{\mathfrak{R}} - \dot{\mathfrak{r}}). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{H}_0$ das statische homogene Magnetfeld und $m\gamma$ den „Reibungskoeffizienten"; die Reibungskraft ist der Relativgeschwindigkeit, d. h. der Größe $\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{R}}$ für die Elektronen und der Größe $\dot{\mathfrak{R}} - \dot{\mathfrak{r}}$ für die Ionen, proportional. Das elektrische Feld $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\,e^{-i\omega t}$ hängt harmonisch von der Zeit ab.

Wir setzen die Lösung des Gleichungssystems (1) in der Form

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0\,e^{-i\omega t}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0\,e^{-i\omega t} \tag{2}$$

an, wählen die Richtung von $\mathfrak{H}_0$ als z-Achse und führen mit Hilfe der Formeln

$$r_{0,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{0x} \pm i\,r_{0y}), \quad R_{0,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(R_{0x} \pm i R_{0y})$$

die zyklischen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{R}_0$ ein. Setzt man (2) in (1) ein und addiert die erhaltenen Gleichungen:

$$-i\omega(m\,\mathfrak{r}_0 + M\,\mathfrak{R}_0) = \frac{e}{c}(\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{r}_0) \times \mathfrak{H}_0,$$

so kann die linke Seite der erhaltenen Gleichung in der Form

$$-i\,\omega[(M + m)\,\mathfrak{R}_0 + m(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{R}_0)]$$

geschrieben werden. Durch Vernachlässigung von m gegenüber M findet man

$$\omega R_{0,\pm 1} = \left(\pm \Omega_H + \omega \frac{m}{M}\right) s_{\pm 1} \tag{3}$$

mit

$$\Omega_H = \frac{eH_0}{Mc}, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{r}_0.$$

Nun dividieren wir die erste der Gleichungen (1) durch m, die zweite durch M und subtrahieren die erhaltenen Gleichungen voneinander. Vernachlässigt man eE/M gegen eE/m, $(m/M)\gamma s$ gegen γs und $e(\dot{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{H}_0)/Mc$ gegen $e(\dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{H}_0)/mc$, so erhält man mit Hilfe von (2)

$$\left.\begin{aligned} (-i\omega + \gamma \mp i\omega_H)\, s_{\pm 1} \mp i\omega_H R_{0,\pm 1} &= \frac{e}{m} E_{0,\pm 1}, \\ -\omega^2 s_z &= \frac{eE_{0z}}{m} + i\omega\gamma s_z, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei $\omega_H = eH_0/mc$ ist. Aus (3) und (4) erhält man $\mathfrak{s}$.

Der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ wird mit Hilfe der Formel

$$\mathfrak{P} = N e \mathfrak{s}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}$$

berechnet, wobei N die Ionenzahl (bzw. Elektronenzahl) je Volumeneinheit ist.

Die Komponenten des dielektrischen Tensors schreiben wir in der Form

$$\varepsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega + i\gamma \pm \omega_H - \frac{\omega_H \Omega_H}{\omega}\right)},$$

$$\varepsilon^{(z)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}.$$

Die Komponente $\varepsilon^{(z)}$ hat dieselbe Form wie die skalare Dielektrizitätskonstante bei Abwesenheit eines Magnetfeldes, die in der Aufgabe 312 berechnet wurde; für $\omega \to 0$ nimmt sie unbeschränkt zu. Die Komponenten $\varepsilon^{\pm}$ enthalten bei Berücksichtigung der Ionenbewegung im Nenner den Zusatzterm $\omega_H \Omega_H$, der für $\Omega_H/\omega \ll 1$, d.h. bei großen Frequenzen ω, vernachlässigt werden kann. Er wird jedoch für kleine Frequenzen wesentlich und führt dazu, daß die Komponenten $\varepsilon^{\pm}$ für $\omega \to 0$ endlich bleiben:

$$\varepsilon^{\pm} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H \Omega_H}.$$

Dank dieser Eigenschaft können im Plasma Wellen sehr kleiner Frequenz existieren (magnetohydrodynamische Wellen). Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Plasma unter Berücksichtigung der Schwingungen der positiven Ionen wird in Aufgabe 457 betrachtet.

322. Im Koordinatensystem, dessen x_3-Achse mit der ausgezeichneten Richtung übereinstimmt, muß der Tensor T_{ik} die Form

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T & T_a & 0 \\ -T_a & T & 0 \\ 0 & 0 & T_{\|} \end{pmatrix}$$

haben. Das entspricht den Resultaten der Aufgaben 318, 319 u. a.

324. Da das Feld zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird, folgt aus dem Kausalitätsprinzip, daß $\mathfrak{P}(t) = 0$ für $t < 0$ ist. Bezeichnet man die dielektrische Suszeptibilität mit $\alpha = \alpha' + i\,\alpha''$, so erhält man

$$\mathfrak{P}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega')\,\mathfrak{E}(\omega')\,\mathrm{e}^{-i\omega' t}\mathrm{d}\omega' = \frac{\mathfrak{E}_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega')\,\mathrm{e}^{-i\omega' t}\mathrm{d}\omega', \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{E}(\omega')$ die FOURIER-Komponente des Feldes $\mathfrak{E}(t) = \mathfrak{E}_0\,\delta(t)$ ist. Wir multiplizieren (1) mit $\mathrm{e}^{i\omega t}$ und integrieren über t von $-\infty$ bis 0. Wegen der Bedingung $\mathfrak{P}(t) = 0$ für $t < 0$ ist

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\,\alpha(\omega') \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-i(\omega'-\omega)t}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{2}$$

Benutzt man (A I.17) und trennt Real- und Imaginärteil, so findet man

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha''(\omega')}{\omega' - \omega}\,\mathrm{d}\omega', \qquad \alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha'(\omega')}{\omega' - \omega}\,\mathrm{d}\omega', \tag{3}$$

woraus unmittelbar die KRAMERS-KRONIGschen Beziehungen folgen.

325.

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

6.3. Ferromagnetische Resonanz

326. Es ergibt sich

$$M_x = A\,\sin(\omega_0 t + \alpha), \qquad M_y = A\,\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad M_z = C$$

mit $\omega_0 = \gamma H_0$. Dabei bedeuten α die Anfangsphase und A und C Konstanten, die durch die Bedingung $M^2 = M_0^2$, d.h. $A^2 + C^2 = M_0^2$, miteinander verknüpft sind; M_0 bezeichnet die Sättigungsmagnetisierung. Die Bewegung des Magnetisierungsvektors stellt gewöhnlich eine LARMOR-Präzession dar.

327. Wir setzen die Lösung der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\,\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}_0 + \omega_r(\chi_0\,\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{M}) \tag{1}$$

in der Form

$$M_x = m_x\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad M_y = m_y\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad M_z = M_0 + m_z\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

an, wobei ω eine unbekannte Frequenz ist; die z-Achse hat die Richtung von $\mathfrak{H}_0$.

Wenn man (1) auf die Koordinatenachsen projiziert und $\mathfrak{M}$ einsetzt, erhält man ein System algebraischer Gleichungen, die unter der Bedingung

$$\omega_0^2 - (\omega + i\,\omega_r)^2 = 0$$

lösbar sind. Die Frequenz ω erweist sich als komplex:

$$\omega = \omega_0 - i\,\omega_r;$$

das Vorhandensein von Verlusten führt wie gewöhnlich zu einer gedämpften Bewegung. Die Phasen der Komponenten m_x und m_y sind um $\pi/2$ gegeneinander verschoben. Der Vektor $\mathfrak{M}$ vollführt eine gedämpfte Präzessionsbewegung um $\mathfrak{H}_0$.

328. Legt man die z-Achse in die Richtung von $\mathfrak{H}$, so hat das magnetische Gesamtfeld die Komponenten

$$h_x\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad h_y\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad h_z\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + H_0.$$

Wir setzen die Lösung der LANDAU-LIFSCHIZschen Gleichung (6.15) in der Form

$$M_x = m_x\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad M_y = m_y\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad M_z = M_0 + m_z\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{1}$$

an, wobei M_0 die Sättigungsmagnetisierung ist. Diese Form der Lösung entspricht der Annahme, daß die LARMOR-Präzession infolge der Dämpfung aufhört und die Schwingungen nur durch das hochfrequente (erzwingende) Feld aufrechterhalten werden. Daher muß man die Größen m_x, m_y, m_z als klein, aber von einer Größenordnung nicht unterhalb von h voraussetzen. Setzt man (1) in die LANDAU-LIFSCHIZsche Gleichung ein und vernachlässigt die in h und m quadratischen Terme, so erhält man die Komponenten von $\mathfrak{m}$ in der Form

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \chi_0\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}h_x - \chi_0\frac{i\,\omega\,\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}h_y,\\ m_y &= \chi_0\frac{i\,\omega\,\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}h_x + \chi_0\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}h_y,\\ m_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus ersieht man, daß die Größen m_x und m_y in Abhängigkeit von ω bei festem $\omega_0 = \gamma H_0$ oder von H_0 bei festem ω Resonanzen aufweisen; im Punkt $\omega = \omega_0$ nehmen die Komponenten m_x und m_y unbeschränkt zu, und es tritt eine ferromagnetische Resonanz ein.

Die unbeschränkte Zunahme der Amplitude von $\mathfrak{m}$ hängt mit der genäherten Lösung der LANDAU-LIFSCHIZschen Gleichung zusammen. Die exakte Lösung (s. Aufgabe 330) muß gewährleisten, daß $|\mathfrak{M}|$ konstant ist, da aus der LANDAU-

LIFSCHIZschen Gleichung $M^2 = \text{const}$ folgt. Bei der Lösung der Aufgabe mit der Methode der sukzessiven Näherungen unter Berücksichtigung der Verluste bleibt $\mathfrak{M}$ ebenfalls beschränkt.

329. Man erhält

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_\perp & -i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\chi_\perp = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \chi_a = \chi_0 \frac{\omega\,\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mu_\perp = 1 + 4\pi\chi_\perp, \qquad \mu_a = 4\pi\chi_a, \qquad \mu_{||} = 1$$

ist.

Wie die angegebenen Gleichungen zeigen, sind χ_{ik} und μ_{ik} hermitesche Tensoren ($\mu_{ik} = \mu_{ki}^*$). Das bedeutet, daß das Medium gyrotrop ist und keine Verluste auftreten.

Abb. 54 zeigt die Frequenzabhängigkeit der Komponenten μ_{ik}.[1]) Es ist $(H_0)_{\text{res}} \approx 3400$ Oe $= 8500/\pi$ [A/cm].

330. Man erhält

$$M_x = \frac{\omega_1}{\Delta\omega} C \cos\omega t,$$

$$M_y = \frac{\omega_1}{\Delta\omega} C \sin\omega t, \qquad M_z = C$$

mit

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega, \qquad \omega_0 = \gamma H_0,$$
$$\omega_1 = \gamma h.$$

Die Konstante C kann aus der Bedingung

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_0^2$$

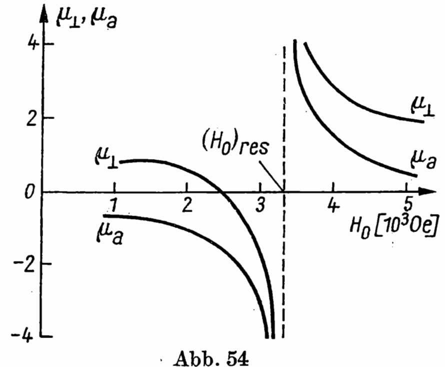


Abb. 54

bestimmt werden, die aus der LANDAU-LIFSCHIZschen Gleichung folgt:

$$C = \frac{|\Delta\omega|}{\Omega} M_0.$$

Dabei ist $\Omega = \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}$.

---

1) Die Abbildungen 54 und 55 sind [42] entnommen.

Der Ausdruck für C enthält den Betrag $|\Delta\omega|$, da $M_z > 0$ ist. Die Komponenten von $\mathfrak{M}$ haben die Form

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \pm \frac{\omega_1}{\Omega} M_0 \cos\omega t = \chi h_x, \\ M_y &= \pm \frac{\omega_1}{\Omega} M_0 \sin\omega t = \chi h_y, \\ M_z &= \frac{|\Delta\omega|}{\Omega} M_0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dabei entsprechen die Vorzeichen dem Vorzeichen von $\Delta\omega$. Wie aus diesen Gleichungen folgt, ist die Relation zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{h}$ nichtlinear, und der Proportionalitätsfaktor χ hängt von h ab:

$$\chi = \pm \frac{\gamma M_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}}.$$

Der Präzessionswinkel ϑ (Winkel zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}_0$) wird durch die Gleichung

$$\sin\vartheta = \frac{M_\perp}{M_0} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

bestimmt, wobei

$$M_\perp = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

ist.

Bei einer ferromagnetischen Resonanz gilt $\Delta\omega = 0$, und aus (1) ergibt sich

$$M_x = \pm M_0 \cos\omega t, \quad M_y = \pm M_0 \sin\omega t, \quad M_z = 0.$$

Der Vektor $\mathfrak{M}$ rotiert mit der Frequenz ω in der Ebene, die auf $\mathfrak{H}_0$ senkrecht steht. Seine Komponenten sind stets endlich.

331. Es ergibt sich

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{m}\, e^{-i\omega t},$$

wobei $\mathfrak{M}_0$ die Richtung von $\mathfrak{H}_0$ besitzt, während die Komponenten von $\mathfrak{m}$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_x &= \chi_0 \frac{\Omega^2 - i\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_x - i\chi_0 \frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_y, \\ m_y &= i\chi_0 \frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_x + \chi_0 \frac{\Omega^2 - i\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_y, \\ m_z &= \chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r - i\omega} h_z, \\ \Omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \omega_r^2}, \quad \omega_0 = \gamma H_0 \end{aligned}$$

bestimmt sind.

Wie man daraus ersieht, hat das Vorhandensein von Verlusten ($\omega_r \neq 0$) zur Folge, daß die Amplitude von $\mathfrak{m}$ bei der Resonanz endlich bleibt.

332. Man erhält

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\,\mu_a & 0 \\ i\,\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \mu_\perp &= \mu'_\perp + i\,\mu''_\perp, \\ \mu_a &= \mu'_a + i\,\mu''_a, \end{aligned}$$

$$\mu'_\perp = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\Omega^2(\Omega^2 - \omega^2) + 2\omega^2\omega_r^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2},$$

$$\mu''_\perp = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\,\omega_r(\Omega^2 + \omega^2)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2},$$

$$\mu'_a = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\,\omega_0(\Omega^2 - \omega^2)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2},$$

$$\mu''_a = \frac{\omega^2\omega_0\omega_r}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$

mit

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_r^2}, \qquad \omega_0 = \gamma H_0, \qquad \mu_{||} = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r - i\,\omega},$$

$$(H_0)_{\text{res}} \approx 3400 \text{ Oe} = \frac{8500}{\pi}\,\frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Abb. 55 zeigt die Abhängigkeit der Größen $\mu'_\perp$ und $\mu''_\perp$ vom konstanten Feld H_0. Die Abhängigkeiten der Größen μ'_a und μ''_a von H_0 sind anomal.

Die Imaginärteile $\mu''_\perp$ und μ''_a sind für $H_0 = (H_0)_{\text{res}} \approx \omega/\gamma$ maximal, während die Realteile $\mu'_\perp$ und μ'_a für $H_0 \approx (\omega \pm \omega_r)/\gamma$ Extremwerte annehmen.

Die in Abb. 55 dargestellten Kurven sind ähnlich den Dispersionskurven für $\varepsilon(\omega)$ (s. Abb. 16, S. 71).

Die Imaginärteile $\mu''_\perp$, μ''_a und $\mu''_{||}$ der Tensorkomponenten bestimmen die Dissipation der elektromagnetischen Energie. Sie werden für $\omega_r = 0$ gleich Null.

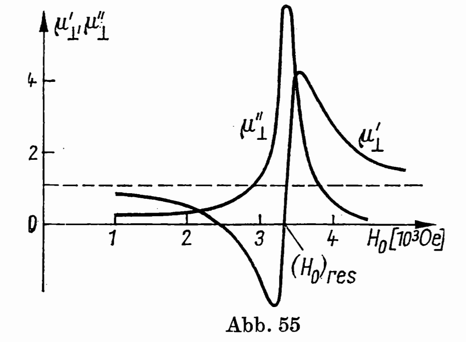


Abb. 55

333.

$$\Delta H_0 = \frac{\omega_r}{\gamma}.$$

334. Wir legen die Koordinatenachsen in die Hauptachsenrichtungen des Ellipsoids, wobei die z-Achse die Richtung des Feldes $\mathfrak{H}_0$ hat. Dann hat der Tensor N_{ik} Diagonalform. Die LANDAU-LIFSCHIZsche Gleichung lautet also in Komponentenform

$$\left.\begin{aligned} \dot{M}_x &= -\gamma[H_0 + 4\pi(N^{(y)} - N^{(z)})\,M_z]\,M_y, \\ \dot{M}_y &= \gamma[H_0 + 4\pi(N^{(x)} - N^{(z)})\,M_z]\,M_x, \\ \dot{M}_z &= -4\pi\gamma(N^{(x)} - N^{(y)})\,M_x M_y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Gleichungen werden also nichtlinear. Unter der Annahme, daß die Abweichungen des Vektors $\mathfrak{M}$ von der Gleichgewichtslage (Richtung der z-Achse) klein sind, setzen wir die Lösung in der Form

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{m}\, e^{-i\omega t} \tag{2}$$

an, wobei der Vektor $\mathfrak{M}_0$ die Richtung der z-Achse hat. Vernachlässigt man nach dem Einsetzen von (2) in (1) Terme mit m^2, so ist das System (1) linearisiert. Setzt man die Determinante des Gleichungssystems gleich Null, so erhält man

$$\omega^2 \equiv \omega_k^2 = \gamma^2 [H_0 + 4\pi(N^{(x)} - N^{(z)}) M_0]\,[H_0 + 4\pi(N^{(y)} - N^{(z)}) M_0].$$

335. Man erhält

$$\omega = \omega_k + i\,\omega_r \left[1 + \frac{\chi_0 (N^{(x)} + N^{(y)})}{2}\right], \qquad \chi_0 = \frac{M_0}{H_0 - N^{(z)} M_0}.$$

ω_k ist in der Lösung zur vorigen Aufgabe angegeben.

336. Legt man die z-Achse in die Richtung von $\mathfrak{H}_0$, so erhält man

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_1 & -i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\chi_1 = \frac{1}{\Delta}\{\gamma^2 M_0 [H_0 + (N^{(y)} - N^{(z)}) M_0] - i\,\chi_0\,\omega\,\omega_r\},$$

$$\chi_2 = \frac{1}{\Delta}\{\gamma^2 M_0 [H_0 + (N^{(x)} - N^{(z)}) M_0] - i\,\chi_0\,\omega\,\omega_r\}$$

und

$$\Delta = (\omega_k^2 - \omega^2) - i\,\omega\,\omega_r [2 + \chi_0 (N^{(x)} + N^{(y)})],$$

$$\chi_0 = \frac{M_0}{H_0 - N^{(z)} M_0}, \qquad \chi_a = -\frac{1}{\Delta}\gamma\,\omega\, M_0$$

sind. Da in die Ausdrücke für die Tensorkomponenten χ_{ik} Entmagnetisierungsfaktoren eingehen, werden die Lage der Resonanz und die Breite der Resonanzlinie von der Form des Körpers abhängen.

337. Das System der Bewegungsgleichungen für die Magnetisierungsvektoren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ lautet

$$\frac{d\mathfrak{M}_1}{dt} = -\gamma\,\mathfrak{M}_1 \times (\mathfrak{H}_0 - \lambda\,\mathfrak{M}_2), \qquad \frac{d\mathfrak{M}_2}{dt} = -\gamma\,\mathfrak{M}_2 \times (\mathfrak{H}_0 - \lambda\,\mathfrak{M}_1). \tag{1}$$

Wir setzen die Lösung in der Form

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_{10} + \mathfrak{m}_1 e^{-i\omega t}, \qquad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_{20} + \mathfrak{m}_2 e^{-i\omega t}$$

an (M_{10} und M_{20} sind die Gleichgewichtswerte von M_1 und M_2).

Zur Lösung des Gleichungssystems (1) geht man zu den zyklischen Komponenten

$$m_{j\pm} = m_{jx} \pm i\, m_{jy} \qquad (j = 1, 2)$$

über. Die Frequenzen der Eigenpräzession sind

$$\omega_{01} = \gamma H_0, \qquad \omega_{02} = \gamma\, \lambda\, |M_{10} - M_{20}|. \tag{2}$$

Die Beziehungen (2) gelten unter der Bedingung $\lambda\,|M_{10} - M_{20}| \gg H_0$. Die Frequenz ω_{01} hat die gleiche Größe wie im Falle eines Ferromagnetikums ohne Untergitter. Die Frequenz ω_{02} hängt vom molekularen Feld ab und ist gewöhnlich sehr groß gegen ω_{01}.

7. QUASISTATIONÄRES ELEKTROMAGNETISCHES FELD

7.1. Quasistationäre Erscheinungen in linearen Leitern

338. Man findet

$$I(t) = \frac{\pi a^2 \omega H_0}{c\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

mit

$$\tan\varphi = \frac{\omega L}{c^2 R}$$

sowie

$$N(t) = -\frac{\omega(\pi a^2 H_0)^2}{c^2\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}} \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi),$$

$$\bar{P} = \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{(\pi a^2 H_0)^2 R}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{2} I_0^2 R.$$

L bedeutet die Induktivität des Ringes (s. Aufgabe 272), R seinen Widerstand und I_0 die Amplitude des Stromes im Ring. Der Anfangszeitpunkt wird so gewählt, daß die Schleifenebene für $t = 0$ senkrecht auf H_0 steht.

339.

$$\bar{N} = \frac{\omega}{2c^2} \frac{(S H_0)^2 R}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

340. Die mittlere verallgemeinerte Kraft, die die Tendenz hat, die verallgemeinerte Koordinate q_i zu vergrößern, ist

$$-\frac{I_0^2}{2c^6} \frac{\omega^2 L L_{12}}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}.$$

Dabei bedeuten L und R Induktivität und Widerstand des zweiten Kreises und L_{12} den Wechselinduktionskoeffizienten der Kreise.

341.

$$\bar{F} = -\frac{\omega^2 L L_{12} |V_0^{(e)}|^2}{2c^6 \left\{\left[R^2 + \frac{\omega^2(L_{12}^2 - L^2)}{c^4}\right]^2 + \frac{4\omega^2 L^2 R^2}{c^4}\right\}} \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}.$$

342. Man erhält

$$\omega_{1,2}^2 = \\ = \frac{c^2[(L_1+L_2)C+L_1C_1+L_2C_2] \pm c^2\{[L_1(C+C_1)-L_2(C+C_2)]^2+4L_1L_2C^2\}^{1/2}}{2L_1L_2(C_1C_2+CC_1+CC_2)}.$$

Bei fehlender Kopplung zwischen den Kreisen ($C = 0$) erhält man

$$\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{c}{\sqrt{L_2C_2}},$$

was unabhängigen Schwingungen in zwei gleichen Kreisen entspricht.

Bei sehr starker Kopplung ($C \gg C_1, C_2$) gibt es nur eine Frequenz

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{L'C'}}$$

mit

$$L' = \frac{L_1L_2}{L_1+L_2}, \qquad C' = C_1 + C_2.$$

Das entspricht Schwingungen in einem Kreis, in dem die Kapazitäten C_1, C_2 und die Induktivitäten L_1, L_2 parallelgeschaltet sind.

343.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} + \frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_2C_2}\right) \pm \\ \pm \frac{c^2}{2}\left\{\left[\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{L_1}\right) - \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{L_2}\right)\right]^2 + \frac{4}{L^2C_1C_2}\right\}^{1/2}.$$

344.

$$\omega_{1,2}^2 = c^2\frac{L_1C_1 + L_2C_2 \pm [(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4C_1C_2L_{12}^2]^{1/2}}{2C_1C_2(L_1L_2 - L_{12}^2)}.$$

345. Bildet man das Gleichungssystem für die Ströme und setzt die Systemdeterminante gleich Null, so findet man nach einigen Umformungen eine Gleichung vierten Grades:

$$\omega^4 + i\,\omega^3\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right) - \omega^2(\omega_1^2+\omega_2^2) - i\,\omega\left(\frac{\omega_1^2}{\tau_2}+\frac{\omega_2^2}{\tau_1}\right) + \omega_1^2\,\omega_2^2 = 0. \quad (1)$$

Dabei ist

$$\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{c}{\sqrt{L_2C_2}}, \quad \tau_1 = RC_1, \quad \tau_2 = RC_2.$$

Da die Koeffizienten dieser Gleichung komplex sind, ist auch die Frequenz ω komplex: $\omega = \omega' + i\,\omega''$. In nullter Näherung kann man die Terme mit τ_1 und τ_2 in der Gleichung (1) weglassen. Dann nimmt (1) die Form

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2+\omega_2^2) + \omega_1^2\,\omega_2^2 = 0 \quad (2)$$

an. Die Lösungen von (2) sind $\omega_1^{(0)} = \omega_1$ und $\omega_2^{(0)} = \omega_2$. In dieser Näherung ist also $\omega'' = 0$, und es gibt keine Energiedissipation (da wir annahmen, daß

$R \to \infty$ ist); die Schwingungen in den Kreisen sind voneinander unabhängig. In der nächsten Näherung setzen wir ω in der Form $\omega = \omega^{(0)} + \Delta\omega' + i\omega''$ an, wobei ω'' und $\Delta\omega'$ von der Größenordnung $1/\tau$ oder höher sind. Dementsprechend vernachlässigen wir alle Terme höherer Ordnungen. Wenn man ω in (1) einsetzt, (2) berücksichtigt und Real- und Imaginärteil einzeln gleich Null setzt, findet man

$$\Delta\omega' = 0, \quad \omega_1'' = -\frac{1}{2\tau_2}, \quad \omega_2'' = -\frac{1}{2\tau_1}. \tag{3}$$

Eine Korrektion an ω', die R enthält, tritt erst in der nächsten Näherung auf.

346.

$$I_1 = \frac{V^{(e)}}{Z_1\left(1 + \dfrac{\omega^2 L_{12}^2}{c^4 Z_1 Z_2}\right)}, \quad I_2 = \frac{i\omega L_{12}}{c^2 Z_2} I_1,$$

$$Z_1 = R_1 + i\left(\frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega L_1}{c^2}\right), \quad Z_2 = R_2 + i\left(\frac{1}{\omega C_2} - \frac{\omega L_2}{c^2}\right),$$

$$I_{1\,\max} = \frac{V^{(e)}}{R} \quad \text{für} \quad \omega = \frac{c}{\sqrt{L_1 C_1\left(1 - \dfrac{L_{12}^2}{L_1 L_2}\right)}}.$$

347. Man findet

$$Z = \frac{R - \dfrac{i\omega L}{c^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2} - i\omega R C},$$

wobei $\omega_1 = c/\sqrt{LC}$ die Eigenfrequenz der Schwingungen im Kreis ist. Für $R = 0$ und $\omega = \omega_1$ wird Z unendlich groß. Diese Eigenschaft des betrachteten Zweipols wird in der HF-Technik benutzt (Sperrfilter).

348. Man erhält

$$C = C_0, \quad L = L_0, \quad R = \frac{\gamma L_0}{c^2} \quad \text{mit} \quad L_0 = \frac{c^2}{\omega_p^2 C_0}.$$

349.

$$Q = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(U I^*) = \frac{1}{2}|I|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} C_0 |U_0|^2,$$

$$\overline{W} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right) C_0 |U_0|^2.$$

350.

$$C = C_0, \quad L = \frac{c^2}{\omega_p^2 C_0}, \quad C_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} C_0, \quad R = \frac{\gamma L}{c^2} = \frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0}.$$

351.

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2\omega_p^2\gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2} C_0 |U_0|^2,$$

$$\overline{W} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\right] C_0 |U_0|^2.$$

352. Wir bezeichnen die Ströme, die durch Induktivität, Kondensator und Batterie fließen, mit I_1, I_2 und I_3. Auf Grund der KIRCHHOFFschen Gesetze gilt dann

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \qquad \frac{L}{c^2}\dot{I}_1 = \frac{q(t)}{C} = V^{(e)}(t) + I_3 R. \tag{1}$$

Dabei bedeuten $q(t)$ die Ladung auf der Kondensatorbelegung, die mit I_2 durch die Beziehung $I_2 = \dot{q}$ zusammenhängt, und

$$V^{(e)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0, \\ V^{(e)} & \text{für} \quad t > 0. \end{cases}$$

Aus (1) ergibt sich eine Gleichung zweiten Grades für den Strom I_1. Die entsprechende charakteristische Gleichung hat die Wurzeln

$$x = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \omega_0^2}, \qquad \omega_0^2 = \frac{c^2}{LC}.$$

In Abhängigkeit von den Beziehungen zwischen R, L und C sind folgende drei Fälle möglich:

a) $\omega_0 > 1/2RC$. Mit der Methode der Variation der Konstanten von LAGRANGE (s. [75], § 25) erhalten wir

$$I_1(t) = \frac{V^{(e)}}{R}\left[1 - \mathrm{e}^{-t/2RC}\left(\frac{\sin\omega t}{2\omega RC} + \cos\omega t\right)\right]$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}.$$

b) $\omega_0 < 1/2RC$. Man erhält

$$I_1(t) = \frac{V^{(e)}}{R}\left[1 - \mathrm{e}^{-t/2RC}\left(\frac{\sinh\Omega t}{2\Omega RC} + \cosh\Omega t\right)\right]$$

mit

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \omega_0^2}.$$

c) $\omega_0 = 1/2RC$. Man erhält

$$I_1(t) = \frac{V^{(e)}}{R}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{2RC}\right)\mathrm{e}^{-t/2RC}\right].$$

In den letzten beiden Fällen ist der Einschwingvorgang vollkommen aperiodisch, und es entstehen keine Schwingungen.

353.

$$U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0, \\ U_0\,\mathrm{e}^{-t/RC} & \text{für} \quad 0 < t < T, \\ U_0(\mathrm{e}^{-t/RC} - \mathrm{e}^{-(t-T)/RC}) & \text{für} \quad t > T. \end{cases}$$

354.

$$U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0, \\ U_0\, e^{-Rc^2t/L} & \text{für} \quad 0 < t < T, \\ U_0(e^{-Rc^2t/L} - e^{-Rc^2(t-T)/L}) & \text{für} \quad t > T. \end{cases}$$

355. Auf den Eingang des Vierpols muß der Impuls

$$U_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < -T, \\ h\,E_0\left(1 + \dfrac{t}{T} + \dfrac{R\,C}{T}\right) & \text{für} \quad -T < t < 0, \\ h\,E_0\left(1 - \dfrac{t}{T}\right) & \text{für} \quad 0 < t < T, \\ 0 & \text{für} \quad t > T \end{cases}$$

gegeben werden. Der Anfangszeitpunkt ist so gewählt, daß das Feld zwischen den Kondensatorplatten für $t = 0$ maximal ist.

356. Man erhält

$$I(t) = \frac{V_0^{(e)}}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{\omega L}{c^2}\right)^2}}\,[\cos(\omega\,t + \varphi_0 - \varphi) - e^{-Rc^2t/L}\cos(\varphi_0 - \varphi)]$$

mit $\tan\varphi = \omega L/c^2 R$. Es treten keine Einschwingerscheinungen auf, falls

$$\tan\varphi_0 = -\frac{R\,c^2}{\omega\,L}$$

gilt. Diese Bedingung hat eine einfache Bedeutung. Im Zeitpunkt des Einschaltens muß der stationäre Wert des Stromes gleich Null sein.

357. Bei harmonischer Zeitabhängigkeit der Ströme lautet die KIRCHHOFFsche Gleichung für den n-ten Kreis

$$-\frac{\omega L}{c^2} I_n + \frac{1}{\omega\,C}(2I_n - I_{n-1} - I_{n+1}) = 0. \tag{1}$$

Gleichung (1) ist eine lineare Differenzengleichung mit der ganzzahligen unabhängigen Veränderlichen n und den beiden linear unabhängigen Lösungen $\sin\varkappa n$ und $\cos\varkappa n$ (vgl. Aufgabe 223), wobei die Frequenzen der Eigenschwingungen folgendermaßen durch den Parameter $\varkappa$ ausgedrückt werden:

$$\omega^2 = 4\,\omega_0^2 \sin^2\frac{\varkappa}{2}, \qquad \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{L\,C}}. \tag{2}$$

Aus den Randbedingungen $I_0 = I_N = 0$ erhält man

$$I_n = A\,\sin\varkappa n, \qquad \varkappa = \frac{\pi\,r}{N}. \tag{3}$$

Dabei kann r beliebige ganzzahlige Werte annehmen ($r = 1, 2, \ldots$). Der Wert $r = 0$ entspricht dem Strom Null im Kreis. Wegen der Periodizität von $\sin(\varkappa/2)$ muß die Zahl der Eigenfrequenzen im System jedoch endlich sein. Um das gesamte Spektrum der Frequenzen zu erhalten, genügt es, r in den Grenzen $1 \leqq r \leqq N$ zu variieren. Dabei ändert sich $\varkappa$ in den Grenzen $0 < \varkappa \leqq \pi$, und jedem $\varkappa$ entspricht eine Eigenfrequenz; insgesamt gibt es N Frequenzen, was im Falle eines Systems aus N gekoppelten Kreisen auch zu erwarten ist. Sie liegen im Intervall $0 < \omega \leqq 2\omega_0$.

Zur Interpretation der Größe $\varkappa$ führen wir die Koordinate $y_n = a\,n$ des n-ten Gliedes ein (a ist die „Länge" eines Gliedes der Leitung). Dann kann man (3) zusammen mit dem Zeitfaktor in der Form

$$I_n(t) = I_0 \sin k y_n \, \mathrm{e}^{-i\omega_k t} \tag{4}$$

schreiben, wobei $k = \varkappa/a$ ist.

Der Ausdruck (4) stellt eine Superposition zweier Wellen dar, die in entgegengesetzten Richtungen laufen. k spielt die Rolle eines „Wellenvektors" der Schwingungen, die sich in der aus einzelnen diskreten Gliedern bestehenden Leitung ausbreiten. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit dieser Wellen können mit Hilfe der üblichen Gleichungen

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \qquad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{5}$$

berechnet werden. Da ω nichtlinear von k abhängt, unterscheiden sich v_φ und v_g voneinander, d.h., es besteht eine Dispersion. Mit (2) folgt

$$v_\varphi = \frac{2\omega_0}{k} \sin\frac{k\,a}{2}, \qquad v_g = \omega_0\, a \cos\frac{k\,a}{2}. \tag{6}$$

Die Größe $2\pi/k$ hat die Bedeutung einer „Wellenlänge" der Schwingungen im diskreten Kreis; für lange Wellen ($\lambda \gg a$) ist $k\,a \ll 1$. Daraus folgt, daß Phasen- und Gruppengeschwindigkeit $v_\varphi = v_g = \omega_0\, a$ sind und nicht von k abhängen, d.h., es tritt keine Dispersion auf. In Abb. 56 sind ω und v_g in Abhängigkeit von k graphisch dargestellt.

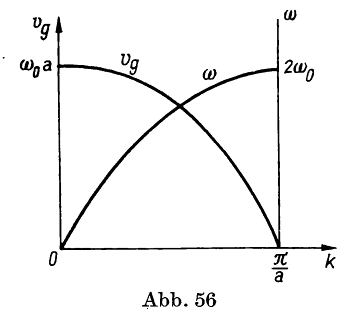


Abb. 56

Die elektrischen Schwingungen des betrachteten Kreises sind den mechanischen Schwingungen einer linearen einatomigen Kette analog, die als eindimensionales Modell eines Kristalls dienen kann. Der Induktivität L entspricht die Masse des Atoms und der Größe $1/C$ die Federkonstante.[1])

[1]) Näheres über die Schwingungen von Atomketten findet man z.B. bei M. A. Leontowitsch: Statistische Physik, Moskau 1944, und M. Born und K. Huang: Dynamical Theory of Crystal Lattices, Oxford 1954. Die Analogien zwischen elektrischen und mechanischen Schwingungen werden in [15], Kap. 3 und 4, betrachtet.

358.
$$\Delta r = \frac{2N}{\pi} \frac{\Delta \omega}{\sqrt{4\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

359. Wir bezeichnen die Ströme in den Kreisen mit der Induktivität L_1 mit I und in den Kreisen mit der Induktivität L_2 mit I'.

Die KIRCHHOFFschen Gleichungen lauten dann

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\omega L_1}{c^2} I_n + \frac{1}{\omega C}(2I_n - I'_n - I'_{n-1}) &= 0, \\ -\frac{\omega L_2}{c^2} I'_n + \frac{1}{\omega C}(2I'_n - I_n - I_{n+1}) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Führt man die Frequenzen $\omega_1 = c/\sqrt{L_1 C}$ und $\omega_2 = c/\sqrt{L_2 C}$ ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} (2\omega_1^2 - \omega^2) I_n &= \omega_1^2 (I'_n + I'_{n-1}), \\ (2\omega_2^2 - \omega^2) I'_n &= \omega_2^2 (I_n + I_{n+1}). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems setzen wir in der Form

$$I_n = A\, e^{i\varkappa n}, \quad I'_n = B\, e^{i\varkappa n} \quad (3)$$

an, wobei A, B und $\varkappa$ Konstanten sind. Setzt man dies in (2) ein, so erhält man

$$A(2\omega_1^2 - \omega^2) = B\,\omega_1^2(1 + e^{-i\varkappa}), \quad B(2\omega_2^2 - \omega^2) = A\,\omega_2^2(1 + e^{i\varkappa}). \quad (4)$$

Durch Nullsetzen der Systemdeterminante ergibt sich die Beziehung

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \frac{\varkappa}{2}} \quad (5)$$

zwischen der Frequenz ω und $\varkappa$. Um das gesamte Spektrum der Schwingungen zu erhalten, muß man $\varkappa$ von 0 bis π ändern. $\varkappa$ kann wie in der Aufgabe 357 mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden.

Der größte Unterschied zum Fall einer Leitung mit gleichen Gliedern besteht darin, daß hier — wie aus (5) folgt — jedem Wert von $\varkappa$ zwei Frequenzen entsprechen. Daher gibt es zwei Schwingungszweige. Wir bezeichnen die Frequenzen der beiden Schwingungen mit ω_+ und ω_-, wobei die Indizes + und — dem Vorzeichen der Wurzel in (5) entsprechen sollen. Die Abhängigkeit der Frequenzen von $\varkappa$ ist in Abb. 57 graphisch dargestellt.

Abb. 57

Die Schwingungen mit der Frequenz ω_- sind denen in einer Leitung mit gleichen Gliedern analog. Insbesondere gilt für kleine $\varkappa$ (lange Wellen)

$$\omega_- = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \varkappa,$$

d.h., es tritt keine Dispersion auf.

Für den Zweig ω_+ erhalten wir bei kleinen Werten von $\varkappa$ das Dispersionsgesetz in der Form

$$\omega_+ = a + b\,\varkappa^2.$$

Für $\varkappa \to 0$ strebt die Phasengeschwindigkeit gegen ∞, während die Gruppengeschwindigkeit Null wird.

Um den Charakter der Schwingungen in den beiden Zweigen untersuchen zu können, müssen wir das Verhältnis zwischen den Stromamplituden in benachbarten Kreisen für sehr lange ($\varkappa \ll 1$) und für die kürzesten ($\varkappa \approx \pi$) Wellen bestimmen. Aus den Gleichungen (4) ergibt sich im Falle $\varkappa \ll 1$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_- \approx 1 \qquad \text{für den Zweig } \omega_-,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_+ \approx -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = -\frac{L_2}{L_1} \qquad \text{für den Zweig } \omega_+.$$

Für den Zweig ω_- schwingt der Strom in benachbarten Kreisen mit derselben Amplitude und in der gleichen Phase. Für den Zweig ω_+ haben die Schwingungen in benachbarten Kreisen entgegengesetzte Phasen, und die Schwingungsamplituden sind den Induktivitäten umgekehrt proportional. Für $\varkappa = \pi$ gilt

$$\omega_+ = \sqrt{2}\,\omega_1, \qquad \omega_- = \sqrt{2}\,\omega_2.$$

Geht man in (4) zur Grenze $\varkappa \to \pi$ über, so ergibt sich

$$\left(\frac{B}{A}\right)_+ \to 0, \qquad \left(\frac{A}{B}\right)_- \to 0.$$

Im Grenzfall $\varkappa = \pi$ erfolgen die Schwingungen mit der Frequenz $\omega_+ = c/\sqrt{2/L_1 C}$ also nur in den Kreisen mit den Induktivitäten L_1 und die Schwingungen mit der Frequenz $\omega_- = c\,\sqrt{2/L_2 C}$ nur in den Kreisen mit den Induktivitäten L_2.

Die in dieser Aufgabe betrachteten Schwingungen mit den Frequenzen ω_- und ω_+ sind den akustischen und optischen Schwingungen in einer linearen Atomkette aus zwei Sorten von Atomen mit verschiedenen Massen analog (vgl. die auf S. 281 angegebene Literatur).

360. Es ist

$$I_n = A\,q_1^n + B\,q_2^n, \tag{1}$$

wobei q_1 und q_2 die Wurzeln der Gleichung

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) q + 1 = 0 \tag{2}$$

bedeuten. Die Konstanten A und B werden mit Hilfe der Randbedingungen $I_N = 0$ und $(I_0 - I_1)\,Z_2 = U_1$ bestimmt. Die zweite Bedingung bedeutet, daß zwischen den Punkten $a'b'$ (s. Abb. 23) die Spannung U_1 liegt. Benutzt man die aus (2) folgende Beziehung $q_1 q_2 = 1$, so erhält man schließlich

$$U_2 = I_{N-1} Z_2 = U_1 \frac{q_2 - q_1}{(1 - q_1)\,q_2^N - (1 - q_2)\,q_1^N}.$$

361. Der Übertragungskoeffizient K ergibt sich aus den Resultaten der vorigen Aufgabe:

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)\, q_1^N - (1 - q_1)\, q_2^N}.$$

Im Nenner von K kommen die Faktoren q_1^N und q_2^N vor. Da $q_1 q_2 = 1$ gilt, sind die beiden Fälle

$$a)\ |q_1| = |q_2| = 1,$$

$$b)\ |q_1| > 1,\ |q_2| < 1$$

möglich. Im ersten Fall sind q_1^N und q_2^N dem Betrage nach gleich 1, und K ist ebenfalls von der Ordnung 1. Im zweiten Fall gilt bei $N \gg 1$, $|q_1^N| \gg 1$ und $|q_2^N| \ll 1$ die Beziehung

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)\, q_1^N} \ll 1.$$

Die Frequenzintervalle, für die die Fälle *a*) und *b*) realisiert sind, ergeben sich aus der Gleichung (2) der Aufgabe 360:

$$q_{1,2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 - 1}.$$

Ist der Radikand negativ, so sind q_1 und q_2 zwei konjugiert komplexe Wurzeln, die dem Betrage nach gleich 1 sind (Fall *a*). Bei positivem Radikanden sind q_1 und q_2 reell und verschieden voneinander (Fall *b*). Setzt man den Radikanden gleich Null, so erhält man das Gebiet der (Z_1, Z_2)-Werte für den Fall *a*):

$$-4 \leqq \frac{Z_1}{Z_2} \leqq 0.$$

Das entspricht Werten von ω^2 zwischen $c^2/L_1 C_1$ und $c^2(4C_1 + C_2)/C_1 C_2(4L_2 + L_1)$.

362. Wir betrachten den n-ten geschlossenen Kreis der langen Leitung (Abb. 58). Man kann diesen Kreis als Ersatzschaltung für einen Abschnitt der Länge a einer Leitung mit verteilten Parametern betrachten, wobei ΔL die Induktivität und ΔC die Kapazität des betrachteten Abschnitts sind. Im Falle einer beliebigen Zeitabhängigkeit des Stromes in der Leitung lautet die KIRCHHOFFsche Gleichung für den Kreis

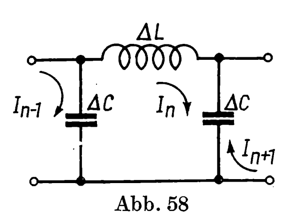


Abb. 58

$$-\frac{1}{c^2}\Delta L \frac{\partial I_n}{\partial t} + \frac{q_{n-1,n}}{\Delta C} - \frac{q_{n+1,n}}{\Delta C} = 0, \qquad (1)$$

wobei $q_{n-1,n}$ und $q_{n+1,n}$ die Ladungen auf den oberen Belegungen des linken bzw. rechten Kondensators bedeuten. Differenziert man (1) nach der Zeit und benutzt die Beziehungen

$$\dot{q}_{n-1,n} = -I_n + I_{n-1}, \quad \dot{q}_{n,n+1} = I_n - I_{n+1},$$

so erhält man

$$\frac{1}{c^2}\Delta L\frac{\partial^2 I_n}{\partial t^2}+\frac{1}{\Delta C}(2I_n-I_{n-1}-I_{n+1})=0. \tag{2}$$

Man muß nun von der diskreten Variablen n zur Ortskoordinate z in der Leitung mit stetig veränderlichen Parametern übergehen. Dazu setzen wir

$$I_n(t)=I(z,t),\quad I_{n-1}(t)=I(z-a,t),$$
$$I_{n+1}(t)=I(z+a,t)$$

und berechnen die Differenzen

$$I_n-I_{n-1}\approx\frac{\partial I}{\partial z}a-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}a^2,$$

$$I_n-I_{n+1}\approx-\frac{\partial I}{\partial z}a-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}a^2.$$

Setzt man dies in (2) ein und berücksichtigt, daß $L=\Delta L/a$ und $C=\Delta C/a$ Induktivität und Kapazität je Längeneinheit sind, so erhält man die Gleichung

$$\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=\frac{1}{C}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}. \tag{3}$$

Das ist die Gleichung einer langen Leitung ohne Verluste. In einer realen langen Leitung gibt es immer Verluste sowohl durch die Widerstände in den Leitern als auch durch die nichtideale Isolation zwischen den Leitern.

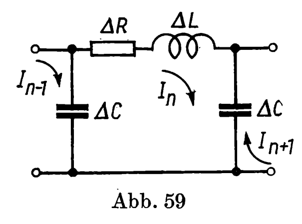


Abb. 59

Die Ersatzschaltung für den Fall, daß der zweite Faktor nicht berücksichtigt wird (d.h., daß die Isolation der Leiter als ideal angenommen wird), ist in Abb. 59 dargestellt. Die Gleichung der langen Leitung (Telegraphengleichung) ergibt sich analog wie (3):

$$\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}+R\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{C}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet R den Wirkwiderstand der Leiter je Längeneinheit.

363. Löst man die in der vorigen Aufgabe abgeleitete Gleichung (3), so findet man

$$\omega=v\,k,$$

wobei $v=c/\sqrt{LC}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen in der langen Leitung bedeutet; ferner gilt $k=\pi r/l$, $r=1,2,3,\ldots$; L und C sind Induktivität bzw. Kapazität je Längeneinheit. In diesem Spektrum der langen Leitung ist zum Unterschied vom Spektrum einer langen Leitung mit diskreten Parametern die Zahl der Eigenfrequenzen unendlich groß. Das hängt damit zusammen, daß die lange Leitung mit verteilten Parametern ein Kontinuum mit unendlich vielen Freiheitsgraden ist, während die Zahl N der Freiheitsgrade einer langen Leitung mit diskreten Parametern endlich ist. Im Falle einer idealen langen Leitung ist auch charakteristisch, daß keine Dispersion auftritt.

364. Wir gehen vom OHMschen Gesetz in der Differentialform $\mathfrak{j} = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{(e)})$ aus, in dem $\mathfrak{E}^{(e)}$ die Feldstärke der eingeprägten Kräfte bedeutet. Drücken wir $\mathfrak{E}$ durch die Potentiale aus:

$$\mathfrak{E} = -\vec{V}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{E}^{(e)} = \frac{\mathfrak{j}}{\sigma} + \vec{V}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t},$$

nehmen den Leiter als dünn an und integrieren beide Seiten der zweiten Gleichung über die vom Leiter eingenommene Kurve, so ergibt sich

$$\oint \mathfrak{E}^{(e)}\,\mathrm{d}\mathfrak{l} = \oint \frac{\mathfrak{j}}{\sigma}\,\mathrm{d}\mathfrak{l} + \oint \vec{V}\varphi\,\mathrm{d}\mathfrak{l} + \frac{1}{c}\oint \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathfrak{l}. \tag{1}$$

Das Integral auf der linken Seite von (1) stellt die äußere elektromotorische Kraft $V^{(e)}$ dar, die in den Kreis eingeschaltet wird; das Integral

$$\oint \frac{\mathfrak{j}}{\sigma}\,\mathrm{d}\mathfrak{l} = IR$$

bestimmt die Verluste an JOULEscher Wärme je Zeiteinheit. Für das zweite Integral in (1) gilt

$$\oint \vec{V}\varphi\,\mathrm{d}\mathfrak{l} = \oint \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Das letzte Integral formen wir etwas um. Wegen der Retardierung ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\oint \frac{I\left(t - \frac{r}{c}\right)\mathrm{d}\mathfrak{l}'}{r},$$

$$I\left(t - \frac{r}{c}\right) = I_0 \exp\left\{-i\,\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right\}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -i\,\omega\,\mathfrak{A}.$$

Setzt man dies in (1) ein und trennt Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$V^{(e)}(t) = I(t)\left[\left(R + \frac{\omega}{c^2}\oint\oint \frac{\sin\frac{\omega r}{c}\,\mathrm{d}\mathfrak{l}\,\mathrm{d}\mathfrak{l}'}{r}\right) - \frac{i\,\omega}{c^2}\oint\oint \frac{\cos\frac{\omega r}{c}\,\mathrm{d}\mathfrak{l}\,\mathrm{d}\mathfrak{l}'}{r}\right].$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist der komplexe Widerstand des Stromkreises. Der Wirkwiderstand ist $R + R_r(\omega)$ mit

$$R_r(\omega) = \frac{\omega}{c^2}\oint\oint \frac{\sin\frac{\omega r}{c}}{r}\,\mathrm{d}\mathfrak{l}\,\mathrm{d}\mathfrak{l}'.$$

R ist durch die Verluste infolge der Erwärmung des Leiters bedingt. $R_r(\omega)$ charakterisiert die Energieverluste durch Strahlung und wird als Strahlungswiderstand bezeichnet (s. die folgende Aufgabe).

Der Blindwiderstand ist $-i\,\omega L(\omega)/c^2$, wobei

$$L(\omega) = \oint\oint \frac{\cos\frac{\omega r}{c}}{r}\, \mathrm{d}\mathfrak{l}\, \mathrm{d}\mathfrak{l}'$$

die von der Frequenz abhängige Induktivität bedeutet.

Wir betrachten noch den Fall $c/\omega = \lambda/2\pi \gg l$, wobei l die Länge des Stromkreises bedeutet. Im Integrationsgebiet gilt $\omega\, r/c \ll 1$, und unter Berücksichtigung des quadratischen Terms in der Entwicklung des Kosinus erhalten wir

$$L(\omega) \approx \oint\oint \frac{\mathrm{d}\mathfrak{l}\, \mathrm{d}\mathfrak{l}'}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \oint\oint r\, \mathrm{d}\mathfrak{l}\, \mathrm{d}\mathfrak{l}'.$$

Der erste Term in diesem Ausdruck hängt nicht von der Frequenz ab und stellt die übliche Induktivität dar;[1]) der zweite Term ist eine Korrektion, die bei hohen Frequenzen wesentlich wird.

In der Entwicklung des Sinus muß der Term dritter Ordnung berücksichtigt werden, da das Integral über den ersten (linearen) Term Null ist. Der Strahlungswiderstand ist

$$R_r(\omega) = -\frac{\omega^4}{6c^5}\oint\oint r^2\, \mathrm{d}\mathfrak{l}\, \mathrm{d}\mathfrak{l}'.$$

365. Man erhält

$$L(\omega) = L + \frac{64\pi^4}{3}\,\frac{a^4}{\lambda^3},$$

$$R_r(\omega) = \frac{2\pi^2}{3c}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4.$$

Der stromführende Ring ist ein magnetischer Dipol. Die Energie, die in der Zeiteinheit ausgestrahlt wird, ist durch $2\,\ddot{\mathfrak{m}}^2/3c^3$ gegeben, wobei $\mathfrak{m}$ das magnetische Dipolmoment bedeutet.

Der Proportionalitätsfaktor zwischen der ausgestrahlten Energie und $\overline{I^2}$ ist $2\pi^2 a^2 \omega^4/3c^5$ und stimmt mit $R_r(\omega)$ überein.

7.2. Wirbelströme und Skineffekt

366. Man erhält

$$H(x) = H_0\left(\frac{\sinh^2\frac{x}{\delta} + \cos^2\frac{x}{\delta}}{\sinh^2\frac{h}{\delta} + \cos^2\frac{h}{\delta}}\right)^{1/2}, \quad H_0 = \frac{4\pi}{c} I_0\, n, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}.$$

Für $\delta \ll h$ ist $H(x) = H_0\, \mathrm{e}^{-(h-|x|)/\delta}$, und für $\delta \gg h$ gilt $H(x) = H_0$ (s. Aufgabe 247).

[1]) Bei der praktischen Anwendung muß man zur Berechnung der Induktivität die Gleichung (5.18) benutzen, da das Integral $\oint\oint \mathrm{d}\mathfrak{l}\, \mathrm{d}\mathfrak{l}'/r$ divergiert. Die Divergenz ergibt sich daraus, daß der Leiter als unendlich dünn (linear) angenommen wird.

367. Da das System bezüglich der Zylinderachse symmetrisch und das primäre Magnetfeld H_0 homogen ist, müssen die Wirbelströme im Zylinder auf Kreisen fließen, deren Ebenen senkrecht auf der Zylinderachse stehen. Diese Ströme erzeugen dasselbe Magnetfeld wie ein System einzelner koaxialer Spulen. Das Magnetfeld einer Spule ist jedoch im Außenraum gleich Null und im Innern längs der Spulenachse gerichtet. Das gesamte Magnetfeld stimmt also außerhalb des Zylinders mit dem Feld H_0 überein und wird innerhalb des Zylinders durch die erste der Gleichungen (7.12), die infolge der Axialsymmetrie die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d} r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d} H}{\mathrm{d} r} + k^2 H = 0$$

mit

$$k^2 = \frac{1+i}{\delta}, \qquad H = H_z(r), \quad H_\alpha = H_r = 0$$

hat, sowie durch die Grenzbedingung $H(a) = H_0$ bestimmt.

Die Lösung, die bei $r = 0$ endlich ist und der angegebenen Grenzbedingung genügt, wird durch eine BESSEL-Funktion nullter Ordnung ausgedrückt:

$$H = H_0 \frac{J_0(k\,r)}{J_0(k\,a)}.$$

Außerhalb des Zylinders gilt

$$H = H_0 \quad \text{für} \quad a \leqq r \leqq b, \qquad H = 0 \quad \text{für} \quad r > b.$$

Die Stromdichte und das elektrische Feld innerhalb des Zylinders werden mit Hilfe der zweiten der Formeln (7.11) berechnet:

$$j = j_\alpha = \sigma E_\alpha = \frac{k\,c}{4\pi}\frac{J_1(k\,r)}{J_0(k\,a)} H_0, \qquad E_r = E_z = 0.$$

Zur Bestimmung des elektrischen Feldes außerhalb des Zylinders benutzen wir die MAXWELLsche Gleichung für rot $\mathfrak{E}$, die wir in der integralen Form schreiben:

$$\oint E_l\,\mathrm{d}l = \frac{i\,\omega}{c}\int B_n\,\mathrm{d}S.$$

Innerhalb des Zylinders ist nur eine Komponente des elektrischen Feldes (E_α) von Null verschieden; aus der Grenzbedingung auf der Staboberfläche und der Symmetrie des Systems folgt, daß außerhalb des Zylinders ebenfalls nur die Komponente E_α, die nur von r abhängt, von Null verschieden ist. Wählt man für l einen Kreis, so hat das Linienintegral den Wert $2\pi\,r E_\alpha$. Bei der Berechnung des Flächenintegrals benutzen wir die Beziehungen (A III.12). Schließlich erhalten wir

$$E_\alpha = \frac{k\,c H_0}{4\pi\,\sigma}\frac{J_1(k\,a)}{J_0(k\,a)}\frac{a}{r} + \frac{H_0}{2r}(r^2 - a^2) \quad \text{für} \quad a \leqq r \leqq b,$$

$$E_\alpha = \frac{k\,c H_0}{4\pi\,\sigma}\frac{J_1(k\,a)}{J_0(k\,a)}\frac{a}{r} + \frac{H_0}{2r}(b^2 - a^2) \quad \text{für} \quad r > b.$$

Bei Abwesenheit des Zylinders, d.h. für $a = 0$, ist das Feld

$$E_\alpha = \frac{1}{2} H_0 r \quad (r < b), \qquad E_\alpha = \frac{H_0 b^2}{2r} \quad (r > b).$$

Das mit dem Vorhandensein des Zylinders zusammenhängende zusätzliche Magnetfeld ist also für $r > a$ gleich Null, obwohl das zusätzliche elektrische Feld von Null verschieden ist. Das hängt damit zusammen, daß die exakte Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t},$$

die außerhalb des Leiters gilt, durch die genäherte Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$ ersetzt wird (in der quasistationären Näherung vernachlässigen wir den Verschiebungsstrom). Bei exakter Lösung des Problems ist das zusätzliche Magnetfeld außerhalb des Leiters ebenfalls ungleich Null (s. die Aufgabe 418, in der die Beugung einer ebenen Welle an einem leitenden Zylinder betrachtet wird).

368. Bei kleinen Frequenzen ($|k a| \ll 1$ oder $\delta \gg a$) gilt

$$j = i \frac{c H_0}{4\pi} \frac{r}{\delta^2} = \frac{i \sigma \omega H_0}{2c} r.$$

Folglich hängt die Stromdichte linear von r ab und ist der Frequenz proportional.

Bei großen Frequenzen ($|k a| \gg 1$ oder $\delta \ll a$) muß man die asymptotische Form der Bessel-Funktionen benutzen:

$$j = (i - 1) \frac{c H_0}{4\pi \delta} \sqrt{\frac{a}{r}} \exp\left\{-(1 + i) \frac{a - r}{\delta}\right\}.$$

Für $a - r \gg \delta$ wird die Stromdichte verschwindend klein. Bei großen Frequenzen konzentriert sich der Strom also im wesentlichen in einer dünnen Oberflächenschicht.

369. Man erhält

$$Q = - \frac{\pi a^2 n^2 I_0^2}{\sigma} \operatorname{Re}\left[\frac{k J_1(k a)}{J_0(k a)}\right], \qquad k^2 = i \frac{4\pi \mu \sigma \omega}{c^2}.$$

Für $|k a| \ll 1$ (kleine Frequenzen) wird

$$Q = \frac{\pi n^2 I_0^2}{16\sigma} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = \pi^3 \sigma \left(\frac{a^2 \mu n \omega I_0}{c^2}\right)^2,$$

für $|k a| \gg 1$ (große Frequenzen)

$$Q = \frac{\pi n^2 I_0^2}{\sigma} \left(\frac{a}{\delta}\right) = \frac{a n^2 I_0^2}{c} \sqrt{\frac{2\pi^3 \mu \omega}{\sigma}}.$$

Die Energiedissipation ist bei kleinen Frequenzen proportional ω^2 und bei großen Frequenzen proportional $\sqrt{\omega}$.

370. Man findet

$$\beta = \beta' + i\beta'' = -\frac{a^2}{4}\left[1 - \frac{2}{k a}\frac{J_1(k a)}{J_0(k a)}\right], \qquad k^2 = i\,\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}.$$

Für $|k a| \gg 1$ (große Frequenzen) wird

$$\beta' = -\frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{c}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right), \qquad \beta'' = \frac{c a}{4\sqrt{2\pi\sigma\omega}},$$

also $\beta'' \to 0$, d.h., infolge der Verdrängung des Feldes aus dem Leiter werden die Verluste kleiner.

Für $|k a| \ll 1$ (kleine Frequenzen) erhält man

$$\beta' = -\frac{\pi^2 a^6 \sigma^2 \omega^2}{12 c^4}, \qquad \beta'' = \frac{\pi a^4 \sigma \omega}{8 c^2}.$$

Für $\omega \to 0$ ist also $\beta \to 0$; das hängt damit zusammen, daß $\mu = 1$, d.h. die statische magnetische Polarisierbarkeit gleich Null ist.

371. Das durch die Wirbelströme hervorgerufene magnetische Moment hat infolge der Symmetrie des Systems die Richtung des äußeren Magnetfeldes. Daher kann man das gesamte Magnetfeld im Außengebiet in der Form

$$\mathfrak{H}_2(\mathfrak{r}) = \frac{4\mathfrak{r}(\mathfrak{m}\,\mathfrak{r})}{r^4} - \frac{2\mathfrak{m}}{r^2} + \mathfrak{H}_0 \tag{1}$$

schreiben. Dabei bedeutet $\mathfrak{m}$ das unbekannte magnetische Moment je Längeneinheit des Zylinders, das die Richtung von $\mathfrak{H}_0$ hat, und $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor in der zur Zylinderachse senkrechten Ebene. Dem Feld $\mathfrak{H}_2$ entspricht das Vektorpotential

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{2\mathfrak{m}\times\mathfrak{r}}{r^2} + \mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{r},$$

in Komponentenschreibweise

$$A_{2z} \equiv A_2 = \left(\frac{2m}{r} + H_0 r\right)\sin\alpha, \qquad A_{2r} = A_{2\alpha} = 0. \tag{2}$$

Der Winkel α wird von der Richtung von $\mathfrak{H}_0$ aus gezählt.

Im Außengebiet hat das Vektorpotential also nur eine Longitudinalkomponente (bezüglich der Zylinderachse), die proportional $\sin\alpha$ ist. Die Bedingungen für die Stetigkeit der Feldkomponenten an der Grenze können erfüllt werden, indem man das Vektorpotential im Innern in analoger Form bestimmt:

$$A_{1z} \equiv A_1 = F(r)\sin\alpha, \qquad A_{1r} = A_{1\alpha} = 0. \tag{3}$$

Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ wird im allgemeinen durch die beiden Potentiale $\mathfrak{A}$ und φ ausgedrückt.

Wie üblich, unterwerfen wir die Potentiale der Zusatzbedingung (Lorentz-Konvention)

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Wegen der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$, die aus (2) und (3) folgt, ist dann $\partial\varphi/\partial t = -i\omega\varphi = 0$ und damit

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\mathfrak{A}.$$

Daher genügt $\mathfrak{A}$ derselben Gleichung wie das elektrische Feld [s. (7.12)]. Die Lösung dieser Gleichung, die bei $r = 0$ beschränkt ist, ist die BESSEL-Funktion:

$$F(r) = C J_1(k r), \quad A_1 = C J_1(k r)\sin\alpha. \tag{4}$$

Die Konstanten C und m in (4) und (2) werden aus der Bedingung bestimmt, daß das innere Feld $\mathfrak{H}_1$ an der Zylindergrenze mit dem äußeren Feld $\mathfrak{H}_2$ übereinstimmen muß ($\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$ für $r = a$). Mit Hilfe von (A III.9) folgt

$$C = \frac{2H_0}{kJ_0(k a)}, \quad m = -\frac{a^2 H_0}{2}\left(1 - \frac{2}{k a}\frac{J_1(k a)}{J_0(k a)}\right). \tag{5}$$

Der Ausdruck für m zeigt, daß die transversale magnetische Polarisierbarkeit des Zylinders

$$\beta = -\frac{a^2}{2}\left[1 - \frac{2}{k a}\frac{J_1(k a)}{J_0(k a)}\right] \tag{6}$$

doppelt so groß wie seine longitudinale Polarisierbarkeit ist (s. Aufgabe 370). Die Komponenten des Magnetfeldes innerhalb des Zylinders werden durch (4) und (5) bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} H_{1r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha} = 2H_0\frac{J_1(k r)}{k r J_0(k a)}\cos\alpha, \qquad H_{1z} = 0,\\ H_{1\alpha} &= -\frac{\partial A_1}{\partial r} = -2H_0\frac{J_1'(k r)}{J_0(k a)}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wir berechnen noch die Stromdichte im Zylinder. Aus

$$\mathfrak{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

ergibt sich

$$j_z = -\frac{cH_0}{2\pi}\frac{J_1(k r)}{J_0(k a)}\sin\alpha, \quad j_\alpha = j_r = 0. \tag{8}$$

Aus (8) folgt, daß zu jedem Zeitpunkt in den beiden Zylinderhälften $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ und $\pi \leqq \alpha \leqq 2\pi$ entgegengesetzt gerichtete Ströme fließen; der Gesamtstrom durch den Zylinderquerschnitt ist Null. Die radiale Abhängigkeit der Stromdichte ist dieselbe wie im Falle eines Zylinders in einem longitudinalen Feld und wurde in der Aufgabe 368 untersucht. (Man muß jedoch berücksichtigen, daß die Ströme im Falle eines longitudinalen Feldes auf Kreisen fließen, deren Ebenen auf der Zylinderachse senkrecht stehen, während die Ströme im Falle eines transversalen Feldes in Richtung der Zylinderachse fließen.)

372. Man berechnet die mittlere Wärmeabgabe je Längeneinheit des Zylinders am einfachsten nach der Gleichung (7.17), indem man den Energiefluß betrachtet, der durch den Zylindermantel fließt. Benutzt man die Resultate

der Aufgabe 371, so findet man

$$Q = -\frac{a\,c^2 H_0^2}{8\pi\sigma}\,\mathrm{Re}\left(\frac{k J_1(k\,a)}{J_0(k\,a)}\right).$$

Dasselbe Ergebnis erhält man mit Hilfe der Gleichung (7.16), wenn man bei der Integration von Produkten der BESSEL-Funktionen die Gleichung (AIII.13) benutzt.

373. Zur Bestimmung des Drehmoments müssen das elektrische und das magnetische Feld innerhalb des Zylinders bekannt sein. Man kann sie analog wie im Falle des linear polarisierten äußeren Feldes erhalten:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= -\frac{2H_0 J_1(k\,r)}{k\,r\,J_0(k\,a)}\,e^{i\,\alpha}, \qquad H_\alpha = -2\,i\,H_0\,\frac{J_1'(k\,r)}{J_0(k\,a)}\,e^{i\,\alpha},\\ j_z &= \frac{i\,c\,k H_0}{2\pi}\,\frac{J_1(k\,r)}{J_0(k\,a)}\,e^{i\,\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Kraft, die an der Volumeneinheit des Zylinders angreift, wird mit Hilfe der Gleichung

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{j}\times\mathfrak{H} \tag{2}$$

berechnet (innerhalb des Zylinders sei $\mu = 1$). Die Radialkomponente dieser Kraft ruft einen Druck in radialer Richtung hervor, während die Azimutkomponente ein Drehmoment erzeugt. Da $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{H}$ komplex sind, ist der Mittelwert der Azimutkomponente der Kraft

$$\bar{f}_\alpha = \frac{1}{2c}\,\mathrm{Re}\,(j_z H_r^*). \tag{3}$$

Das an der Längeneinheit des Zylinders angreifende Drehmoment ergibt sich durch Multiplikation der mittleren Kraft (3) mit r und Integration über den Zylinderquerschnitt. Das Integral wird mit Hilfe der Gleichung (A III.13) berechnet. Man erhält

$$\bar{N} = -\frac{a H_0^2}{|k|^2}\,\mathrm{Re}\left(k\,\frac{J_1(k\,a)}{J_0(k\,a)}\right). \tag{4}$$

Dasselbe Ergebnis kann man auch auf einem anderen Wege erhalten. Man kann nämlich das Drehmoment mit Hilfe der Gleichung

$$\mathfrak{N}(t) = \mathfrak{m}(t)\times\mathfrak{H}_0(t) \tag{5}$$

durch das magnetische Moment des Systems ausdrücken. Bestimmt man $\bar{N}_z = \bar{N}$ durch die komplexen Amplituden $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{m}$ sowie $\mathfrak{m}$ durch die transversale magnetische Polarisierbarkeit des Zylinders, so erhält man ebenfalls die Gleichung (4).

Für kleine Frequenzen folgt aus (4)

$$\bar{N} = \frac{1}{4}\,\frac{a^4 H_0^2}{\delta^2} = \frac{\pi\sigma\omega}{4c^2}\,H_0^2\,a^4 \tag{6}$$

und für große Frequenzen

$$\bar{N} = \frac{1}{2} a\, \delta H_0^2 = \frac{c\, a}{\sqrt{8\pi\sigma\omega}} H_0^2. \tag{7}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß das Drehmoment in den beiden Grenzfällen sehr kleiner und sehr großer Frequenzen verschwindet.

Ist das Feld linear polarisiert, so ist das mittlere Drehmoment Null (das ergibt sich formal daraus, daß das Integral über α bei der Berechnung von N verschwindet; vgl. die Aufgabe 371, in der $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{H}$ für diesen Fall berechnet werden). Das Drehmoment wird also durch ein „rotierendes" Feld erzeugt.

Die in dieser Aufgabe betrachtete Erscheinung bildet die Grundlage für die Konstruktion des Asynchronmotors.

374. Neben dem ruhenden Bezugssystem, in dem die z-Achse mit der Zylinderachse übereinstimmt und die x-Achse die Richtung des äußeren Feldes $\mathfrak{H}_0$ hat, betrachten wir ein $\xi\,\eta\,z$-System, das gemeinsam mit dem Zylinder rotiert. In diesem System ist das äußere Magnetfeld

$$\mathfrak{H}_0(t) = (\mathfrak{H}_{01} - i\,\mathfrak{H}_{02})\, e^{-i\omega t}.$$

Dabei sind $\mathfrak{H}_{01}$ und $\mathfrak{H}_{02}$ konstante Vektoren gleicher Länge ($H_{01} = H_{02} = H_0$) in Richtung der Koordinatenachsen ξ bzw. η. Ein solches Feld wurde in der Aufgabe 373 betrachtet. Das von ihm erzeugte Drehmoment (im vorliegenden Fall bremsend) ist

$$\bar{N} = -\frac{a H_0^2}{|k|^2} \operatorname{Re}\left(k \frac{J_1(k\,a)}{J_0(k\,a)}\right).$$

375. Wie in der Aufgabe 367 gezeigt wurde, erzeugen die Wirbelströme, die im Zylinder bei der Änderung des äußeren longitudinalen Feldes entstehen, außerhalb des Zylinders kein zusätzliches Magnetfeld, während das im Zylinderinnern hervorgerufene Feld longitudinal ist und nur von r abhängt. Dieses Feld genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Das Magnetfeld innerhalb des Zylinders klingt offensichtlich mit der Zeit ab. Daher setzen wir die partikulären Lösungen der Gleichung (1) in der Form $F(r)\, e^{-\gamma t}$ an, wobei $\gamma > 0$ eine Konstante bedeutet. Für $F(r)$ erhalten wir die Bessel-Gleichung

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) + k^2 F(r) = 0 \tag{2}$$

mit $k^2 = 4\pi\mu\sigma\gamma/c^2$.

Die für $r = 0$ beschränkte Lösung der Gleichung (2) lautet $F(r) = C J_0(k\,r)$. Da das äußere Feld H_0 ausgeschaltet wird und das durch die Wirbelströme hervorgerufene zusätzliche Feld außerhalb des Zylinders Null ist, muß an der Grenze die Bedingung $H|_{r=a} = 0$ erfüllt sein, d.h.

$$J_0(k\,a) = 0 \tag{3}$$

gelten. Daraus erhalten wir $k_m a = \beta_m$, $m = 1, 2, \ldots$, wobei die β_m die Nullstellen der Funktion J_0 bedeuten. Die möglichen γ-Werte sind

$$\gamma_m = \frac{c^2 \beta_m^2}{4\pi \mu \sigma a^2}. \tag{4}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (1), die der betrachteten Randwertaufgabe entspricht, lautet

$$H(r, t) = \sum_m C_m J_0(k_m r)\, e^{-\gamma_m}. \tag{5}$$

Die Koeffizienten C_m können aus der Anfangsbedingung

$$H(r, 0) = \sum_m C_m J_0(k_m r) \tag{6}$$

bestimmt werden. Mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_0^1 x J_0(k_m x)\, J_0(k_n x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} [J_0'(k_m)]^2\, \delta_{mn} \tag{7}$$

der Bessel-Funktionen folgt

$$C_m = \frac{2}{a^2 [J_0'(k_m a)]^2} \int_0^a H(r, 0)\, J_0(k_m r)\, r\, \mathrm{d}r. \tag{8}$$

Im Anfangszeitpunkt ist das Feld $H(r, 0)$ gleich dem äußeren Feld H_0, da das konstante Magnetfeld nicht verschwindet, wenn man einen unendlich langen Zylinder hineinbringt, dessen Achse dem Feld parallel ist. Mit Hilfe der Gleichungen (A III.12) und (A III.9) ergibt sich

$$C_m = \frac{2 H_0}{(k_m a)\, J_1(k_m a)}. \tag{9}$$

Die Dämpfungsgeschwindigkeit des Feldes wird durch den kleinsten der Werte γ_m, also γ_1, bestimmt. Man erhält ihn, indem man in (4) die kleinste Wurzel der Bessel-Funktion, $\beta_1 \approx 2{,}4$, einsetzt. Die Dämpfungszeit des Feldes ist $\tau = 1/\gamma_1$.

376. Das Magnetfeld im Innern der Kugel ist in nullter Näherung (bezüglich der Frequenz) in der Aufgabe 281 bestimmt worden:

$$\mathfrak{H} = \frac{3}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0. \tag{1}$$

Das elektrische Feld im Innern der Kugel ist in derselben Näherung auf Grund von (7.11) gleich Null, da das konstante Magnetfeld kein elektrisches Feld hervorruft Zur Bestimmung des elektrischen Feldes in der nächsten (in ω linearen) Näherung benutzen wir die Gleichung (7.10) in integraler Form.

Aus Symmetriegründen fließen die Ströme in der Kugel auf Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf der Richtung von $\mathfrak{H}_0$ stehen; das elektrische Feld hat dieselbe Richtung.

Wählt man ein System von Kugelkoordinaten, dessen z-Achse die Richtung von $\mathfrak{H}_0$ hat, so ergibt sich

$$E = \frac{i\,\omega H}{2c}\, r \sin\vartheta\,, \qquad j = \sigma E\,, \tag{2}$$

wobei H durch die Gleichung (1) bestimmt wird. Die in der Kugel abgegebene Wärme Q erhält man durch Integration von $q = {}^1/_2\sigma\,|E|^2$ über das Kugelvolumen:

$$Q = \frac{3\pi\, a^5\, \sigma\, \omega^2 H_0}{5c^2(\mu + 2)^2}\,. \tag{3}$$

377. Außerhalb der Kugel ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \frac{3\mathfrak{r}(\mathfrak{m}\,\mathfrak{r})}{r^5} - \frac{\mathfrak{m}}{r^3}$$

mit $\mathfrak{m} = -{}^1/_2 a^3\, \mathfrak{H}_0$, wobei $\beta = -{}^1/_2 a^3$ die magnetische Polarisierbarkeit der Kugel bei starkem Skineffekt ist.

Innerhalb der Kugel gilt

$$H_\vartheta = -\frac{3}{2} H_0\, \mathrm{e}^{-(1-i)z/\delta} \sin\vartheta\,, \qquad H_r = H_\alpha = 0\,,$$

wobei z von der Oberfläche aus längs der Normalen in das Innere des Leiters hinein gezählt wird und die Polarachse des Kugelkoordinatensystems die Richtung von $\mathfrak{H}_0$ hat; für Q erhält man

$$Q = \frac{3a^2\, c}{8} \sqrt{\frac{\mu\,\omega}{2\pi\,\sigma}}\; H_0^2\,.$$

378. Im Falle eines starken Skineffektes verschwindet das Feld innerhalb des Ellipsoids, während es im Außengebiet den Gleichungen $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$, $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$ und den Randbedingungen $H_n|_S = 0$, $\mathfrak{H}|_{r\to\infty} \to \mathfrak{H}_0$ genügt, wobei $\mathfrak{H}_0$ das äußere Feld bedeutet und mit S die Oberfläche des Ellipsoids bezeichnet wurde.

Wir vergleichen dieses Problem mit dem Fall eines dielektrischen Ellipsoids mit $\varepsilon = 0$, das sich in einem konstanten elektrischen Feld befindet. Außerhalb des Ellipsoids genügt das elektrische Feld den Gleichungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0\,, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0 \tag{1}$$

und den Randbedingungen

$$E_n|_S = \varepsilon E_{n,\,\text{innen}}|_S = 0\,, \qquad \mathfrak{E}|_{r\to\infty} \to \mathfrak{E}_0\,. \tag{2}$$

Bedingungen für die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ braucht man nicht zu betrachten, da die Beziehungen (1) und (2) den Vektor $\mathfrak{E}$ im Außengebiet eindeutig bestimmen.

Wie wir sehen, stimmt der hier betrachtete Fall eines leitenden Ellipsoids bei starkem Skineffekt formal mit dem eines dielektrischen Ellipsoids mit $\varepsilon = 0$ überein. Setzt man in den Formeln in der Lösung zur Aufgabe 200 $\varepsilon_1 = 0$, so

erhält man die magnetischen Polarisierbarkeiten in den Hauptachsenrichtungen des Ellipsoids:

$$\beta^{(i)} = -\frac{V}{4\pi(1 - n^{(i)})}. \tag{3}$$

Dabei bedeuten $n^{(i)}$ den entsprechenden Depolarisationskoeffizienten und V das Volumen des Ellipsoids.

Für ein stark gestrecktes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a und $b \gg a$ (Stab) wird (s. Aufgabe 198)

$$\beta_\perp = -\frac{2}{3} a^2 b, \quad \beta_\| = -\frac{1}{3} a^2 b,$$

und für ein stark abgeplattetes Ellipsoid ($b \ll a$, Scheibe) gilt

$$\beta_\perp = -\frac{2a^3}{3\pi}, \quad \beta_\| = -\frac{1}{3} a^2 b \to 0 \quad \text{für} \quad b \to 0.$$

379. Wegen der Axialsymmetrie des Systems Kugel + äußeres Feld sind die Verteilung der Wirbelströme in der Kugel und das elektrische Feld ebenfalls axialsymmetrisch. Infolgedessen kann man annehmen, daß das elektrische Feld nur eine einzige Komponente $E_\alpha \neq 0$ besitzt, die nicht von α abhängen kann, d.h. $E_\alpha = f(r, \vartheta)$.

Wir suchen die Lösung der Gleichung (7.12) für das elektrische Gesamtfeld $\mathfrak{E}$ in der Form

$$E_\alpha = F(r) \sin\vartheta, \quad E_r = E_\vartheta = 0.$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für den LAPLACE-Operator eines Vektors in Kugelkoordinaten, der in der Aufgabe 47 angegeben wird, erhalten wir eine Gleichung für $F(r)$, die durch die Substitution

$$F(r) = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}}$$

in eine BESSEL-Gleichung übergeht, deren für $r = 0$ beschränkte Lösung

$$\chi(r) = A J_{3/2}(k r)$$

ist. Das Magnetfeld im Innern der Kugel wird aus der Gleichung (7.10) bestimmt. Das Magnetfeld im Außengebiet setzt sich aus dem äußeren Feld $\mathfrak{H}_0$ und dem Feld des magnetischen Dipols $\mathfrak{m}$ zusammen, dessen Richtung mit der von $\mathfrak{H}_0$ übereinstimmt:

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_0 + \frac{3\mathfrak{r}(\mathfrak{m}\,\mathfrak{r})}{r^5} - \frac{\mathfrak{m}}{r^3}.$$

Die Konstanten A und m werden aus den Grenzbedingungen für $\mathfrak{H}$ an der Kugeloberfläche bestimmt. Drückt man die BESSEL-Funktionen mit halbzahligem Index durch trigonometrische Funktionen aus, so erhält man

$$m = -\frac{a^3}{2}\left(1 - \frac{3}{k^2 a^2} + \frac{3}{k a} \cot k a\right) H_0, \quad A = \frac{3 i a \omega}{c \sin k a} \sqrt{\frac{\pi}{8k}}\, H_0.$$

380.

$$Q = -\frac{3a\,\delta^2 H_0^2}{8}\left(1 - \frac{a}{\delta}\,\frac{\sinh\dfrac{2a}{\delta} + \sin\dfrac{2a}{\delta}}{\cosh\dfrac{2a}{\delta} - \cos\dfrac{2a}{\delta}}\right).$$

381. Es ergibt sich

$$R = \frac{l}{c\,a}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\sigma}}\ \mathrm{Re}\left[(1+i)\,\frac{J_0(k\,a)}{J_1(k\,a)}\right]$$

mit $k = (1+i)\sqrt{2\pi\sigma\omega}/c$.

Für $|k\,a| \ll 1$ (kleine Frequenzen) wird

$$R = R_0\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\right],$$

wobei $R_0 = l/\pi a^2 \sigma$ den Widerstand gegenüber dem stationären Strom bedeutet, und für $|k\,a| \gg 1$ (große Frequenzen)

$$R = \frac{1}{\sigma}\,\frac{l}{2\pi a\,\delta} = \frac{l}{c\,a}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\,.$$

Wie aus der letzten Gleichung folgt, ist die effektive Querschnittsfläche des Leiters bei starkem Skineffekt gleich $2\pi a\,\delta$.

382. Man erhält

$$R = \frac{\omega\,\delta_2}{2a\,c^2}\,\frac{(\delta_1^2 - \delta_2^2)\sin\dfrac{2h}{\delta_2} - (\delta_1^2 + \delta_2^2)\sinh\dfrac{2h}{\delta_2} + 2\delta_1\delta_2\cos\dfrac{2h}{\delta_2}}{\left(\delta_1 \sin\dfrac{h}{\delta_2} + \delta_2\cos\dfrac{h}{\delta_2}\right)^2 + (\delta_1^2 + \delta_2^2)\sinh^2\dfrac{h}{\delta_2}}$$

mit

$$\delta_1 = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_1\omega}}, \qquad \delta_2 = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_2\omega}}.$$

383. Es ergibt sich

$$H' = \frac{2H_0}{k\,a\sinh k\,h + 2\cosh k\,h}$$

mit $k = (1+i)/\delta$.

Für $|k\,h| \ll 1$ (kleine Frequenzen) gilt $H' = H_0$, d.h., das Vorhandensein des Zylindermantels hat keinen Einfluß auf die Größe des Feldes. Für $|k\,h| \gg 1$ (große Frequenzen) ist

$$\sinh kh \approx \cosh kh \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(1+i)h/\delta};$$

wegen $a \gg \delta$ erhält man damit

$$H' = (1-i)\,\frac{\delta}{2a}\,\mathrm{e}^{-(1+i)h/\delta}\,H_0, \qquad H_0 \gg |H'|.$$

Eine starke Abschwächung des Feldes ergibt sich daraus, daß die im Mantel entstehenden Wirbelströme im Hohlraum ein zusätzliches Feld entgegengesetzter Richtung erzeugen.

384. Man erhält

$$j = \frac{2 i I_0 \mu \sigma \omega}{c^2 k a} \frac{\sinh k(h - x)}{\cosh k h},$$

wobei x von der Oberfläche aus in radialer Richtung in den Leiter hinein gezählt wird. Der Wirkwiderstand je Längeneinheit ist

$$R = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma} \frac{\sinh \frac{2h}{\delta} - \sin \frac{2h}{\delta}}{2\left(\sinh^2 \frac{h}{\delta} + \cos^2 \frac{h}{\delta}\right)}.$$

Hohlleiter und voller Leiter haben unter der Voraussetzung $\delta \ll h$ denselben Widerstand.

385. Wir wählen ein System von Zylinderkoordinaten, wie es in der Abb. 60 dargestellt ist. Bei schwachem Skineffekt muß die zur Rohrwand tangentiale Komponente des Magnetfeldes an der Oberfläche S der Wand der Bedingung

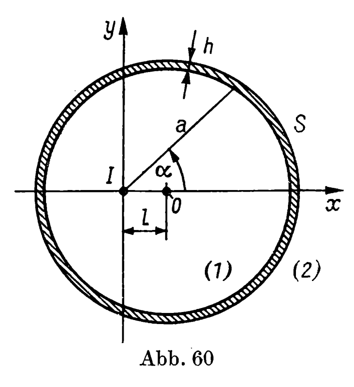


Abb. 60

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i \tag{1}$$

genügen, wobei $i = \sigma h E = \zeta E$ den Oberflächenstrom und ζ die Oberflächenleitfähigkeit bedeuten.

Das elektrische Feld, das natürlich nur eine von Null verschiedene z-Komponente hat, muß auf der Oberfläche S stetig sein:

$$E_1 = E_2 = E. \tag{2}$$

Der weitere Lösungsweg ist dem der Aufgabe 159 (Problem wenig nichtkonzentrischer Kugeln) sehr ähnlich. Bis auf Terme mit l/a genau lautet die Gleichung der Grenzfläche

$$r = a + l \cos\alpha. \tag{3}$$

Das Vektorpotential hat dieselbe Richtung wie der Strom. Wir setzen es in der Form

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2I}{c} \ln \frac{r}{a} + C_1 r \cos\alpha + C, \\ A_2 &= -\frac{2I'}{c} \ln \frac{r}{a} + \frac{B_1}{r} \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

an. Dabei sind C_1 und B_1 Funktionen der Zeit, die in l/a von erster Ordnung klein sind, und I' ist von nullter Ordnung in l/a.

Bei schwachem Skineffekt ($h \ll \delta$) genügt das Vektorpotential der Bedingung

$$A_1 = A_2 \quad \text{für} \quad r = a + l \cos\alpha . \tag{5}$$

Daraus erhalten wir unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $(l/a)^2$

$$B_1 = a^2\, C_1 + \frac{2(I' - I)\, l}{c}\,, \qquad C = 0 . \tag{6}$$

In der Grenzbedingung (1) kann man H_t durch H_α ersetzen. Wie man leicht sieht, führt das zu einem Fehler der Ordnung $(l/a)^2$. Wegen

$$H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}\,, \qquad i = \zeta E = -\frac{\zeta}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

gilt auf S

$$\frac{\partial A_1}{\partial r} - \frac{\partial A_2}{\partial r} = -\frac{4\pi\zeta}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}$$

oder bis auf l/a genau

$$\frac{2(I' - I)}{c\,a} + 2C_1 \cos\alpha = \frac{4\pi\zeta}{c^2}\left[\frac{2}{c\,a}\frac{\mathrm{d}(I\,l)}{\mathrm{d}t} + a\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}\right]\cos\alpha .$$

Daraus ergibt sich sofort $I = I'$; dieses Ergebnis kommt dadurch zustande, daß der Skineffekt als schwach angenommen wurde. Für C_1 ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t} + \varrho C_1 = \frac{2}{a^2 c}\frac{\mathrm{d}(I\,l)}{\mathrm{d}t} . \tag{7}$$

Der Parameter $\varrho = c^2/2\pi\, a\, \zeta$ stimmt mit dem Widerstand je Längeneinheit des Rohres, ausgedrückt in elektromagnetischen Einheiten, überein.

Gleichung (7) löst man durch Variation der Konstanten. Man erhält

$$C_1 = \frac{2}{c\,a^2}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\varrho(\tau - t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[I(\tau)\, l(\tau)]\, \mathrm{d}\tau .$$

(Wir nehmen an, daß für $t \to -\infty$ der Strom Null ist.)

Die Kraft f, die je Längeneinheit des Stromes I angreift, kann mit Hilfe der Gleichung

$$f_x = -\frac{1}{c} I H'_y$$

berechnet werden, wobei H'_y das durch den im Mantel fließenden Strom erzeugte Magnetfeld auf der Geraden bedeutet, längs der der Strom I fließt. Diesem Feld entspricht das Vektorpotential

$$A' = C_1\, r \cos\alpha = C_1\, y .$$

Daraus folgt

$$H'_y = -\frac{\partial A'}{\partial y} = -C_1 .$$

Schließlich erhalten wir

$$f_x = \frac{2I(t)}{c^2\,a^2}\int\limits_{\infty}^{t} \mathrm{e}^{\varrho(\tau-t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,[I(\tau)\,l(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Wir betrachten noch einige Spezialfälle. Bei Gleichstrom ($I = \mathrm{const}$) gilt

$$f_x = \frac{2I^2}{c^2\,a^2}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\varrho(\tau-t)}\,\dot{l}\,(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Bei einer Abweichung des Stromes von der Zylinderachse ($\dot{l} > 0$) entsteht eine Kraft, die der Abweichung entgegenwirkt. Im Falle langsamer Bewegung ($\ddot{l} \ll \varrho\,\dot{l}$) erhält man durch partielle Integration

$$f_x = \frac{2I^2}{c^2\,a^2}\left(\frac{\dot{l}}{\varrho} - \frac{\ddot{l}}{\varrho} + \dots\right).$$

Insbesondere ist die Bremskraft bei gleichförmiger Verschiebung $l = v\,t$

$$f_x = \frac{2I^2\,v}{c^2\,a^2\,\varrho}\,.$$

386.

$$f_x = \frac{2I^2(t)\,l(t)}{c^2\,a^2}\,.$$

8. AUSBREITUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

8.1. Ebene Wellen im homogenen Medium. Reflexion und Brechung von Wellen. Wellenpakete

387. Die erste Welle hat die Amplitude $\mathfrak{E}_1 = a\, \mathfrak{e}_x$, die zweite die Amplitude $\mathfrak{E}_2 = b\, \mathrm{e}^{i\chi}\, \mathfrak{e}_y$, wobei a und b reell sind; die resultierende Amplitude ist

$$\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = a\, \mathfrak{e}_x + b\, \mathrm{e}^{i\chi}\, \mathfrak{e}_y.$$

Zur Erklärung der Art der Polarisation verschieben wir den Phasenanfangspunkt so, daß sich in zwei zueinander senkrechten Richtungen Schwingungen ergeben, deren Phasen um $\pi/2$ gegeneinander verschoben sind. Dazu führen wir die neue Amplitude $\mathfrak{E}_0' = \mathfrak{E}_0\, \mathrm{e}^{i\alpha} = \mathfrak{E}' - i\,\mathfrak{E}''$ ein und fordern, daß die Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ reell mit $\mathfrak{E}'\,\mathfrak{E}'' = 0$ sind (Abb. 61):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= a \cos\alpha\, \mathfrak{e}_x + b \cos(\alpha - \chi)\, \mathfrak{e}_y, \\ \mathfrak{E}'' &= a \sin\alpha\, \mathfrak{e}_x + b \sin(\alpha - \chi)\, \mathfrak{e}_y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Phasenverschiebung α ergibt sich aus der Bedingung $\mathfrak{E}'\,\mathfrak{E}'' = 0$:

$$a^2 \cos\alpha \sin\alpha + b^2 \sin(\alpha - \chi) \cos(\alpha - \chi) = 0$$

oder

$$\tan 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\chi}{a^2 + b^2 \cos 2\chi}. \tag{2}$$

Aus der Gleichung (2) berechnen wir den Winkel α, setzen α in (1) ein und bestimmen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$. Führt man in der $x\,y$-Ebene die neuen Achsen $x' \parallel \mathfrak{E}'$ und $y' \parallel \mathfrak{E}''$ ein, so erhält man

$$E_{x'} = E' \cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{r} - \omega\, t + \alpha),$$
$$E_{y'} = E'' \sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{r} - \omega\, t + \alpha).$$

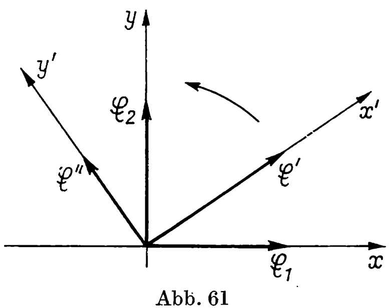


Abb. 61

Offenbar gilt

$$\frac{E_{x'}^2}{E'^2} + \frac{E_{y'}^2}{E''^2} = 1,$$

d.h., die Spitze des Vektors $\mathfrak{E}$ beschreibt eine Ellipse.

Im allgemeinen sind E' und E'' ungleich Null. Die Schwingungen in Richtung der x'-Achse sind gegenüber denen in Richtung der y'-Achse um $\pi/2$ verzögert. Sind die Achsen x', y' ebenso orientiert wie die Achsen x, y, d.h., bilden x', y', z ein Rechtssystem (dieser Fall ist in Abb. 61 dargestellt), so wird sich der Vektor $\mathfrak{E}$ für einen Beobachter, auf den sich die Welle zubewegt, entgegen dem Uhrzeigersinn drehen. Eine solche

Welle bezeichnet man als elliptisch linkspolarisiert. Bilden die Achsen x', y', z ein Linkssystem, so dreht sich $\mathfrak{E}$ dagegen im Uhrzeigersinn, und man bezeichnet die Welle als elliptisch rechtspolarisiert.

Die Welle ist für $E' = E''$ zirkular und für $E' = 0$ oder $E'' = 0$ linear polarisiert.

388. Für $\chi = 0$ ist die Polarisation linear, und die Polarisationsebene geht durch die Winkelhalbierende der x- und y-Achse. Für $\chi = \pi$ ist die Polarisation ebenfalls linear, die Polarisationsebene geht durch die Winkelhalbierende der x- und y-Achse. Bei $\chi = \pi/2$ liegt eine zirkulare Rechtspolarisation vor (Abb. 62*a*), für $\chi = -\pi/2$ eine zirkulare Linkspolarisation (Abb. 62*b*). In den übrigen Fällen ist die Polarisation elliptisch, und zwar für $0 < \chi < \pi$ rechtshändig [$\cos(\chi/2) > 0$, $\sin(\chi/2) > 0$ und Achsenorientierungen wie in Abb. 62*a*] und für $-\pi < \chi < 0$ linkshändig (Abb. 62*b*).

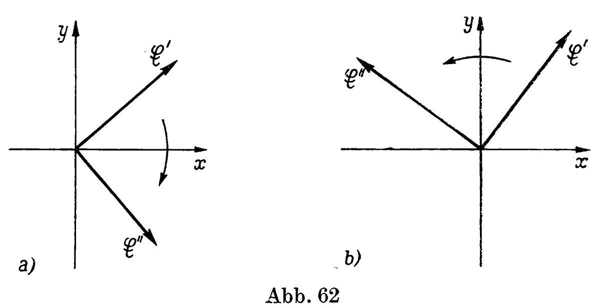


Abb. 62

389. Für $a = b$ ist die Welle linear polarisiert, bei $a > b$ elliptisch rechtspolarisiert und bei $a < b$ elliptisch linkspolarisiert. Zirkulare Polarisation ergibt sich nur für $b = 0$ (rechtshändig) oder $a = 0$ (linkshändig).

390. Die Amplitude der Gesamtwelle ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = E(\mathrm{e}^{(1)} + \mathrm{e}^{(2)}\,\mathrm{e}^{i\alpha}).$$

Dabei sind α die Phasenverschiebung, die sich ungeordnet ändert, und $|\mathfrak{E}|^2 = I$. Die Komponenten des Polarisationstensors sind nach Definition [s. (8.14)]

$$I_{ik} = \overline{E_i E_k^*} = \overline{I(\mathrm{e}^{(1)} + \mathrm{e}^{(2)}\,\mathrm{e}^{i\alpha})_i\,(\mathrm{e}^{(1)} + \mathrm{e}^{(2)}\,\mathrm{e}^{-i\alpha})_k}\,.$$

Bei der zeitlichen Mittelung erhalten wir

$$\overline{\mathrm{e}^{\pm i\alpha}} = 0,$$

so daß der Polarisationstensor die Form

$$I_{ik} = I\begin{pmatrix} 1 + \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & 1 - \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

hat.

Um den Depolarisationsgrad der Welle zu bestimmen, muß man den Tensor I_{ik} auf die Form

$$I_{ik} = I_1\, n_i^{(1)}\, n_k^{(1)*} + I_2\, n_i^{(2)}\, n_k^{(2)*}$$

bringen, wobei I_i und $\mathfrak{n}^{(i)}$ durch die Gleichungen

$$I_{lk}\, n_k = I\, n_l$$

definiert sind.

Setzt man die Determinante dieses Gleichungssystems gleich Null, so erhält man

$$I_1 = 1 + \cos\vartheta, \quad I_2 = 1 - \cos\vartheta.$$

Daraus ergibt sich der Depolarisationsgrad zu

$$\varrho = \frac{1 - \cos\vartheta}{1 + \cos\vartheta} \quad (0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2).$$

Die Vektoren $\mathfrak{n}^{(i)}$ sind im betrachteten Fall reell, und es ist $\mathfrak{n}^{(1)} = \{\cos(\vartheta/2), \sin(\vartheta/2)\}$, $\mathfrak{n}^{(2)} = \{-\sin(\vartheta/2), \cos(\vartheta/2)\}$ (Abb. 63). Die Welle ist vollständig polarisiert (jedoch nicht monochromatisch) für $\vartheta = 0$ ($\varrho = 0$). Bei $\vartheta = \pi/2$ ist sie vollständig depolarisiert ($\varrho = 1$). In diesem Fall ist der Polarisationstensor $I_{ik} = I\,\delta_{ik}$.

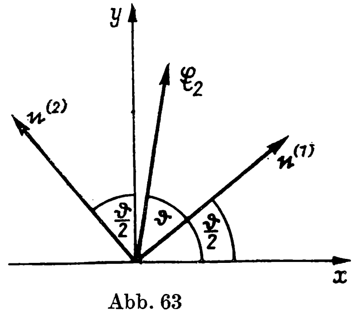


Abb. 63

391. Der Polarisationstensor ist

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 + \frac{1}{2} I_2 & \frac{1}{2} I_2 \\ \frac{1}{2} I_2 & \frac{1}{2} I_2 \end{pmatrix}$$

(die Richtung der x_1-Achse stimmt mit der Polarisationsrichtung der ersten Welle überein).

Der Depolarisationsgrad ist

$$\varrho = \frac{I_1 + I_2 - \sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1 + I_2 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2}}.$$

392. Es ist

$$\varrho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi};$$

die Welle ist bei $\xi = 0$ unpolarisiert und bei $\xi = 1$ vollständig polarisiert. Aus diesem Grund bezeichnet man ξ als den Polarisationsgrad der Welle.

Setzen wir $\xi_i = \xi\, \eta_i$ mit

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1,$$

so wird

$$I_{ik} = \frac{I}{2}(1 - \xi)\,\delta_{ik} + \frac{I\,\xi}{2}\left(1 + \sum_{l=1}^{3} \eta_l\, \tau_{ik}^{(l)}\right).$$

In diesem Ausdruck entspricht der erste Term dem vollständig unpolarisierten und der zweite dem vollständig polarisierten Zustand. Im Fall **a)** gilt $\eta_3 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Vergleicht man

$$I''_{ik} = I\,\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

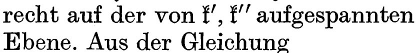
mit dem Ausdruck

$$I_{ik} = I\, n_i\, n_k^*,$$

so sieht man, daß im vorliegenden Fall $n_1 = 1$, $n_2 = 0$ gilt, d.h., daß der Tensor I''_{ik} eine Welle beschreibt, die in Richtung der x-Achse linear polarisiert ist (die Welle breitet sich in z-Richtung aus).

Analog zeigt man leicht, daß im Fall **b)** $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \eta_3 = 0$ gilt und die Welle in der Richtung, die mit der x-Achse den Winkel 45° bildet, linear polarisiert ist, während im Fall **c)** $\eta_2 = 1$, $\eta_1 = \eta_3 = 0$ gilt und die Welle zirkular polarisiert ist.

393. Da $\mathfrak{E}$ linear polarisiert ist, kann die Amplitude $\mathfrak{E}_0$ reell gewählt werden. Aus der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ folgt $\mathfrak{k}'\,\mathfrak{E}_0 = 0$, $\mathfrak{k}''\,\mathfrak{E}_0 = 0$, d.h., $\mathfrak{E}_0$ steht senkrecht auf der von $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}''$ aufgespannten Ebene. Aus der Gleichung



$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

ergibt sich

$$\frac{\mu\,\omega}{c}\,\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{k}' \times \mathfrak{E}_0, \quad \frac{\mu\,\omega}{c}\,\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{k}'' \times \mathfrak{E}_0,$$

d.h., $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ stehen senkrecht auf $\mathfrak{E}_0$, und es ist $\mathfrak{H}_1 \perp \mathfrak{k}'$, $\mathfrak{H}_2 \perp \mathfrak{k}''$.

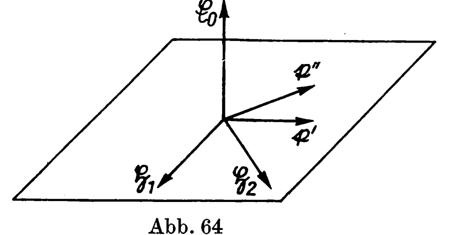


Abb. 64

Die Spitze des Vektors $\mathfrak{H}$ beschreibt in der von $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}''$ aufgespannten Ebene eine Ellipse (Abb. 64).

394. Beide Wellen werden elliptisch polarisiert sein. Eine Hauptachse des Polarisationsellipsoids liegt in der Einfallsebene, und die andere steht auf ihr senkrecht. Die Halbachsen sind in der reflektierten Welle

$$E_{\|} = \frac{\tan(\Theta_0 - \Theta_2)}{\tan(\Theta_0 + \Theta_2)}\,E_0, \qquad E_{\perp} = \frac{\sin(\Theta_2 - \Theta_0)}{\sin(\Theta_2 + \Theta_0)}\,E_0$$

und in der gebrochenen Welle

$$E_{\|} = \frac{2\cos\Theta_0\,\sin\Theta_2}{\sin(\Theta_0 + \Theta_2)\,\cos(\Theta_0 - \Theta_2)}\,E_0, \qquad E_{\perp} = \frac{2\cos\Theta_0\,\sin\Theta_2}{\sin(\Theta_0 + \Theta_2)}\,E_0.$$

Dabei bedeuten Θ_0 den Einfallswinkel, Θ_2 den Brechungswinkel und E_0 den Absolutbetrag der Amplitude der einfallenden Welle.

Für $\Theta_0 = \pi/2 - \Theta_2$ (BREWSTERscher Winkel) ist die reflektierte Welle linear polarisiert.

395. Unpolarisiertes (natürliches) Licht kann man als inkohärente Superposition zweier „entgegengesetzt" polarisierter Wellen gleicher Intensität betrachten. Wir benutzen dies und stellen das einfallende Bündel als Superposition zweier inkohärenter Komponenten dar, von denen die eine, $E_{||}$, in Richtung der Einfallsebene und die zweite, $E_{\perp}$, senkrecht dazu polarisiert ist. Die Intensitäten dieser Wellen sind einander gleich:

$$I_{||} = I_{\perp} = I .$$

Nach der Reflexion sind beide Komponenten nach wie vor inkohärent. Mit Hilfe der FRESNELschen Formeln erhalten wir

$$I_{ik}^{(1)} = I \frac{\sin^2(\Theta_0 - \Theta_2)}{\sin^2(\Theta_0 + \Theta_2)} \left(e_i^{\perp} e_k^{\perp} + \frac{\cos^2(\Theta_0 + \Theta_2)}{\cos^2(\Theta_0 - \Theta_2)} e_i^{||} e_k^{||} \right),$$

$$\varrho_1 = \frac{\cos^2(\Theta_0 + \Theta_2)}{\cos^2(\Theta_0 - \Theta_2)} < 1 .$$

Dabei sind $e^{\perp}$ und $e^{||}$ Einheitsvektoren, die die Polarisationsrichtungen der transversalen bzw. longitudinalen Welle angeben; sie liegen in der zur Richtung des reflektierten Lichtes senkrechten Ebene. Der Depolarisationsgrad des einfallenden Lichtes ist 1; bei der Reflexion wird das Licht polarisiert.

Eine analoge Rechnung ergibt für das gebrochene Licht

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{4I \cos^2\Theta_0 \sin^2\Theta_2}{\sin^2(\Theta_0 + \Theta_2)} \left(e_i^{\perp} e_k^{\perp} + \frac{e_i^{||} e_k^{||}}{\cos^2(\Theta_0 - \Theta_2)} \right),$$

$$\varrho_2 = \cos^2(\Theta_0 - \Theta_2) < 1 .$$

396. Man erhält

$$R = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = \frac{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2},$$

wobei ε_1 und ε_2 die Dielektrizitätskonstanten des ersten bzw. zweiten Dielektrikums bedeuten.

397. Man erhält

$$E_{\perp 1} = (-1 + 2\zeta \cos\Theta_0) E_{\perp 0}, \quad E_{||1} = \left(1 - \frac{2\zeta}{\cos\Theta_0}\right) E_{||0},$$

$$E_{\perp 2} = 2\zeta \cos\Theta_0 E_{\perp 0}, \quad E_{||2} = 2\zeta E_{||0}.$$

Die Formeln für $E_{||1}$ und $E_{||2}$ gelten nur dann, wenn der Glanzwinkel $\varphi_0 = {}^1/_2\pi - \Theta_0 \gg |\zeta|$ ist.

Für $\varphi_0 \ll 1$ wird

$$E_{||1} = \frac{\varphi_0 - \zeta}{\varphi_0 + \zeta} E_{||0}, \quad E_{||2} = \frac{\varphi_0 \zeta}{\varphi_0 + \zeta} E_{||0}.$$

Dabei ist die relative Größe von $|\zeta|$ und φ_0 beliebig.

398. Es ergibt sich

$$R_{\perp} = 1 - 4\zeta' \cos\Theta_0 .$$

$R_\perp$ ist für alle Einfallswinkel nahezu gleich 1 und nimmt für $\Theta_0 = 0$ (senkrechter Einfall) ein Minimum an; ferner erhält man

$$R_{||} = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos\Theta_0} \qquad \text{für} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \Theta_0 \gg 4\zeta',$$

$$R_{||} = \frac{(\varphi_0 - \zeta')^2 + \zeta''^2}{(\varphi_0 + \zeta')^2 + \zeta''^2} \quad \text{für} \quad \varphi_0 \ll 1.$$

Aus der Bedingung $\partial R_{||}/\partial\varphi_0 = 0$ erhalten wir den Winkel φ_0, bei dem $R_{||}$ minimal ist:

$$\varphi_0 = \Phi_0 = |\zeta|, \qquad R_{||} = \frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}.$$

Der Winkel Φ_0 ist dem BREWSTERschen Winkel analog, da $R_{||}$ bei $\varphi_0 = \Phi_0$ minimal ist (beim Einfall einer Welle auf die Grenze eines Dielektrikums unter dem BREWSTERschen Winkel ist der Koeffizient $R_{||}$ ebenfalls minimal und gleich Null).

399. Die Polarisation der reflektierten Welle wird durch die Phasendifferenz zwischen der longitudinalen und der transversalen Komponente bestimmt. Mit Hilfe der Ergebnisse der beiden vorhergehenden Aufgaben erhält man

$$E_{\perp 1} \approx -E_{\perp 0} = e^{i\delta_\perp} E_{\perp 0}, \qquad \delta_\perp = \pi;$$

$$E_{||1} = \left[\frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}\right]^{1/2} e^{i\delta_{||}} E_{||0}, \qquad \tan\delta_{||} = -\frac{2\Phi_0\zeta''}{\Phi_0^2 - |\zeta|^2} \to \infty,$$

d.h. $\delta_{||} = \pi/2$.

Die Phasendifferenz ist also $\delta = \delta_\perp - \delta_{||} = \pi/2$; die reflektierte Welle erweist sich im allgemeinen als elliptisch polarisiert, wobei eine der Hauptachsen der Ellipse in der Einfallsebene liegt.

Bei $|E_{||1}| = |E_{\perp 1}|$ liegt zirkulare Polarisation vor. Für $E_{||0} = 0$ oder $E_{\perp 0} = 0$ wird die Polarisation linear.

400. Mit Hilfe der FRESNELschen Formeln erhält man

$$n' = \frac{\sin\Theta_0 \tan\Theta_0 \cos 2\varrho}{1 + \sin^2 2\varrho \cos\delta}, \qquad n'' = \frac{\sin\Theta_0 \tan\Theta_0 \sin 2\varrho \sin\delta}{1 + \sin 2\varrho \cos\delta}.$$

401. Es ergibt sich

$$R = \frac{(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon'})^2}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'})^2} + \frac{4}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'})^4} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2.$$

Dabei bedeuten ε die Dielektrizitätskonstante des Mediums, aus dem das Licht einfällt, und ε' den Realteil der Dielektrizitätskonstanten des leitenden Mediums.

402. Die Phasenverschiebungen zwischen $E_{\perp 1}$, E_0 und $E_{||1}$, E_0 können mit Hilfe der FRESNELschen Formeln bestimmt werden:

$$\tan\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\Theta_0 - n^2}}{\cos\Theta_0}, \qquad \tan\frac{\delta_{||}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\Theta_0 - n^2}}{n^2\cos\Theta_0}. \tag{1}$$

Wegen $\delta_\perp \neq \delta_{||}$ ist die Welle elliptisch polarisiert.

Die elliptische Polarisation geht in eine zirkulare über, falls die Bedingungen

$$a)\ \delta = \delta_{||} - \delta_{\perp} = \frac{\pi}{2}, \qquad b)\ E_{||0} = E_{\perp 0}$$

erfüllt sind. Die Bedingung *b*) bedeutet, daß die einfallende Welle in einer Ebene, die mit der Einfallsebene den Winkel $\pi/4$ bildet, polarisiert sein muß. Wir untersuchen nun die Frage, ob die Bedingung *a*) erfüllt sein kann.

Aus (1) folgt

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\Theta_0 \sqrt{\sin^2\Theta_0 - n^2}}{\sin^2\Theta_0}. \tag{2}$$

Daraus ergibt sich, daß δ für $\Theta_0 = \arcsin n$ und $\Theta_0 = \pi/2$ gleich Null wird und zwischen diesen beiden Punkten ein Maximum annimmt. Für den Maximalwert erhält man auf dem üblichen Weg leicht

$$\tan\frac{\delta_{\max}}{2} = \frac{1 - n^2}{2n}.$$

Damit $\tan(\delta/2)$ gleich 1 ist ($\delta = \pi/2$), müssen die Ungleichungen $1 - n^2 \geqq 2n$ und $n \leqq 0{,}414$ erfüllt sein.

403. Ist der Vektor $\mathfrak{E}_0$ normal zur Einfallsebene, so sind die Transversal- und die Longitudinalkomponente des POYNTINGschen Vektors

$$\left.\begin{aligned} S_{\perp} &= \frac{c^2 k''}{8\pi\omega} E_0^2\, e^{-2k''z} \sin 2(k'x - \omega t), \\ S_{||} &= \frac{c^2 k''}{8\pi\omega} E_0^2\, e^{-2k''z} [1 - \cos 2(k'x - \omega t)]. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dabei ist die z-Achse normal zur Grenze des Mediums, und die x-Achse ist die Schnittlinie zwischen der Einfallsebene und der Grenze des Mediums; ferner ist

$$k' = k_z \sin\Theta_0, \qquad k'' = k_z \sqrt{\sin^2\Theta_0 - n^2},$$

wobei $k_2 = \omega\, n_2/c$ den Betrag des Wellenvektors im zweiten Medium und Θ_0 den Einfallswinkel bedeuten.

Aus (1) folgt, daß die Energie senkrecht zur Grenze Schwingungen mit der Frequenz 2ω ausführt. Das zeitliche Mittel des Energieflusses im zweiten Medium ist Null, während der Mittelwert von $S_{||}$ ungleich Null ist, d.h. ein Energiefluß längs der Grenzfläche besteht.

Die Linien des POYNTINGschen Vektors im zweiten Medium werden durch die Gleichung

$$z = \frac{1}{k''} \ln \frac{|\sin k'x|}{C} \tag{2}$$

bestimmt, wobei C eine Integrationskonstante ist.

Der ungefähre Verlauf der Vektorlinien ist in Abb. 65 dargestellt. Im ersten Medium haben die $\mathfrak{S}$-Linien eine kompliziertere Form (s. [19]).

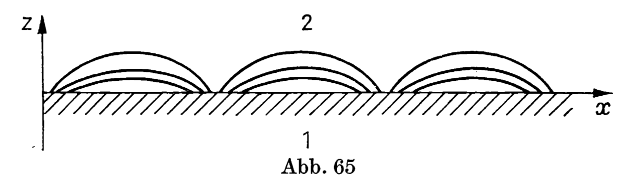


Abb. 65

404. Das Brechungsgesetz hat hier die komplexe Form

$$k_1 \sin\Theta_0 = k_2 \sin\Theta_2, \quad k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2' + i\frac{4\pi\sigma_2}{\omega}} = k_2' + i\,k_2'';$$

$\sin\Theta_2$ und $\cos\Theta_2$ sind dabei komplex.

Wir setzen nun $\cos\Theta_2 = \varrho\, e^{i\alpha}$, wobei ϱ und α reelle Größen sind, die von Θ_0 und den elektrischen Konstanten des Mediums abhängen. Die Parameter ϱ, α werden durch das Gleichungssystem

$$\varrho^2 \cos 2\alpha = 1 - \frac{k_1^2}{|k_2|^2}\sin^2\Theta_0,$$

$$\varrho^2 \sin 2\alpha = \frac{2k_1^2 k_2' k_2''}{|k_2|^4}\sin^2\Theta_0$$

bestimmt.

Die in das leitende Medium *2* eingedrungene Welle wird durch die Funktion

$$\mathfrak{E}_2(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{E}_2\, e^{i(k_2 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{r} - \omega t)}$$

beschrieben. Trennt man Real- und Imaginärteil des Produktes $k_2\, \mathfrak{e}_2\, \mathfrak{r}$, so ergibt sich

$$k_2\, \mathfrak{e}_2\, \mathfrak{r} = (k_2' + i\,k_2'')(x \sin\Theta_2 + z\cos\Theta_2) = \\ = i\,z\,p(\Theta_0) + x\,k_1 \sin\Theta_0 + z\,q(\Theta_0)$$

mit

$$p(\Theta_0) = \varrho(k_2' \sin\alpha + k_2'' \cos\alpha),$$

$$q(\Theta_0) = \varrho(k_2' \cos\alpha - k_2'' \sin\alpha).$$

Es ist also

$$\mathfrak{E}_2(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{E}_2\, e^{-pz}\, e^{i(x k_1 \sin\Theta_0 + zq - \omega t)}.$$

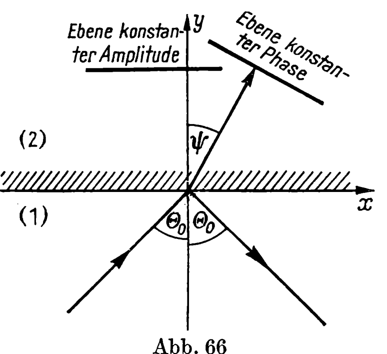


Abb. 66

Wie man sieht, stimmen Ausbreitungs- und Dämpfungsrichtung der Welle nicht miteinander überein: Die Welle ist inhomogen. Die Ebenen konstanter Amplitude $z = \text{const}$ sind der Leiteroberfläche parallel. Die Ebenen konstanter Phase werden durch die Gleichung

$$x\,k_1 \sin\Theta_0 + z\,q(\Theta_0) = \text{const}$$

bestimmt, aus der sich ergibt, daß der Vektor $\mathfrak{k}_2'$, der die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt, mit der z-Achse den Winkel $\psi = \arctan\{k_1 \sin\Theta_0/q(\Theta_0)\}$ bildet (Abb. 66). Die Phasengeschwindigkeit im leitenden Medium hängt vom Einfallswinkel ab:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{q^2(\Theta_0) + k_1^2 \sin^2\Theta_0}}\,.$$

405. Zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten an der ebenen Schicht muß man den Zusammenhang zwischen der Amplitude der reflektierten und der einfallenden Welle kennen. Wir bestimmen ihn auf zwei Wegen.

Das erste Verfahren geht von den Grenzbedingungen aus. Berücksichtigt man, daß die Tangentialkomponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ an den Grenzen $z = 0$ und $z = a$ stetig sein müssen und sich die vor der Schicht auf der Seite der einfallenden Welle vorhandene Welle nach beiden Seiten ausbreitet, während hinter der Schicht nur die hindurchgelassene Welle besteht, die sich in der Richtung der positiven z-Achse ausbreitet, so erhält man mit Hilfe der Grenzbedingungen

$$E_1 = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23}\, e^{-2ik_2a}}{1 + \alpha_{12}\alpha_{23}\, e^{-2ik_2a}} E_0. \tag{1}$$

Dabei ist E_1 die Amplitude der reflektierten, E_0 die der einfallenden Welle und

$$\alpha_{12} = \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}}, \quad \alpha_{23} = \frac{1 - n_{23}}{1 + n_{23}}, \quad n_{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i}}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2}.$$

Das zweite Verfahren beruht auf der Betrachtung der mehrfachen Reflexionen an der Trennfläche. Benutzt man die FRESNELsche Formel für den normalen Einfall, so sieht man, daß die Amplitude der Welle, die an der Grenze $z = 0$ einfach reflektiert wird, die Form

$$E_0' = \alpha_{12} E_0$$

hat.

Die Amplitude der ins Innere der Schicht eingedrungenen Welle ist

$$E_\alpha' = \beta_{12} E_0$$

mit

$$\beta_{12} = \frac{2}{1 + n_{12}}.$$

Die Amplitude der aus der Schicht austretenden Welle ist im Gebiet $z < 0$ nach einfacher Reflexion an der Grenze $z = a$

$$E_1' = \beta_{21}\alpha_{23}\beta_{12} E_0\, e^{-2ik_2a}.$$

Die Amplitude der nach s-facher Reflexion an der Grenze $z = a$ in das Gebiet $z < 0$ zurückkehrenden Welle ist

$$E_s' = \beta_{21}\beta_{12}\alpha_{23}\, e^{-2ik_2a}\,(\alpha_{21}\alpha_{23}\, e^{-2ik_2a})^{s-1}.$$

Die Gesamtamplitude E_1 der an der ebenen Schicht reflektierten Welle ist gleich der Summe aller E_s':

$$E_1 = \sum_{s=0}^{\infty} E_s' = \alpha_{12} E_0 + \beta_{21}\beta_{12}\alpha_{23}\, e^{-2ik_2a} \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_{21}\alpha_{23}\, e^{-2ik_2a})^{s-1}.$$

Mit Hilfe der Formel für die Summe der unendlichen geometrischen Reihe erhalten wir wieder die Beziehung (1).

Der Reflexionskoeffizient R ist durch die Beziehung $R = |E_1|^2/|E_0|^2$ definiert. Bestimmt man das Minimum von R auf dem üblichen Wege, so sieht man, daß die Reflexion minimal ist, wenn die Schichtdicke der Bedingung

$$a = a_n = n\frac{\lambda_2}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

genügt, wobei λ_2 die Wellenlänge innerhalb der Schicht bedeutet.

Wir betrachten die kleinste Schichtdicke $a = \lambda_2/4$, die dem Minimum von R entspricht. Setzt man R gleich Null, so erhält man für fehlende Reflexion die Bedingung

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}.$$

406. Die Gleichung für das elektrische Feld lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{\mathrm{e}^{z/a} + 1}\right)E = 0 \tag{1}$$

[s. (8.12)].

Wir suchen eine Lösung dieser Gleichung, die für alle z beschränkt ist und für $z \to \pm\infty$ Bedingungen genügt, die sich aus der physikalischen Problemstellung ergeben. Für $z \to -\infty$ muß die Lösung eine Superposition zweier Wellen, der einfallenden und der reflektierten, darstellen:

$$E(z) \to A\,\mathrm{e}^{ik_0z} + B\,\mathrm{e}^{-ik_0z} \tag{2}$$

mit $k_0 = \omega/c$.

Bei $z \to \infty$ bleibt nur die hindurchgegangene Welle bestehen:

$$E(z) \to C\,\mathrm{e}^{ikz}. \tag{3}$$

Dabei ist $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$.

In der Gleichung (1) substituieren wir die Variable gemäß $-\mathrm{e}^{-z/a} = \xi$. Die neue Variable ändert sich innerhalb der Grenzen $-\infty \leqq \xi \leqq 0$, wenn sich z zwischen $-\infty$ und $+\infty$ ändert. Mit der Substitution $E(\xi) = \xi^{-ika}\psi(\xi)$ erhalten wir für die neue unbekannte Funktion $\psi(\xi)$ die Gleichung

$$\xi(1 - \xi)\psi'' + (1 - 2ika)(1 - \xi)\psi' + \varkappa^2 a^2 \psi = 0, \tag{4}$$

wobei $\varkappa^2 = \omega^2\Delta\varepsilon/c^2$ ist. Diese Gleichung bezeichnet man als hypergeometrische Gleichung.

Wie aus (3) folgt, muß $\psi(\xi)$ für $\xi \to 0$ gegen eine Konstante streben. Die Funktion, die diese Eigenschaft besitzt, ist die hypergeometrische Funktion

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 2!}z^2 + \ldots$$

(s. [72], 7.200 und 7.251). Die Lösung der Gleichung (4) lautet also

$$\psi = CF[-i(k + k_0)a, -i(k - k_0)a; 1 - 2ika; -\mathrm{e}^{-z/a}]. \tag{5}$$

Um die Funktion ψ für $\xi \to -\infty$ zu bestimmen, benutzen wir die folgende asymptotische Darstellung der hypergeometrischen Funktion, die leicht aus der in [72] angegebenen Formel 7.232,2 abgeleitet werden kann:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \xi) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}(-\xi)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}(-\xi)^{-\beta}. \quad (6)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man zeigen, daß die Bedingung (2) erfüllt ist.
Der Reflexionskoeffizient ist

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma(2i\,k_0\,a)\,\Gamma[1-i(k+k_0)a]\,\Gamma[-i(k+k_0)a]}{\Gamma(-2i\,k_0\,a)\,\Gamma[1-i(k-k_0)a]\,\Gamma[-i(k-k_0)a]}\right|^2. \quad (7)$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks benutzen wir die Relationen

$$\left|\frac{\Gamma(2i\,k_0\,a)}{\Gamma(-2i\,k_0\,a)}\right| = \left|\frac{\Gamma(2i\,k_0\,a)}{\Gamma^*(2i\,k_0\,a)}\right| = 1, \qquad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

und erhalten schließlich

$$R = \frac{\sinh^2 \pi a(k-k_0)}{\sinh^2 \pi a(k+k_0)}. \quad (8)$$

Für kleine a ($k\,a \ll 1$) nimmt der Ausdruck für R die bekannte Form an, die sich bei einer sprunghaften Änderung von ε ergibt:

$$R = \frac{(k-k_0)^2}{(k+k_0)^2}.$$

R nimmt mit wachsendem a monoton ab. Bei großen $k\,a$ erfolgt die Abnahme nach einem Exponentialgesetz:

$$R = \mathrm{e}^{-4\pi k_0 a}, \qquad k\,a \gg 1.$$

407. Bei senkrechtem Einfall der Welle hängt das elektrische Feld nur von z ab und genügt der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega, z)\,E = 0. \quad (1)$$

Setzt man $m\,\omega^2/4\pi\,e^2 N_0 = z_1$, so gilt $\varepsilon = 1 - z/z_1$. Durch Substitution der Variablen

$$\xi = \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3}(z_1 - z)$$

nimmt Gleichung (1) die Form[1])

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi E = 0 \quad (2)$$

---

[1]) Durch diese Gleichung wird in der Quantenmechanik die Bewegung eines Teilchens im homogenen Kraftfeld beschrieben.

an. Ihre Lösung erhält man am einfachsten mit Hilfe einer FOURIER Transformation. Dazu entwickeln wir $E(\xi)$ in ein FOURIER-Integral:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(u)\, e^{i\xi u}\, du, \qquad E(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\xi)\, e^{-i\xi u}\, d\xi.$$

Setzen wir dies in (2) ein, so erhalten wir für die Amplitude $E(u)$ die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dE(u)}{du} + i u^2 E(u) = 0. \tag{3}$$

Durch die FOURIER-Transformation ergibt sich an Stelle der Gleichung zweiter Ordnung die einfachere Gleichung (3) erster Ordnung. Die Integration von (3) ergibt

$$E(u) = A' e^{-i u^3/3}.$$

Daraus folgt für $E(\xi)$

$$E(\xi) = A' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(^1/_3 u^3 - \xi u)}\, du.$$

Stellt man $e^{-i(^1/_3 u^3 - \xi u)}$ durch sin und cos dar und berücksichtigt, daß das Integral der Funktion $\sin(u^3/3 - \xi u)$ wegen der Antisymmetrie des Integranden verschwindet, so erhält man

$$E(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} - \xi u\right) du. \tag{4}$$

Die Funktion

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + \xi u\right) du$$

heißt AIRYsche Funktion[1]) (sie kann durch eine BESSEL-Funktion mit dem Index $^1/_3$ dargestellt werden). Wir erhalten also schließlich

$$E(\xi) = A\,\Phi(-\xi).$$

Die Konstante A kann mit Hilfe der Bedingungen an der Schichtgrenze bestimmt werden.

Wir untersuchen nun die Eigenschaften von $E(\xi)$ für große $|\xi|$. Mit Hilfe der asymptotischen Formeln für $\Phi(\xi)$ (s. [8]) ergibt sich bei großen positiven ξ

$$E(\xi) = \frac{A}{\xi^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

d. h., das Feld oszilliert.

---

[1]) Die AIRYsche Funktion wurde von W. A. FOCK näher untersucht (s. W. A. FOCK: Tabellen der AIRYschen Funktion, Moskau 1938).

Für große negative ξ gilt

$$E(\xi) = \frac{A}{2\,|\xi|^{1/4}}\, e^{-2/3|\xi|^{3/4}},$$

d.h., das Feld klingt exponentiell ab. Dies ist dadurch bedingt, daß negativen ξ-Werten negative Werte der Dielektrizitätskonstanten ε entsprechen und bei $\varepsilon < 0$ der Wellenvektor $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$ rein imaginär wird, was gerade einer Dämpfung entspricht. Im vorliegenden Fall geht bei der Dämpfung jedoch keine elektromagnetische Energie auf den Körper über (da die Dielektrizitätskonstante reell ist, treten keine Verluste auf), sondern die Welle wird an einer Schicht mit negativem ε reflektiert.

408. Es ergibt sich

$$\Psi(x, 0) = A(x, 0)\, e^{i k_0 x}$$

mit

$$A(x, 0) = a_0\sqrt{\pi}\,\Delta k\, e^{-x^2 \Delta k^2/4}.$$

Die Amplitude $A(x, 0)$ des Paketes hat die Form einer Gauss-Kurve. Sie wird für $|x \Delta k| \gg 1$ verschwindend klein. Daraus folgt, daß die Breite des Paketes im Ortsraum mit seiner „Breite" im k-Raum durch die Beziehung $\Delta x \Delta k \approx 1$ zusammenhängt. Diese Beziehung hat universelle Bedeutung und gilt sowohl für elektromagnetische Wellen als auch für Wellen beliebiger anderer Natur. Sie spielt im Falle der Wahrscheinlichkeitswellen in der Quantenmechanik eine besondere Rolle und führt dort zur Unschärferelation für Koordinate und Impuls eines Mikroteilchens.

409. Man erhält

$$\Psi(0, t) = A(0, t)\, e^{-i\omega_0 t}$$

mit

$$A(0, t) = a_0\sqrt{\pi}\,\Delta\omega\, e^{-t^2\Delta\omega^2/4}$$

und

$$\Delta t \Delta\omega \approx 1.$$

410. Man findet

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi \sin\Theta}.$$

Dabei bedeutet Θ den halben Öffnungswinkel des Lichtkegels vom Objektiv des Mikroskops zum betrachteten Objekt.

411. Der Wellenimpuls, der vom Funkorter gesendet wird, hat die Breite Δx, die mit der transversalen Streuung $k_\perp$ der Wellenvektoren durch die Beziehung $\Delta x\, k_\perp \geqq 1$ zusammenhängt. Andererseits gilt offenbar $\Delta x/l \approx k_\perp/k$. Aus den beiden Beziehungen ergibt sich die Unsicherheit der Beobachtung zu

$$\Delta x \geqq \sqrt{l\lambda}.$$

412. Das Wellenpaket wird durch die Funktion

$$\Psi(\mathfrak{r}, t) = 4\pi a_0 \sqrt{\frac{\pi q^3}{2\varrho^3}}\, J_{3/2}(\varrho q)\, e^{i(\mathfrak{k}_0\mathfrak{r} - \omega t)}$$

beschrieben, wobei

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

eine BESSEL-Funktion bedeutet und $\varrho = |\mathfrak{r} - \mathfrak{v}_g t|$ ist. Die Gruppengeschwindigkeit $\mathfrak{v}_g = \operatorname{grad}_{\mathfrak{k}} \omega$ ist ein Vektor mit den Komponenten $\partial \omega / \partial k_x$, $\partial \omega / \partial k_y$, $\partial \omega / \partial k_z$. Die Amplitude des Wellenpaketes ist nur im (kugelsymmetrischen) Raumgebiet $\varrho q \leqq 1$ merklich von Null verschieden. Das Paket ist in allen drei Dimensionen begrenzt.

Wie der Ausdruck für $\Psi(\mathfrak{r}, t)$ zeigt, ändert sich die Form des Paketes nicht mit der Zeit. Das beruht auf dem linearen Dispersionsgesetz, das streng nur für elektromagnetische Wellen im Vakuum gilt. Bei Berücksichtigung der weiteren Terme in der Entwicklung von ω nach k ergibt sich eine Änderung der Paketform („Zerfließen" des Paketes). Das Paket bewegt sich als Ganzes mit der Gruppengeschwindigkeit $\mathfrak{v}_g$.

413. Stellt man $\omega(k)$ in der Form

$$\omega = \omega_0 + v_g(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2$$

dar, so erhält man

$$\Psi(x, t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}} \exp\left\{ -\frac{(x - v_g t)^2}{4(\alpha + i\beta t)} + i(k_0 x - \omega_0 t) \right\}.$$

Die Abhängigkeit dieser komplexen Amplitude von x und t kann am einfachsten untersucht werden, indem man das Quadrat ihres Betrages bildet (das gerade die Intensität der Welle bestimmt):

$$|A(x, t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta t)^2}} \exp\left\{ -\frac{\alpha(x - v_g t)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)} \right\}.$$

Wie dieser Ausdruck zeigt, hat die Intensität der Welle bei festem t die Form einer GAUSS-Kurve, während ihre Breite l nach dem Gesetz

$$l = \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}{\alpha}}$$

mit der Zeit zunimmt und ihre Höhe wegen des Faktors $(\alpha^2 + \beta^2 t^2)^{-1/2}$ abnimmt.

Das Wellenpaket zerfließt. Das Zerfließen erfolgt symmetrisch (nach der Seite $t = +\infty$ und nach der Seite $t = -\infty$) und ist, da k reell ist, natürlich nicht mit einer Energieabsorption verbunden. Das Fehlen einer Dissipation geht auch daraus hervor, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(x, t)|^2 \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} a_0^2$$

nicht von der Zeit abhängt, d.h. die „Gesamtintensität“ erhalten bleibt. Der Grund für das Zerfließen besteht in der Ungleichheit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten (Phasengeschwindigkeiten) $v_\varphi = \omega/k$ der einzelnen ebenen Wellen, die in die Superposition eingehen: Infolge der Dispersion hängt ω/k von k ab.

414. Für $\omega \ll \omega_0$ ergibt sich

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\omega_p^2\,\omega^2}{\varepsilon_0\,\omega_0^4}\right) < c,$$

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\omega_p^2\,\omega^2}{\varepsilon_0\,\omega_0^4}\right) < c$$

mit $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

Bei $\omega \gg \omega_0$ wird

$$v_\varphi = c\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) > c,$$

$$v_g = c\left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) < c.$$

Im letzten Fall ist $v_\varphi\, v_g \approx c^2$. In der Nähe der Resonanzfrequenz ($\omega \approx \omega_0$) verliert der Begriff der Gruppengeschwindigkeit seine Bedeutung.

415. Wie aus den Ergebnissen der Aufgaben 412 und 413 folgt, hat die Funktion, die das Wellenpaket beschreibt, die Form

$$E(x, t) = E_0(x, t)\, \mathrm{e}^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Dabei ändert sich die Amplitude $E_0(x, t)$ bedeutend langsamer als $\mathrm{e}^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$ (die Perioden dieser Funktionen verhalten sich wie $\Delta k/k_0$). Vernachlässigt man die Änderung von E_0 gegenüber der von $\exp\{i\,(k_0\, x - \omega_0\, t)\}$, so gilt auf Grund der MAXWELLschen Gleichungen

$$H(x, t) = \frac{k_0\, c}{\omega_0\, \mu}\, E(x, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\; E_0(x, t)\, \mathrm{e}^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Die über die Periode $2\pi/\omega_0$ der Änderung der hochfrequenten Komponente gemittelte Energiestromdichte ist

$$\bar{S}(x, t) = \frac{c}{8\pi}\,|\mathrm{Re}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}^*)| = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\; E_0(x, t)\, E_0^*(x, t).$$

Aus der Beziehung $\bar{S} = v\,\bar{w}$ ergibt sich die Geschwindigkeit der Energieübertragung zu

$$v = \frac{c}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\omega\sqrt{\varepsilon\,\mu}\right)} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = v_g.$$

8.2. Streuung elektromagnetischer Wellen an makroskopischen Körpern. Beugung

416. Man benutzt Zylinderkoordinaten, wobei die z-Achse in der Zylinderachse liegt und der Winkel α von der Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}$ der einfallenden Welle aus gezählt wird. Aus Symmetriegründen ergibt sich, daß die Feldvektoren nicht von z abhängen und nur die von Null verschiedenen Komponenten E_z, H_r und H_α haben. Im folgenden lassen wir den Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ fort und benutzen zur Bestimmung der Feldkomponenten die Wellengleichung (8.6) für $\mathfrak{E}$ und die MAXWELLsche Gleichung (8.1). Die erste dieser Gleichungen liefert E_z, und die zweite gestattet, H_r und H_α durch E_z auszudrücken:

$$H_r = \frac{1}{i\,k\,r}\,\frac{\partial E_z}{\partial \alpha}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{i\,k}\,\frac{\partial E_z}{\partial r}. \tag{1}$$

Das durch das Vorhandensein des Zylinders hervorgerufene sekundäre Feld $E' = E - E_a$ genügt der Gleichung

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial E'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 E'}{\partial \alpha^2} + k^2 E' = 0. \tag{2}$$

Setzt man $E' = R(r)\,\Phi(\alpha)$ und separiert in (2) die Variablen, so ergibt sich

$$R_m'' + \frac{1}{r}\,R_m' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R_m = 0, \tag{3}$$

$$\Phi_m'' + m^2\,\Phi_m = 0. \tag{4}$$

Mit m^2 ist der Separationsparameter bezeichnet. Die allgemeine Lösung der Gleichung (2) ist eine Summe über alle zulässigen m:

$$E'(r,\alpha) = \sum_m \Phi_m(\alpha)\,R_m(r). \tag{5}$$

Um die Lösung der BESSEL-Gleichung (3) sofort in der günstigsten Form hinschreiben zu können, betrachten wir die Randbedingung für $r \to \infty$. Da E' das sekundäre Feld beschreibt, das durch die auf dem Zylinder induzierten Ströme erzeugt wird, muß es für $r \to \infty$ die Form auslaufender Zylinderwellen haben. Das bedeutet, daß E' in diesem Gebiet die Form

$$E' = E_0\,f(\alpha)\,\frac{e^{i\,k\,r}}{\sqrt{r}} \tag{6}$$

haben muß.

Die Bedingung (6) wird befriedigt, wenn man als Lösung der Gleichung (3) die HANKEL-Funktion $H_m^{(1)}(k\,r)$ wählt (s. Anhang III), die für große r

$$H_m^{(1)}(k\,r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\,k\,r}}\,\exp\left\{i\left(k\,r - \frac{m\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (k\,r \gg 1)$$

lautet. Die zweite linear unabhängige Lösung enthält einen Term der Form

$$\frac{\text{const}}{\sqrt{r}}\,e^{-i\,k\,r},$$

der eine einlaufende Zylinderwelle beschreibt; diese kann jedoch bei unserer Aufgabenstellung nicht vorhanden sein. Daher schreiben wir die Lösung der Gleichung (3) in der Form

$$R_m(r) = H_m^{(1)}(k\,r).$$

Gleichung (4) hat die Lösung

$$\Phi_m(\alpha) = A_m\,\mathrm{e}^{i m \alpha} + B_m\,\mathrm{e}^{-i m \alpha}.$$

Da sich das Feld bei einer Änderung von α um 2π nicht ändern darf, muß m eine ganze Zahl sein. Nimmt man an, daß m auch negativ sein kann, so genügt es, im Ausdruck für $\Phi_m(\alpha)$ nur einen Term, z.B. $\mathrm{e}^{i m \alpha}$, beizubehalten. Damit wird schließlich

$$E'(r,\alpha) = E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k\,r)\,\mathrm{e}^{i m \alpha}. \tag{7}$$

Für große Abstände r geht (7) in (6) über, wenn

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_m A_m \exp\left\{i\left(m\alpha - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

gesetzt wird.

Die Koeffizienten A_m der Reihe (7) werden mit Hilfe der Grenzbedingung an der Zylinderoberfläche bestimmt. Da der Zylinder als ideal leitend vorausgesetzt wird, gilt

$$E' + E_a = 0 \quad \text{für} \quad r = a \tag{8}$$

oder

$$\mathrm{e}^{i k a \cos\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k\,a)\,\mathrm{e}^{i m \alpha} = 0. \tag{9}$$

Mit Hilfe der Orthogonalität der Funktionen $\mathrm{e}^{i m \alpha}$ folgt

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k a \cos\alpha - m'\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha + 2\pi A_{m'} H_{m'}^{(1)}(k\,a) = 0.$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (A III.11)

$$A_m = \frac{i^m J_m(k\,a)}{H_m^{(1)}(k\,a)}. \tag{10}$$

Das elektrische Gesamtfeld ist also

$$E(r,\alpha) = E_0\,\mathrm{e}^{i k r \cos\alpha} - E_0 \sum_m \frac{i^m J_m(k\,a)}{H_m^{(1)}(k\,a)} H_m^{(1)}(k\,r)\,\mathrm{e}^{i m \alpha}. \tag{11}$$

Die Komponenten des Magnetfeldes werden durch die Gleichungen (1) bestimmt:

$$H_r = -E_0 \sin\alpha\,\mathrm{e}^{i k r \cos\alpha} - E_0 \sum_m \frac{i^m\, m J_m(k\,a)}{H_m^{(1)}(k\,a)} \frac{H_m^{(1)}(k\,r)}{k\,r}\,\mathrm{e}^{i m \alpha}, \tag{12}$$

$$H_\alpha = -E_0 \cos\alpha\,\mathrm{e}^{i k r \cos\alpha} + E_0 \sum_m \frac{i^{m-1} J_m(k\,a)}{H_m^{(1)}(k\,a)} \frac{\mathrm{d}H_m^{(1)}(k\,r)}{\mathrm{d}(k\,r)}\,\mathrm{e}^{i m \alpha}. \tag{13}$$

Das sekundäre elektrische Feld ist im ganzen Raum transversal; das sekundäre Magnetfeld wird in großem Abstand vom Zylinder, für $k r \gg 1$ (Wellenzone), wo die longitudinale Komponente H_r wegen des Faktors $k r$ im Nenner verschwindet, transversal.

Die Flächendichte des Stromes ergibt sich aus der Grenzbedingung für die Tangentialkomponente von $\mathfrak{H}$:

$$i(\alpha) = i_z(\alpha) = \frac{c}{4\pi} H_\alpha(a, \alpha).$$

Der Gesamtstrom ist

$$I = -\frac{i}{2} c a E_0 \left[J_1(k a) - \frac{J_0(k a) H_1^{(1)}(k a)}{H_0^{(1)}(k a)}\right].$$

417. Im vorliegenden Fall ist das Feld zweidimensional. Unter der Größe $\mathrm{d}I$ in der allgemeinen Formel (8.22),

$$\mathrm{d}\sigma_s = \frac{\mathrm{d}I}{\bar{S}_0},$$

muß man daher die Intensität der Sekundärwellen innerhalb des Winkels $\mathrm{d}\alpha$, bezogen auf die Längeneinheit des Zylinders, verstehen: $\mathrm{d}I = \bar{S}\, r\, \mathrm{d}\alpha$.

Der differentielle Streuquerschnitt hat die Dimension einer Länge. Mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 416 erhält man

$$\mathrm{d}\sigma_s = |f(\alpha)|^2 \, \mathrm{d}\alpha,$$

wobei

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_m i^m \frac{J_m(k a)}{H_m^{(1)}(k a)} \exp\left\{i\left(m\alpha - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \tag{1}$$

ist. Für beliebige Werte $k a$ ist die Gleichung (1) sehr kompliziert, vereinfacht sich aber bei $k a \ll 1$ wesentlich. In diesem Fall genügt es, in der unendlichen Summe für $f(\alpha)$ den Term mit $m = 0$ zu berücksichtigen, was eine isotrope Verteilung der Sekundärstrahlung ergibt:

$$\mathrm{d}\sigma_s = \frac{\pi \, \mathrm{d}\alpha}{2k \ln^2(k a)} = \frac{\lambda}{4 \ln^2(k a)} \mathrm{d}\alpha. \tag{2}$$

Der totale Streuquerschnitt ergibt sich durch Integration von (1) über $\mathrm{d}\alpha$. Mit Hilfe der Orthogonalität der Funktionen $e^{i m \alpha}$ erhält man

$$\sigma_s = \frac{4}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\frac{J_m(k a)}{H_m^{(1)}(k a)}\right|^2. \tag{3}$$

Für $k a \ll 1$ geht (3) in

$$\sigma_s = \frac{\pi \lambda}{2 \ln^2(k a)}$$

über.

418. Man erhält

$$H_z = H_0 \left[e^{ikr\cos\alpha} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)\prime}(ka)} H_m^{(1)}(kr)\, e^{im\alpha} \right],$$

$$E_r = H_0 \left[\sin\alpha\, e^{ikr\cos\alpha} + \frac{1}{kr} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{m J'_m(ka)}{H_m^{(1)\prime}(ka)} H_m^{(1)}(kr)\, e^{im\alpha} \right],$$

$$E_\alpha = H_0 \left[\cos\alpha\, e^{ikr\cos\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m+1} \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)\prime}(ka)} H_m^{(1)\prime}(kr)\, e^{im\alpha} \right],$$

wobei α von der Richtung von $\mathfrak{k}$ aus gezählt wird und die Achse des Zylinderkoordinatensystems mit der Zylinderachse übereinstimmt. Die Streuquerschnitte ergeben sich zu

$$d\sigma_s(\alpha) = \frac{\pi (ka)^3}{8} a (1 - 2\cos\alpha)^2\, d\alpha$$

und

$$\sigma_s = \frac{3}{4} \pi^2 k^3 a^4.$$

419.

$$d\sigma'_s = \cos^2\varphi\, d\sigma_{||} + \sin^2\varphi\, d\sigma_{\perp},$$

$$d\sigma''_s = \frac{1}{2}(d\sigma_{||} + d\sigma_{\perp}).$$

420. Man denkt sich die unpolarisierte Welle aus zwei inkohärenten Komponenten gleicher Intensität zusammengesetzt, wobei der Vektor $\mathfrak{E}$ der einen Komponente parallel und der anderen Komponente senkrecht zur Zylinderachse ist. Die Streuquerschnitte der beiden Komponenten wurden in den Aufgaben 417 und 418 berechnet. Der Depolarisationsgrad ϱ wird durch das Verhältnis der Intensitäten beider Streuwellen bestimmt:

$$\varrho = \frac{d\sigma_{\perp}}{d\sigma_{||}} = \frac{1}{4} (ka)^4 \ln^2(ka)\, (1 - 2\cos\alpha)^2.$$

Wegen $ka \ll 1$ ist ϱ sehr klein, d.h., die Streuwellen sind bei beliebigem Streuwinkel fast vollständig polarisiert; für $\cos\alpha = 0{,}5$, d.h. $\alpha = 60°$, wird $\varrho = 0$.

421. Man erhält

$$H_z = H_0 \left[e^{ikr\cos\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(ka) - i\zeta J_m(ka)}{i\zeta H_m^{(1)}(ka) - H_m^{(1)\prime}(ka)} H_m^{(1)}(kr)\, e^{im\alpha} \right],$$

wobei ζ die Oberflächenimpedanz des Metalls bedeutet, und

$$H_\alpha = H_r = 0, \qquad \mathfrak{E} = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathfrak{H}.$$

422. Es ergibt sich

$$Q = \frac{a c \zeta' H_0^2}{4} \sum_m \left| \frac{J'_m N_m - J_m N'_m}{i\zeta H_m^{(1)} - H_m^{(1)\prime}} \right|^2,$$

wobei ζ' den Realteil der Oberflächenimpedanz bedeutet. Die Zylinderfunktionen J_m, N_m und $H_m^{(1)}$ (s. Anhang III) und ihre Ableitungen werden im Punkt $k\,a$ genommen.

Für den Absorptionsquerschnitt erhält man

$$\sigma_a = \frac{Q_0}{\bar{S}_0} = 2\pi\, a\, \zeta' \sum_m \left| \frac{J'_m N_m - J_m N'_m}{i\,\zeta H_m^{(1)} - H_m^{(1)\prime}} \right|^2 .$$

Bei $k\,a \ll 1$, d.h. $\lambda \gg a$, ist das Feld in der Nähe des Zylinders quasistationär (leitender Zylinder im longitudinalen quasistationären Magnetfeld, s. Aufgabe 367). Drückt man ζ' mit Hilfe von (8.9) und (8.11) durch die Leitfähigkeit σ aus, so erhält man daher für Q den Ausdruck

$$Q = \frac{a\,c\,H_0^2}{8} \sqrt{\frac{\mu\,\omega}{2\pi\,\sigma}} ,$$

der mit dem in der Aufgabe 369 für den Fall des starken Skineffektes berechneten übereinstimmt, wenn man dort Q durch das Magnetfeld ausdrückt.

423. Für $r > a$ erhält man

$$E_z = E_0 \left[e^{i k r \cos\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{\zeta J'_m(k a)\, J_m(k' a) - J_m(k a)\, J'_m(k' a)}{H_m^{(1)}(k a)\, J'_m(k' a) - \zeta H_m^{(1)\prime}(k a)\, J_m(k' a)} H_m^{(1)}(k r)\, e^{i m \alpha} \right]$$

und für $r < a$

$$E_z = E_0 \zeta \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(k' a)\, H_m^{(1)}(k\,a) - J'_m(k' a)\, H_m^{(1)\prime}(k\,a)}{J'_m(k' a)\, H_m^{(1)}(k\,a) - \zeta J_m(k' a)\, H_m^{(1)}(k\,a)} J_m(k' r)\, e^{i m \alpha} .$$

Dabei bedeutet E_0 die Amplitude der einfallenden Welle, ferner

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} , \qquad k = \frac{\omega}{c} , \qquad k' = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon\,\mu}}{c} .$$

Die übrigen Komponenten von $\mathfrak{E}$ sind Null.

Das $\mathfrak{H}$-Feld ergibt sich mit Hilfe der Beziehung

$$\mathfrak{H} = \frac{c}{i\,\omega\,\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{E} .$$

424. Die Dipolmomente der Kugel sind

$$\mathfrak{p} = \beta_e\, \mathfrak{E}_0\, e^{-i \omega t} , \qquad \mathfrak{m} = \beta_m\, \mathfrak{H}_0\, e^{-i \omega t} .$$

Dabei bedeuten β_e und β_m die elektrische bzw. die magnetische Polarisierbarkeit der Kugel und sind im allgemeinen komplexe Größen.

Mit Hilfe der Gleichungen (12.17) und (12.20) erhält man für die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ der Streuwelle

$$H_\alpha = E_\Theta = \frac{\omega^2 E_0}{c^2\, r} (\beta_e \cos\Theta + \beta_m) \cos\alpha ,$$

$$H_\Theta = -E_\alpha = \frac{\omega^2 E_0}{c^2\, r} (\beta_e + \beta_m) \sin\alpha .$$

Die Bedeutung der Winkel Θ und α, die die Streurichtung charakterisieren, ist Abb. 67 zu entnehmen.

Der differentielle Streuquerschnitt wird durch die Gleichung (8.22) bestimmt:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s(\Theta,\alpha)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4}{c^4}[|\beta_\mathrm{e}|^2(\cos^2\Theta\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \\ + |\beta_\mathrm{m}|^2(\cos^2\Theta\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\beta_\mathrm{e}\beta_\mathrm{m}^* + \beta_\mathrm{e}^*\beta_\mathrm{m})\cos\Theta].$$

425. Man erhält

$$\mathrm{d}\sigma_s(\Theta) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\sigma_s(\Theta,\alpha) + \mathrm{d}\sigma_s\left(\Theta,\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ = \frac{\omega^4}{2c^4}[(|\beta_\mathrm{e}|^2 + |\beta_\mathrm{m}|^2)(1+\cos^2\Theta) + \\ + 2(\beta_\mathrm{e}\beta_\mathrm{m}^* + \beta_\mathrm{e}^*\beta_\mathrm{m})\cos\Theta]\,\mathrm{d}\Omega,$$

$$\sigma_s = \frac{8\pi\omega^4}{3c^4}(|\beta_\mathrm{e}|^2 + |\beta_\mathrm{m}|^2).$$

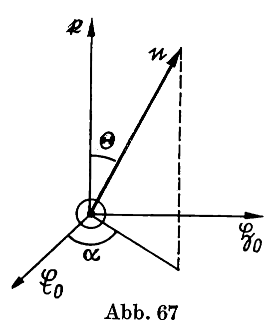


Abb. 67

Zur Berechnung des Depolarisationsgrades der Streustrahlung muß man die Hauptrichtungen des Polarisationstensors bestimmen. Bei der vorliegenden Aufgabe ist das auf Grund von Symmetrieüberlegungen leicht möglich. Bei festem $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{n}$ (Abb. 66, S. 308) sind ausgezeichnete Richtungen für $\mathfrak{E}_0$ die Normalenrichtung zur Streuebene und die zu $\mathfrak{k}$ senkrechte Richtung in der Streuebene.

Diesen Polarisationsrichtungen entsprechen die differentiellen Streuquerschnitte $\mathrm{d}\sigma_s(\Theta,\pi/2)$ und $\mathrm{d}\sigma_s(\Theta,0)$, die in der vorigen Aufgabe bestimmt wurden. Der Depolarisationsgrad ϱ ist als das Verhältnis der kleineren dieser Größen zur größeren definiert.

Für $|\beta_\mathrm{m}| < |\beta_\mathrm{e}|$ erhält man

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}\sigma_s(\Theta,0)}{\mathrm{d}\sigma_s(\Theta,\pi/2)} = \left|\frac{\beta_\mathrm{m} + \beta_\mathrm{e}\cos\Theta}{\beta_\mathrm{m}\cos\Theta + \beta_\mathrm{e}}\right|^2.$$

426. Für die dielektrische Kugel ergibt sich

$$\mathrm{d}\sigma_{s\mathrm{d}} = \frac{\omega^4 a^6}{2c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2(1+\cos^2\Theta)\,\mathrm{d}\Omega,$$

$$\sigma_{s\mathrm{d}} = \frac{8\pi\omega^4 a^6}{3c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2; \quad \varrho_\mathrm{d} = \cos^2\Theta,$$

für die ideal leitende Kugel

$$\mathrm{d}\sigma_{s\mathrm{l}} = \frac{\omega^4 a^6}{8c^4}[5(1+\cos^2\Theta) - 8\cos\Theta]\,\mathrm{d}\Omega,$$

$$\sigma_{s\mathrm{l}} = \frac{10\pi\omega^4 a^6}{3c^4}, \quad \varrho_\mathrm{l} = \left(\frac{1-2\cos\Theta}{2-\cos\Theta}\right)^2.$$

Aus der Beziehung für $d\sigma_{sd}$ folgt, daß der Streuquerschnitt für eine dielektrische Kugel bezüglich Vorwärts- und Rückwärtsstreuung (d.h. bezüglich $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$) symmetrisch ist. Das Verhältnis $d\sigma_{sd}(0)/d\sigma_{sd}(\pi)$ ist gleich 1. Der Streuquerschnitt für die leitende Kugel ist bedeutend anisotroper und unsymmetrischer; es gilt $d\sigma_{sl}(0)/d\sigma_{sl}(\pi) = 1/9$. Licht, das an der dielektrischen Kugel unter dem Winkel $\Theta = \pi/2$ gestreut wird, wird vollständig polarisiert; bei der Streuung an der ideal leitenden Kugel wird vollständige Polarisation bei $\cos\Theta = 0{,}5$, d.h. $\Theta = \pi/3 = 60°$, erreicht.

Die Anwendung der Gleichungen auf den Fall der dielektrischen Kugel ist gerechtfertigt, wenn man Effekte, die mit der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle innerhalb der Kugel zusammenhängen, vernachlässigen kann, d. h., wenn die Wellenlänge innerhalb der Kugel groß gegen den Kugelradius ist. Im Falle einer ideal leitenden Kugel, innerhalb der sich keine elektromagnetische Welle ausbreitet, ist hinreichend, daß die Bedingung $a \ll \lambda$ erfüllt ist, wobei λ die Wellenlänge im Medium bedeutet, das die Kugel umgibt.

427. Ebenso wie in der Aufgabe 424 muß man die Strahlung des induzierten elektrischen Momentes $\mathfrak{p}$ und des induzierten magnetischen Momentes $\mathfrak{m}$ betrachten. Wir wählen das in der Abb. 68 dargestellte Koordinatensystem. Der Vektor $\mathfrak{k}$ der Primärwelle liegt in der xz-Ebene. Wir betrachten zwei Fälle für die Polarisation der einfallenden Welle:

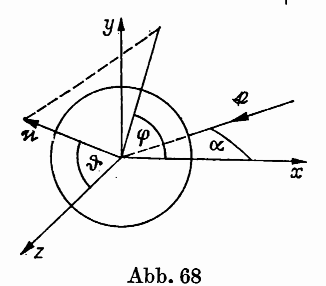


Abb. 68

a) Der Vektor $\mathfrak{E}_0$ liegt in der Einfallsebene (xz-Ebene),

b) der Vektor $\mathfrak{E}_0$ ist normal zur Einfallsebene.

Im Fall *a*) ist die in bezug auf die Scheibenebene longitudinale Komponente des äußeren elektrischen Feldes $E_{0\|} = -E_{0x} = E_0 \cos\alpha$ und die Transversalkomponente $E_{0\perp} = -E_{0z} = E_0 \sin\alpha$. Das elektrische Moment $\mathfrak{p}$ kann in der betrachteten Näherung ($a \ll \lambda$) als statisches Moment einer leitenden Scheibe im homogenen elektrischen Feld berechnet werden.

Nach den Aufgaben 197 und 199 ist die longitudinale elektrische Polarisierbarkeit der Scheibe $\beta_{e\|} = 4a^3/3\pi$ und die transversale Polarisierbarkeit $\beta_{e\perp} = 0$. Daher gilt

$$p_x = \beta_{e\|} E_{0x} = -\frac{4a^3}{3\pi} E_0 \cos\alpha, \qquad p_y = p_z = 0.$$

Das Magnetfeld hat nur eine von Null verschiedene longitudinale Komponente. Andererseits ist aber die longitudinale magnetische Polarisierbarkeit der Scheibe gleich Null (s. Aufgabe 378) und damit $\mathfrak{m} = 0$.

Der differentielle Streuquerschnitt ist

$$d\sigma_s = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4} \cos^2\alpha \,(1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi)\, d\Omega \tag{1}$$

und der totale Streuquerschnitt

$$\sigma_s = \frac{128 a^6 \omega^4}{27 \pi c^4} \cos^2\alpha. \qquad (2)$$

Im Fall *b*) erhält man

$$\left.\begin{aligned} p_y &= \frac{4a^3}{3\pi} E_0, \quad p_x = p_z = 0, \quad m_z = \frac{2a^3}{3\pi} E_0 \sin\alpha, \quad m_x = m_y = 0; \\ d\sigma_s &= \frac{16 a^6 \omega^4}{9\pi^2 c^4}\left[1 + \sin^2\vartheta\left(\frac{1}{4}\sin^2\alpha - \sin^2\varphi\right) + \sin\vartheta \sin\alpha \cos\varphi\right] d\Omega, \\ \sigma_s &= \frac{128 a^6 \omega^4}{27\pi c^4}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Für die unpolarisierte Welle ergibt sich mit Hilfe von (1), (2) und (3)

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_s &= \frac{8 a^6 \omega^4}{9\pi^2 c^4}\left[1 + \sin^2\vartheta\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\varphi\right) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \cos^2\alpha + \sin\vartheta \sin\alpha \cos\varphi\right] d\Omega, \\ \sigma_s &= \frac{128 a^6 \omega^4}{27\pi c^4}\left(1 - \frac{3}{8}\sin\alpha\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

428. Man findet

$$d\sigma_s = \frac{a^4 h^2 \omega^4 (\varepsilon - 1)^2}{18 c^4 \varepsilon^2}(1 + \cos^2\vartheta)\, d\Omega,$$

wobei ϑ den Streuwinkel bezeichnet, und

$$\sigma_s = \frac{8\pi a^4 h^2 \omega^4 (\varepsilon - 1)^2}{27 c^4 \varepsilon^2}.$$

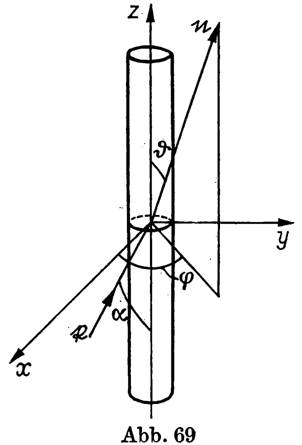


Abb. 69

429. Wir wählen das in Abb. 69 dargestellte Koordinatensystem. Der Vektor $\mathfrak{k}$ der Primärwelle liege in der xz-Ebene. Der Zylinder wird durch ein gestrecktes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a und h ersetzt. Wie die Lösungen der Aufgaben 197, 198 und 378 zeigen, ist die longitudinale elektrische Polarisierbarkeit eines stark gestreckten Rotationsellipsoids der Größenordnung nach um das h/a-fache größer als seine transversale elektrische und magnetische Polarisierbarkeit. Daher hängt der Streuquerschnitt wesentlich davon ab, ob das elektrische Feld der einfallenden Welle eine von Null verschiedene longitudinale Komponente besitzt.

Hat diese Komponente eine merkliche Größe, so wird die Sekundärstrahlung durch die z-Komponente des elektrischen Dipolmomentes hervorgerufen. Die übrigen Komponenten des elektrischen Momentes und das magnetische Moment kann man vernachlässigen. Wählt man $\mathfrak{E}_0$ in der xz-Ebene, so ergibt

sich

$$d\sigma_s = \frac{\omega^4 h^6}{9c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha \sin^2\vartheta \, d\Omega,$$

$$\sigma_s = \frac{8\pi \omega^4 h^6}{27 c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha.$$

Ist die longitudinale Komponente von $\mathfrak{E}_0$ Null, so wird die Streuung durch die Transversalkomponente des elektrischen Momentes und das magnetische Moment, die beide von der gleichen Größenordnung sind, hervorgerufen. In diesem Fall erhält man

$$d\sigma_s = \frac{a^4 h^2 \omega^4}{9c^4} [(1 + 2n_x \sin\alpha)^2 + 3\cos^2\alpha + n_z^2(4 - \sin^2\alpha) + \\ + 8n_z \cos\alpha + 2n_x n_z \sin 2\alpha] \, d\Omega,$$

$$\sigma_s = \frac{40\pi a^4 h^2 \omega^4}{27 c^4} \left(1 + \frac{3}{5}\cos^2\alpha\right),$$

wobei n_i ($i = x, y, z$) die Komponenten des Einheitsvektors bezeichnet, der die Streurichtung angibt.

Der Streuquerschnitt der unpolarisierten Welle ist

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \frac{\omega^4 h^6}{18 c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha \sin^2\vartheta,$$

$$\sigma_s = \frac{4\pi \omega^4 h^6}{27 c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha.$$

430. Ist der Vektor $\mathfrak{E}_0$ in der xz-Ebene polarisiert (Abb. 69), so erhält man

$$d\sigma_{s\parallel} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)^2 \left[(1 - n_x^2)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}(\varepsilon + 1)^2 (1 - n_z^2)\sin^2\alpha - \\ - \frac{1}{2}(\varepsilon + 1) n_x n_z \sin 2\alpha\right] d\Omega.$$

Ist er dagegen in der Normalenrichtung zur xz-Ebene polarisiert, so ergibt sich

$$d\sigma_{s\perp} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)^2 (1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi) \, d\Omega.$$

431. Man kann die elektrische Gesamtfeldstärke in einem Raumpunkt in der Form

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{E}_a(\mathfrak{r}, t) + \mathfrak{E}'(\mathfrak{r}, t) \tag{1}$$

schreiben, wobei $\mathfrak{E}_a(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{E}_0 \, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}$ das Feld der einfallenden Welle und $\mathfrak{E}'(\mathfrak{r}, t)$ das Feld der Streu- (Sekundär-) Welle bedeuten. In jedem Punkt innerhalb des Körpers (der inhomogen sein kann) ist der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}, t)$ proportional $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\varepsilon(\mathfrak{r}) - 1}{4\pi} \mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) = \alpha(\mathfrak{r}) \, \mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t). \tag{2}$$

Das sekundäre Feld $\mathfrak{E}'$ wird durch die elektrische Dipolpolarisation erzeugt, die im Volumen des Körpers mit der Dichte (2) verteilt ist. Zur Berechnung von $\mathfrak{E}'$ betrachten wir das Polarisationspotential $\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t)$ (HERTZscher Vektor), das durch die Polarisation $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}, t)$ des Körpers hervorgerufen wird [s. Kap. 12, Gleichung (12.12)]:

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\mathfrak{P}(\mathfrak{r})\, e^{i(kR - \omega t)}}{R}\, dV'. \tag{3}$$

Setzt man

$$\mathfrak{E}' = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{Z} - 4\pi\,\mathfrak{P} \tag{4}$$

in (1) ein und unterdrückt den allgemeinen Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$, so erhält man die Integralgleichung

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{E}_0\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int \frac{\alpha(\mathfrak{r}')\,\mathfrak{E}(\mathfrak{r}')\, e^{ikR}}{R}\, dV' - 4\pi\,\alpha(\mathfrak{r})\,\mathfrak{E}(\mathfrak{r}). \tag{5}$$

Diese Integralgleichung ist für die Theorie der Streuung elektromagnetischer Wellen an Körpern mit $\varepsilon \approx 1$ nützlich. Wegen der Kleinheit von $\alpha = (\varepsilon - 1)/4\pi$ wird der Integralterm in (5) in diesem Fall klein sein, und man kann die Lösung mit der Methode der sukzessiven Näherungen als Potenzreihe in α bestimmen.

432.[1]) Die Integralgleichung (5) der vorigen Aufgabe lautet für das Innere der Kugel ($r < a$)

$$\mathfrak{E}_1(\mathfrak{r}) = \mathfrak{E}_0\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} + \alpha \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int \mathfrak{E}_1(\mathfrak{r}')\,\frac{e^{ikR}}{R}\, dV' - 4\pi\,\alpha\,\mathfrak{E}_1(\mathfrak{r}) \tag{1}$$

und für das Äußere der Kugel ($r > a$)

$$\mathfrak{E}_2(\mathfrak{r}) = \mathfrak{E}_0\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} + \alpha \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int \mathfrak{E}_1(\mathfrak{r}')\,\frac{e^{ikR}}{R}\, dV', \tag{2}$$

wobei $\alpha = (\varepsilon - 1)/4\pi \ll 1$ eine Konstante ist und über das Volumen der Kugel integriert wird.

Wir setzen die Lösungen innerhalb und außerhalb der Kugel als Potenzreihen in α an:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1^{(0)} + \alpha\,\mathfrak{E}_1^{(1)} + \ldots; \qquad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_2^{(0)} + \alpha\,\mathfrak{E}_2^{(1)} + \ldots$$

Setzt man dies in (1) und (2) ein und vergleicht die Terme mit gleichen Potenzen von α, so ergibt sich in nullter Näherung

$$\mathfrak{E}_1^{(0)} = \mathfrak{E}_2^{(0)} = \mathfrak{E}_0\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}},$$

d.h. die ungestörte einfallende Welle. In der nächsten Näherung erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_1^{(1)} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int \mathfrak{E}_0\,\frac{e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}' + kR)}}{R}\, dV' - 4\pi\,\mathfrak{E}_0\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}},\\ \mathfrak{E}_2^{(1)} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int \mathfrak{E}_0\,\frac{e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}' + kR)}}{R}\, dV'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) Die Entwicklung nach einem kleinen Parameter, die in dieser Aufgabe angewandt wird, ist der BORNschen Näherung in der Quantenmechanik analog. Diese wird in der Theorie der Streuung von Teilchen an quantenmechanischen Systemen häufig benutzt.

Eine Bedingung für die Gültigkeit der erhaltenen Beziehungen ist, daß der Korrektionsterm $\alpha\,\mathfrak{E}^{(1)}$ klein gegen den Hauptterm $\mathfrak{E}_0$ ist:

$$|\alpha\,\mathfrak{E}^{(1)}| \ll \mathfrak{E}_0 .$$

Diese Ungleichung kann für alle r erfüllt werden. Durch Abschätzung der Integrale in (3) kann man daraus eine Bedingung ableiten, der ω, ε und a genügen müssen.

Zur Bestimmung des Wirkungsquerschnitts genügt es, das Feld in großen Abständen von der Kugel zu berechnen. Dabei kann man R im Nenner der Integranden durch r und im Exponenten durch $r - \mathfrak{n}\,\mathfrak{r}'$ mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}/r$ ersetzen. Man erhält

$$\mathfrak{E}^{(1)} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E}_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{i(\mathfrak{k} - k\mathfrak{n})\mathfrak{r}'}\, dV' \tag{4}$$

(die Indizes wurden fortgelassen). Die Differenz $\mathfrak{k} - k\,\mathfrak{n}$ stellt die Änderung des Wellenvektors bei der Streuung dar; wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{q}$ $[q = 2k\sin(\Theta/2)$, wobei Θ den Streuwinkel bedeutet]. Bei der Berechnung des Integrals wählen wir die Polarachse in Richtung von $\mathfrak{q}$, so daß

$$\int e^{i(\mathfrak{q}\mathfrak{r}')} r'^2\, dr'\, d\Omega = 4\pi \frac{\sin q a - q a \cos q a}{q^3}$$

wird. Zur Berechnung der doppelten Rotation in (4) berücksichtigen wir nur die $1/r$ proportionalen Terme, d.h.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E}_0 \frac{e^{ikr}}{r} = k^2\, \mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}_0 \times \mathfrak{n}) \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Schließlich erhalten wir für das sekundäre Feld

$$\mathfrak{E}' = \alpha\,\mathfrak{E}^{(1)} = \frac{\omega^2 a^3}{c^2} \frac{\varepsilon - 1}{3}\, \mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}_0 \times \mathfrak{n})\, \varphi(q a) \frac{e^{ikr}}{r} \tag{5}$$

mit

$$\varphi(q a) = \frac{3(\sin q a - q a \cos q a)}{(q a)^3} = 3\sqrt{\frac{\pi}{(q a)^3}}\, J_{3/2}(q a).$$

Wir vergleichen nun (5) mit dem in Aufgabe 426 bestimmten Ausdruck für kleine a. Geht man in (5) zur Grenze $q a \ll 1$ über, so folgt

$$\mathfrak{E}' = \frac{\omega^2 a^3}{c^2} \frac{\varepsilon - 1}{3}\, \mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}_0 \times \mathfrak{n}) \frac{e^{ikr}}{r}, \tag{6}$$

da $\varphi(q a) \approx 1$ für $q a \ll 1$ ist.

Berechnet man andererseits $\mathfrak{E}'$ mit Hilfe der Gleichung

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{n} \times (\ddot{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{n}) \frac{e^{ikr}}{c^2 r},$$

wobei

$$\mathfrak{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3\, \mathfrak{E}_0$$

das statische Dipolmoment einer Kugel bedeutet, so erhält man

$$\mathfrak{E}' = \frac{\omega^2 a^3}{c^2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right) \mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}_0 \times \mathfrak{n}) \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{6'}$$

In (6') steht $1/(\varepsilon + 2)$ an Stelle des Faktors $^1/_3$. Es besteht jedoch kein Widerspruch zwischen (6) und (6'), da (6) nur bis auf $\varepsilon - 1$ genau richtig ist.

Der differentielle Streuquerschnitt ist

$$\frac{d\sigma_s(\Theta, \alpha)}{d\Omega} = \frac{\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{9 c^4} \varphi^2(q\,a)\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cos^2\Theta) \tag{7}$$

(die Bedeutung der Winkel Θ und α ist in Abb. 67, S. 321, angegeben).

Dieser Wirkungsquerschnitt unterscheidet sich vom Streuquerschnitt einer kleinen dielektrischen Kugel (s. die Lösung von Aufgabe 426) dadurch, daß im Nenner $(\varepsilon + 2)^2$ durch 9 ersetzt ist und der Faktor $\varphi^2(q\,a)$ auftritt, der die Interferenz der von den verschiedenen Kugelelementen herrührenden Sekundärwellen berücksichtigt. Daher ist der Depolarisationsgrad des Streulichts ebenso groß wie im Fall einer kleinen dielektrischen Kugel:

$$\varrho = \cos^2\Theta. \tag{8}$$

Die Mittelung über die Polarisationen ergibt

$$\frac{d\sigma_s(\Theta)}{d\Omega} = \frac{\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{18 c^4} \varphi^2(q\,a)\,(1 + \cos^2\Theta).$$

Wir betrachten noch den Fall einer sehr großen Kugel ($k\,a \gg 1$). Sind die Winkel so gewählt, daß auch $q\,a \gg 1$ ist, so gilt $\varphi(q\,a) \to 0$, und der Wirkungsquerschnitt ist in diesem Winkelgebiet sehr klein. Die explizite Form von q zeigt, daß $q\,a \gg 1$ der Bedingung $\Theta \gg 1/k\,a$ äquivalent ist; im Falle einer großen Kugel erfolgt die Streuung also in Vorwärtsrichtung in das Winkelintervall $\Theta \leqq 1/k\,a$.

433. Bei $k\,a \gg 1$ ist die Funktion $\varphi^2(q\,a)$ im Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der vorigen Aufgabe nur im engen Winkelintervall $\Theta \leqq 1/k\,a$ merklich von Null verschieden. In diesem Winkelintervall kann der Faktor $(1 + \cos^2\Theta)$ als konstant und gleich 2 angenommen werden. Daher erhalten wir

$$\sigma_s = \frac{2\pi\,\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{9 c^4} \int\limits_0^\pi \varphi^2(q\,a) \sin\Theta\, d\Theta.$$

Führen wir die neue Variable $y = q\,a = 2k\,a \sin(\Theta/2)$ ein, so erhalten wir im Grenzfall $k\,a \gg 1$ schließlich

$$\sigma_s = \frac{\pi\,\omega^2 a^4 (\varepsilon - 1)^2}{18 c^2}.$$

Für eine kleine Kugel ($k\,a \ll 1$) ergibt sich, indem man $\varepsilon + 2$ durch 3 ersetzt (s. Lösung der Aufgabe 426),

$$\sigma_s = \frac{8\pi\,\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{27 c^4}.$$

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Wirkungsquerschnitte verschieden von der Frequenz ($\sim\omega^4$ bzw. $\sim\omega^2$) und dem Radius der Kugel ($\sim a^6$ bzw. $\sim a^4$) abhängen.

434. Wir gehen von der Beziehung

$$\sigma_a = -\frac{1}{E_0^2}\,\mathrm{Re}\int (\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}^*)\,\mathfrak{n}\,r^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

aus, wobei $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}/r$ ist, σ_a den Absorptionsquerschnitt bedeutet und über die Oberfläche einer großen, den Streuer umschließenden Kugel integriert wird. Gleichung (1) drückt die Tatsache aus, daß der Absorptionsquerschnitt dem Energiefluß durch die Kugeloberfläche zum Mittelpunkt hin proportional ist.

Setzt man den Ausdruck für $\mathfrak{E}$ aus der Aufgabenstellung und

$$\mathfrak{H} = E_0\left\{\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{e}\,\mathrm{e}^{ikz} + \mathfrak{n}\times\mathfrak{F}(\mathfrak{n})\,\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right\}$$

in (1) ein und benutzt die Transversalitätsbedingung $\mathfrak{n}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{n}) = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_0^2}\,\mathrm{Re}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}^*)\,\mathfrak{n} &= \mathfrak{n}_0\,\mathfrak{n} + \frac{|\mathfrak{F}|^2}{r^2} + \\ &+ \frac{1}{2}[\mathfrak{e}\,\mathfrak{F} + (\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{n})(\mathfrak{e}\,\mathfrak{F}) - (\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})(\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{F})]\,\frac{\mathrm{e}^{ik(r-z)}}{r} + \\ &+ \frac{1}{2}[\mathfrak{e}^*\,\mathfrak{F}^* + (\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{n})(\mathfrak{e}^*\,\mathfrak{F}^*) - (\mathfrak{e}^*\,\mathfrak{n})(\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{F}^*)]\,\frac{\mathrm{e}^{-ik(r-z)}}{r}.\end{aligned} \tag{2}$$

Bei der Integration über die Winkel ergibt der erste Term Null und der zweite den totalen Streuquerschnitt σ_s. Die Integrale der übrigen Terme können durch partielle Integration umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\int(\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{n})(\mathfrak{e}\,\mathfrak{F})\,\mathrm{e}^{ik(r-z)}\,r^2\,\mathrm{d}\Omega &= \\ = \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\Bigg\{(\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{n})(\mathfrak{e}\,\mathfrak{F})\,\mathrm{e}^{ikr(1-\cos\vartheta)}\Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} &- \\ - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{ikr(1-\cos\vartheta)}\,\frac{\partial}{\partial\cos\vartheta}\,(\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{n})(\mathfrak{e}\,\mathfrak{F})\,\mathrm{d}\cos\vartheta\Bigg\}&.\end{aligned}$$

Das letzte Integral liefert nach nochmaliger partieller Integration Terme, die $1/r$ proportional sind, und kann deshalb vernachlässigt werden. Außerdem kann man den Term mit dem oszillierenden Faktor e^{2ikr} weglassen, da er zum Gesamtenergiefluß keinen Beitrag liefert. Dies ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß die Vorstellung der streng monochromatischen Welle eine Idealisierung ist. Tatsächlich ist jede reale „monochromatische“ Welle eine Super-

position von Harmonischen, deren Frequenzen in einem mehr oder weniger engen Intervall $\Delta\omega$ liegen. Bei der Mittelung des Faktors e^{2ikr} über ein beliebiges derartiges Intervall erhalten wir Null, da r sehr groß ist. Daher gilt

$$\frac{1}{r}\int (\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{n})\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{F})\,e^{ik(r-z)}r^2\,d\Omega = \frac{2\pi i}{k}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{n}_0)\,.$$

Analog berechnet man die Integrale der anderen Terme. Terme, die die Faktoren $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})$ und $(\mathfrak{e}^*\,\mathfrak{n})$ enthalten, liefern bei der Integration keinen Beitrag, da $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}_0) = 0$ ist. Setzt man die berechneten Integrale in (1) ein, so erhält man schließlich

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}[\mathfrak{e}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{n}_0)]\,. \tag{3}$$

Das optische Theorem (3) erlaubt eine einfache physikalische Interpretation: Der totale Wirkungsquerschnitt ist ein Maß für die Schwächung der Primärwelle. Diese Schwächung ist das Ergebnis der Interferenz der einfallenden Welle mit dem Teil der Streuwelle, der dieselbe Polarisation und Ausbreitungsrichtung hat wie die einfallende Welle. Es zeigt sich also, daß zwischen dem totalen Wirkungsquerschnitt und der Streuamplitude der Vorwärtsstreuung ein Zusammenhang besteht.

435. Die Streuwelle wird von dem durch die einfallende Welle induzierten elektrischen und magnetischen Dipolmoment erzeugt. Die Streuamplitude $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ (s. die vorige Aufgabe) wird mit Hilfe der Gleichungen (12.17) und (12.20) bestimmt.

Als Endergebnis erhält man

$$\sigma_a = \frac{4\pi\,\omega}{c}\,(\beta_e'' + \beta_m'')\,.$$

436.

$$\sigma_a = 6\pi\,b^2\,\zeta'.$$

437. Die Kraft hat die Richtung des Wellenvektors der einfallenden Welle, und ihr Betrag ist

$$\bar{F} = \frac{\bar{S}_0}{c}\left[\sigma_a + \int (1-\cos\vartheta)\,\frac{d\sigma_s(\vartheta,\varphi)}{d\Omega}\,d\Omega\right],$$

wobei $\bar{S}_0$ die mittlere Energiestromdichte der einfallenden Welle bedeutet und über den ganzen Raumwinkel integriert wird.

438. Für die ideal leitende Kugel erhält man

$$\bar{F} = \frac{43\,a^6\,\omega^4}{96\,c^4}\,E_0^2$$

und für die dielektrische Kugel

$$\bar{F} = \frac{a^6\,\omega^4}{3\,c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2 E_0^2\,.$$

439. Wir wenden die Beugungsformel (8.25) an. Als Integrationsfläche wählen wir die Ebene, in der sich der Schirm befindet. Dann gilt auf der Integrationsfläche

$$u = A\,\frac{e^{ikR_1}}{R_1}, \qquad dS_n = 2\pi\, r\, dr \cos(R_1, z) = 2\pi\,\frac{z_1 r}{R_1}\, dr,$$

wobei A eine Konstante bedeutet. Setzt man diese Ausdrücke in (8.25) ein und geht zur neuen Integrationsvariablen $\varrho = R + R_1$ über, so ergibt sich

$$u_P(z) = -i\,kA\,z_1 \int\limits_a^\infty \frac{e^{ik(R+R_1)}}{R R_1^2}\, r\, dr = -i\,kA\,z_1 \int\limits_{\varrho_0}^\infty \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho R_1(\varrho)}\, d\varrho \tag{1}$$

mit $\varrho_0 = \sqrt{a^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z_1^2}$.

Durch partielle Integration kann man (1) als Reihe nach wachsenden negativen Potenzen von $k\,\varrho$ darstellen; wegen der Bedingung $\lambda \ll a$ können dabei alle Terme der Reihe außer dem ersten vernachlässigt werden. Man erhält

$$u_P(z) = u_0\,\frac{z_1\, e^{ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\varrho_0},$$

wobei $u_0 = A\, e^{ik\sqrt{a^2+z_1^2}}/\sqrt{a^2 + z_1^2}$ die Amplitude der einfallenden Welle auf dem Rand des Schirmes ist.

Geht man zur Intensität $I \sim |u_P|^2$ über, so erhält man

$$I(z) = I_0\,\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{a^2 + z_1^2} + \sqrt{a^2 + z^2}\right)^2}. \tag{2}$$

In dem bezüglich des Schirmes symmetrischen Punkt ($z_1 = z$) gilt

$$I(z) = \frac{I_0}{4}\,\frac{z^2}{a^2 + z^2}.$$

Wenn der symmetrische Punkt nicht zu dicht hinter dem Schirm liegt, erhält man also dort einen Lichtfleck.

Dieses Ergebnis, das der Vorstellung über die geradlinige Fortpflanzung von Lichtstrahlen widerspricht, wurde 1818 von POISSON theoretisch vorausgesagt; er benutzte es als Einwand gegen die FRESNELsche Beugungstheorie und die Wellentheorie des Lichtes überhaupt. Experimente von ARAGO und FRESNEL bestätigten das Vorhandensein eines Lichtflecks als Folge der Schirmsymmetrie. Wellen, die den Rand des Schirmes umlaufen, gelangen mit gleichen Phasen in den Mittelpunkt. Diese Eigenschaft besitzen offensichtlich alle Punkte, die auf der Mittellinie liegen: In ihnen wird die Lichtintensität bedeutend größer sein als in benachbarten, nicht auf der z-Achse liegenden Punkten.

440. Mit Hilfe des BABINETschen Prinzips (8.27) erhalten wir bei $z = z_1 \gg a$

$$I = I_0 \sin^2 \frac{k a^2}{2z},$$

wobei I_0 die Intensität der Primärwelle am Rand der Öffnung bedeutet.

441. Für $z \gg a$ erhält man

$$I = 4 I_0 \sin^2 \frac{k a^2}{4z}.$$

Die Lichtintensität auf der Mittellinie der kreisförmigen Blende oszilliert unendlich oft und nimmt mit $z \to \infty$ auf Null ab. Die Abnahme der Intensität auf der Achse hängt damit zusammen, daß ein paralleles Bündel nach der Beugung an einer Öffnung divergiert und der Energiefluß durch die Öffnung sich mit wachsendem z auf eine immer größere Fläche verteilt.

442. Mit Hilfe der Gleichung (8.26) für die FRAUNHOFERsche Beugung erhält man

$$\mathrm{d}I = I_0 \frac{[a J_1(a k \alpha) - b J_1(b k \alpha)]^2}{\alpha^2} \mathrm{d}\Omega,$$

wobei α den Beugungswinkel und I_0 die Intensität des einfallenden Lichtes bedeuten.

Im Falle einer kreisförmigen Öffnung ist

$$\mathrm{d}I = I_0' \frac{J_1^2(a k \alpha)}{\pi \alpha^2} \mathrm{d}\Omega,$$

wobei $I_0' \sim \pi a^2 |u_0|^2$ die Gesamtintensität des auf die Öffnung treffenden Lichtes ist.

443. Die gebeugte Welle wird durch die Funktion

$$u_P = \frac{u_0 \mathrm{e}^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int \mathrm{e}^{i \mathfrak{q}_{||} \mathfrak{r}} \mathrm{d}S_n$$

beschrieben, wobei $\mathfrak{k}' - \mathfrak{k} = \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_{||}$ bzw. $\mathfrak{q}_{\perp}$ die Komponenten von $\mathfrak{q}$ in der Schirmebene bzw. senkrecht dazu bedeuten.

Bei der Integration über die Fläche der Öffnung benutzen wir Polarkoordinaten und legen den Ursprung in den Mittelpunkt der Öffnung und die Polarachse in die Richtung von $\mathfrak{q}_{||}$. Es ergibt sich

$$u_P = \frac{u_0 \mathrm{e}^{ikR_0} k \cos\Theta}{2\pi i R_0} \int \mathrm{e}^{-i q_{||} r \cos\varphi} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi,$$

wobei mit Θ der Einfallswinkel bezeichnet ist.

Die Winkelverteilung der Lichtintensität erhält man mit Hilfe der Gleichungen (A III.11) und (A III.9):

$$\mathrm{d}I = |u_P|^2 R_0^2 \,\mathrm{d}\Omega = I_0 \frac{J_1^2(q_{||} a)}{\pi q_{||}^2} \mathrm{d}\Omega,$$

wobei

$$I_0 \sim |u_0|^2 \pi a^2 \cos\Theta$$

die Gesamtintensität des auf die Öffnung auftreffenden Lichtes ist.

Wir nehmen den Beugungswinkel α (den Winkel zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$) als klein an und drücken $q_{||}$ durch α, den Einfallswinkel Θ und den Azimutwinkel α' zwischen $\mathfrak{q}$ und der Einfallsebene aus:

$$q_{||} = k \alpha \sqrt{1 - \sin^2\Theta \cos^2\alpha'}.$$

Damit folgt
$$dI = I_0 \frac{J_1^2(k\,a\,\alpha\,\sqrt{1 - \sin^2\Theta\,\cos^2\alpha'})}{\pi\,\alpha^2(1 - \sin^2\Theta\,\cos^2\alpha')}\,d\Omega.$$

Die Formel wird für streifenden Einfall ($\Theta \approx \pi/2$) falsch.

444. Aus der KIRCHHOFFschen Formel in Vektorform (8.28) erhält man für das Strahlungsfeld die folgenden Komponenten:

$$E_\vartheta = H_\alpha = -i\,k\,a\,b\,E_0 \frac{e^{ikR}}{\pi R}\,\frac{\sin k'_x a}{k'_x a}\,\frac{\sin k'_y b}{k'_y b}\,(1 + \cos\vartheta)\sin\alpha,$$

$$E_\alpha = -H_\vartheta = -i\,k\,a\,b\,E_0 \frac{e^{ikR}}{\pi R}\,\frac{\sin k'_x a}{k'_x a}\,\frac{\sin k'_y b}{k'_y b}\,(1 + \cos\vartheta)\cos\alpha.$$

Dabei bedeuten ϑ und α die Winkel des Kugelkoordinatensystems, dessen Polarachse auf der Öffnungsebene senkrecht steht, und $k'_x = k\sin\vartheta\cos\alpha$, $k'_y = k\sin\vartheta\sin\alpha$ die Komponenten des Wellenvektors der gebeugten Welle.

Die Winkelverteilung der Strahlungsintensität ist

$$dI = I_0 \frac{a\,b\,k^2}{4\pi^2}\left(\frac{\sin k'_x a}{k'_x a}\right)^2 \left(\frac{\sin k'_y b}{k'_y b}\right)^2 (1 + \cos\vartheta)^2\,d\Omega,$$

wobei
$$I_0 = \frac{c\,a\,b}{2\pi}\,E_0^2$$

die Intensität der auf die Öffnung auftreffenden Welle bedeutet.

445. Legt man die x-, y- und z-Achse in die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{k}$, so ist das Strahlungsfeld

$$E_\vartheta = H_\alpha = -\frac{i\,k\,a^2 E_0}{2}\,\frac{e^{ikR}}{R}\,\frac{J_1(k\,a\sin\vartheta)}{k\,a\sin\vartheta}\,(1 + \cos\vartheta)\cos\alpha,$$

$$E_\alpha = -H_\vartheta = \frac{i\,k\,a^2 E_0}{2}\,\frac{e^{ikR}}{R}\,\frac{J_1(k\,a\sin\vartheta)}{k\,a\sin\vartheta}\,(1 + \cos\vartheta)\sin\alpha$$

und die Verteilung der Strahlungsintensität

$$dI = \frac{1}{4}\,I_0\left(\frac{J_1(k\,a\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}\right)^2 (1 + \cos\vartheta)^2\,d\Omega,$$

wobei $I_0 = {}^1/_8\,c\,a^2\,E_0^2$ die Intensität der auf die Öffnung auftreffenden Welle ist.

Für $\vartheta \ll 1$ wird
$$dI = I_0 \frac{J_1^2(k\,a\,\vartheta)}{\pi\,\vartheta^2}\,d\Omega.$$

Dasselbe Ergebnis wurde in der Aufgabe 442 mit Hilfe der skalaren Beugungsformel gefunden.

8.3. Ebene Wellen in anisotropen und gyrotropen Medien

446.

$$\cos\alpha = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}^2\cos^2\Theta + \varepsilon_{\perp}^2\sin^2\Theta}}, \qquad \tan\vartheta = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}\tan\Theta.$$

447. Damit die Grenzbedingungen für die Feldvektoren in jedem Punkt der Trennfläche erfüllt sind, müssen die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren der einfallenden Welle, der reflektierten Welle und der beiden gebrochenen Wellen gleich sein. Das ergibt für die ordentliche Welle

$$k_0\sin\Theta_0 = k_1\sin\Theta_2', \qquad \frac{\sin\Theta_2'}{\sin\Theta_0} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}\mu}\,.$$

Die Richtung des Strahles (des POYNTINGschen Vektors) fällt bei der ordentlichen Welle mit der Richtung des Wellenvektors zusammen und bildet deshalb mit der Normalen zur Grenzfläche den Winkel Θ_2'.

Im Falle der außerordentlichen Welle erhält man

$$k_0\sin\Theta_0 = k_2\sin\Theta_2'' = k_0\sin\Theta_2''\sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}\mu}{\varepsilon_{\perp}\sin^2\Theta_2'' + \varepsilon_{\parallel}\cos^2\Theta_2''}}$$

[s. (8.30)] oder

$$\sin^2\Theta_2'' = \frac{\varepsilon_{\parallel}\sin^2\Theta_0}{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}\mu + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})\sin^2\Theta_0}.$$

Der Winkel ϑ'' zwischen dem Strahl und der optischen Achse (die mit der Normalen zur Grenzfläche übereinstimmt) wird nach der vorigen Aufgabe durch die Bedingung

$$\tan\vartheta'' = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}\tan\Theta_2'' = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}\sin\Theta_0}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_{\parallel}\mu - \sin^2\Theta_0)}}$$

bestimmt. Der Reflexionswinkel am Kristall ist wie beim isotropen Medium gleich dem Einfallswinkel: $\Theta_1 = \Theta_0$.

448. Der außerordentliche Strahl liegt in der Einfallsebene und bildet mit der Flächennormalen den Winkel Θ_2' mit

$$\sin\Theta_2' = \sqrt{\varepsilon_{\perp}\mu}\sin\Theta_0.$$

Der Wellenvektor $\mathfrak{k}_2$ der außerordentlichen Welle liegt in der Einfallsebene und bildet mit der Normalen den Winkel Θ_2'', der durch

$$\sin^2\Theta_2'' = \frac{\varepsilon_{\perp}\sin^2\Theta_0}{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}\mu + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})\sin^2\Theta_0\cos^2\alpha}$$

bestimmt ist. Die Strahlrichtung der außerordentlichen Welle liegt nicht in der Einfallsebene. Der Strahl liegt in einer Ebene mit $\mathfrak{k}_2$ und der optischen

Achse und bildet mit der letzteren den Winkel ϑ (Abb. 70) mit

$$\tan\vartheta = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp^2\,\varepsilon_{||}\,\mu + \varepsilon_\perp(\varepsilon_\perp - \varepsilon_{||})\sin^2\Theta_0\cos^2\alpha}}{\varepsilon_{||}\sin\Theta_0\cos\alpha}.$$

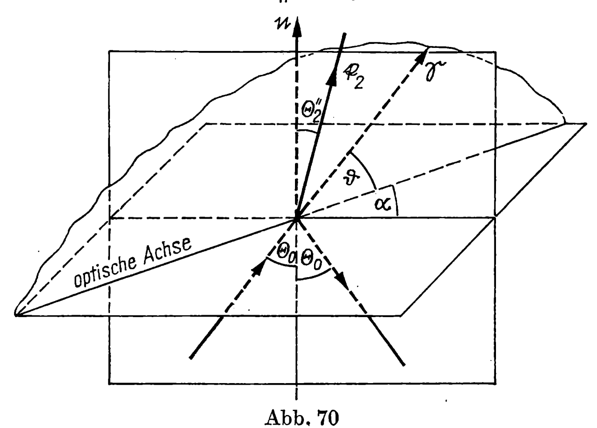


Abb. 70

449. Setzt man in die MAXWELLschen Gleichungen (8.1) bis (8.4) für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ebene Wellen ein, so erhält man eine Gleichung, die die Amplituden und Wellenvektoren der Wellen bestimmt, die sich im betrachteten Medium ausbreiten können:

$$\mathfrak{k}\times(\mathfrak{k}\times\mathfrak{H}_0) = -\frac{\omega^2\,\varepsilon}{c^2}\,\mu\mathfrak{H}_0. \tag{1}$$

Wir führen den Winkel Θ zwischen dem Wellenvektor $\mathfrak{k}$ und der z-Achse ein und schreiben (1) in Komponenten bezüglich der Koordinatenachsen.

Setzt man die Determinante des Gleichungssystems gleich Null, so erhält man eine biquadratische Gleichung für k. Ihre Lösung ergibt

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega^2\,\varepsilon\,\mu_{||}}{2c^2}\;\frac{\mu\sin^2\Theta + 2\dfrac{\mu_\perp}{\mu_{||}} \pm \sqrt{\mu^2\sin^4\Theta + (2\mu_a/\mu_{||})^2\cos^2\Theta}}{\left(\dfrac{\mu_\perp}{\mu_{||}} - 1\right)\sin^2\Theta + 1} \tag{2}$$

mit $\mu = (\mu_\perp^2 - \mu_a^2 - \mu_\perp\,\mu_{||})/\mu_{||}^2$.

In jeder Richtung können sich zwei Wellen mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten $v_{1,2} = \omega/k_{1,2}$ ausbreiten, die vom Winkel Θ abhängen. Es gibt keine Richtung, in der diese Phasengeschwindigkeiten gleich sind, da der Radikand in (2) keine Nullstelle hat.

Setzt man in (2) $\mu_a = 0$, so erhält man die Phasengeschwindigkeiten der Wellen, die sich in einem nichtgyrotropen, anisotropen magnetischen Kristall ausbreiten können:

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon\,\mu_\perp, \qquad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\varepsilon\,\mu_\perp\,\varepsilon_{||}}{\mu_{||}\cos^2\Theta + \mu_\perp\sin^2\Theta}.$$

Die erste dieser Wellen (die ordentliche) hat die von der Ausbreitungsrichtung unabhängige Geschwindigkeit $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon\,\mu_\perp}$. Die Geschwindigkeit der zweiten Welle (der außerordentlichen) hängt vom Winkel zwischen der Symmetrieachse des Kristalls und der Ausbreitungsrichtung ab. Breitet sich die Welle in Richtung der Symmetrieachse aus ($\Theta = 0$), so stimmen beide Geschwindigkeiten miteinander überein, und beide Wellen entarten zu einer.

450. In beliebiger Richtung können sich zwei Wellen mit den Phasengeschwindigkeiten $v_{1,2} = \omega/k_{1,2}$ ausbreiten; $k_{1,2}$ wird durch die Gleichung (2) der vorigen Aufgabe bestimmt, in der die magnetischen Größen durch die entsprechenden elektrischen zu ersetzen sind.

451. Die ebene Welle, die sich in Richtung des konstanten Magnetfeldes ausbreitet, zerfällt in zwei Wellen mit zirkularer Rechts- bzw. Linkspolarisation und den verschiedenen Phasengeschwindigkeiten $v_\pm = c/\sqrt{\varepsilon(\mu_\perp \pm \mu_a)}$.

Bei der Ausbreitung senkrecht zum konstanten Magnetfeld wird die Welle mit der Geschwindigkeit $v = c/\sqrt{\varepsilon\,\mu_{||}}$ rein transversal ($\mathfrak{E} \perp \mathfrak{k}$, $\mathfrak{H} \perp \mathfrak{k}$). Sie ist den Wellen analog, die sich in einem isotropen Medium mit den skalaren Parametern ε, $\mu = \mu_{||}$ ausbreiten. In der zweiten Welle mit der Geschwindigkeit $v = c\sqrt{\mu_\perp/\varepsilon(\mu_\perp^2 - \mu_a^2)}$ hat der Vektor $\mathfrak{E}$ die Richtung des konstanten Magnetfeldes und der Vektor $\mathfrak{H}$ eine Komponente in Ausbreitungsrichtung. Eine Welle mit beliebiger Polarisation wird also in zwei linear polarisierte Wellen zerlegt.

Alle Ergebnisse, die in dieser Aufgabe erhalten wurden, bleiben auch für den Fall richtig, daß ε ein hermitescher Tensor und μ ein Skalar sind. Man hat dann nur die magnetischen Größen durch die entsprechenden elektrischen Größen zu ersetzen und umgekehrt.

452. Wie wir bei der Lösung der vorigen Aufgabe fanden, können sich in Richtung des Magnetfeldes zwei Wellen mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten ausbreiten, die in entgegengesetzten Richtungen zirkular polarisiert sind. Daher wird eine Welle mit nichtzirkularer Polarisation in zwei Wellen zerlegt, die zirkular polarisiert sind. Da diese beiden Wellen verschiedene Phasengeschwindigkeiten haben, werden sich die Phasenverschiebungen zwischen ihnen von Punkt zu Punkt ändern, wodurch die Polarisation der Gesamtwelle in verschiedenen Punkten unterschiedlich wird.

Führt man die Rechnungen durch, so sieht man, daß die Polarisation linear bleibt und die Polarisationsebene sich um den Winkel $\chi = {}^1/_2(k_+ - k_-)\,z$ dreht (FARADAY-Effekt); k_+ und k_- bedeuten die Wellenvektoren der beiden zirkular polarisierten Wellen und können mit Hilfe der Aufgaben 451 und 318 bestimmt werden. Im Falle eines schwachen Magnetfeldes erhält man

$$\chi = V H z,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor V als VERDETsche Konstante bezeichnet wird. Betrachtet man die Atome des Dielektrikums als harmonische Oszillatoren, so ist

$$V = \frac{2\pi e^3 N}{n\, m^2 c} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2},$$

wobei $n = \sqrt{\varepsilon}$ den Brechungsindex bei Abwesenheit des Magnetfeldes bedeutet.

453. Aus Symmetriegründen folgt, daß die Wellenvektoren der reflektierten und der durchgelassenen Welle senkrecht auf der Trennfläche stehen. Beide Wellen sind in derselben Richtung wie die einfallende Welle zirkular polarisiert. Die Amplitude der reflektierten Welle ist

$$H_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\mu_\perp \pm \mu_a}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu_\perp \pm \mu_a}} H_0,$$

wobei H_0 die Amplitude der einfallenden Welle, ε die Dielektrizitätskonstante und $\mu_\perp$, μ_a die Komponenten des Tensors der magnetischen Permeabilität des Ferrits bedeuten (s. Aufgabe 449).

Die Amplitude der durchgelassenen Welle ist

$$H_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu_\perp \pm \mu_a}} H_0.$$

Plus- und Minuszeichen beziehen sich auf zirkulare Rechts- bzw. Linkspolarisation.

454. Die Wellenvektoren der reflektierten und der durchgelassenen Welle stehen senkrecht auf der Grenzfläche. Die reflektierte Welle ist elliptisch polarisiert, und die Halbachsen des Ellipsoids sind

$$H_1' = H_0 \frac{\varepsilon - \sqrt{\mu^2 - \mu_a^2}}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu + \mu_a})(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu - \mu_a})},$$

$$H_1'' = H_0 \frac{\sqrt{\varepsilon(\mu - \mu_a)} - \sqrt{\varepsilon(\mu + \mu_a)}}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu + \mu_a})(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu - \mu_a})}.$$

Die Richtung von H_1' stimmt mit der Polarisationsrichtung des Vektors $\mathfrak{H}$ in der einfallenden Welle überein. Die durchgelassene Welle wird in zwei Wellen mit den Amplituden

$$H_2' = \frac{H_0\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu + \mu_a}}, \qquad H_2'' = \frac{H_0\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu - \mu_a}}$$

zerlegt, die in entgegengesetzten Richtungen zirkular polarisiert sind. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind verschieden (s. die Lösung der Aufgabe 451).

455. Ist die Wellenlänge groß gegen den Radius der Scheiben und die Abstände zwischen benachbarten Scheiben, so kann man das künstliche Dielektrikum als dichtes Medium auffassen. Das elektrische Feld der einfallenden Welle ist zu den Scheibenebenen tangential. Bei Abwesenheit des äußeren Magnetfeldes $\mathfrak{H}_0$ wird die Polarisierbarkeit des Dielektrikums also den Wert $\alpha = N\beta_e$ haben, wobei $\beta_e = 4a^3/3\pi$ die (bezüglich der Scheibenebenen) longitudinale elektrische Polarisierbarkeit einer Scheibe und N die Zahl der Scheiben je Volumeneinheit bedeuten.

Die longitudinale magnetische Polarisierbarkeit β_m einer Scheibe ist Null (s. Aufgabe 378), so daß die magnetische Suszeptibilität χ des Dielektrikums bei der betrachteten Magnetfeldrichtung der Welle verschwindet.

Das Vorhandensein des äußeren Magnetfeldes $\mathfrak{H}_0$ führt zum HALL-Effekt: Die Leitungselektronen, die in jeder Scheibe einen Strom erzeugen, werden durch die Wirkung des Feldes $\mathfrak{H}_0$ abgelenkt und erzeugen ein zusätzliches elektrisches Feld $\mathfrak{E}_H$, das die ablenkende Wirkung des Magnetfeldes ins Gleichgewicht bringen muß. Dadurch erhält jede Scheibe ein zusätzliches elektrisches Moment, und der Polarisationsvektor des Mediums und die dielektrische Verschiebung ändern sich. Um die Änderung der dielektrischen Verschiebung berechnen zu können, muß man die Gesamtdichte des Polarisationsstroms $\partial \mathfrak{P}/\partial t$ im Dielektrikum und nicht den Strom in einer einzelnen Scheibe betrachten.

In der ersten Näherung bezüglich H_0 ist das durch den HALL-Effekt erzeugte Feld

$$\mathfrak{E}_H = R\, \mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{j} = R\, \mathfrak{H}_0 \times \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \tag{1}$$

wobei R die HALL-Konstante und $\mathfrak{P} = \alpha\, \mathfrak{E}$ den Polarisationsvektor in nullter Näherung bedeuten. Durch das Feld $\mathfrak{E}_H$ erfährt der Polarisationsvektor den Zuwachs

$$\varDelta\, \mathfrak{P} = \alpha\, \mathfrak{E}_H = \alpha^2 R\, \mathfrak{H}_0 \times \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Nun läßt sich die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{E}$ und die Ableitung $\partial \mathfrak{E}/\partial t$ ausdrücken:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi(\mathfrak{P} + \varDelta\, \mathfrak{P}) = \varepsilon\, \mathfrak{E} + 4\pi\, \alpha^2 R\, \mathfrak{H}_0 \times \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}. \tag{2}$$

Dabei ist $\varepsilon = 1 + 4\pi N \beta_e$ die Dielektrizitätskonstante bei Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes.

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit von $\mathfrak{E}$ liefert die Gleichung (2) einen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ der Form

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\, \mathfrak{E} + i\, \mathfrak{E} \times \mathfrak{g},$$

wobei $\mathfrak{g} = 4\pi\, \alpha^2\, \omega R\, \mathfrak{H}_0$ der Gyrationsvektor ist [s. (8.32)]. Das Medium ist also gyrotrop. Wie aus den Ergebnissen der Aufgabe 451 folgt, können sich in Richtung des Vektors $\mathfrak{g}$ zwei Wellen ausbreiten, die in verschiedenen Richtungen zirkular polarisiert sind und die verschiedenen Phasengeschwindigkeiten $v_\pm = \omega/k_\pm$ haben. Bestimmt man $k_\pm$ auf dem üblichen Weg, so erhält man

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon \pm g).$$

456. Wir suchen die Lösung der MAXWELLschen Gleichungen in Form ebener Wellen. Die Amplitude $\mathfrak{E}_0$ der Wellen genügt dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{k} \times \mathfrak{E}_0 &= \frac{\omega}{c}\, \mathfrak{H}_0, \\ \mathfrak{k} \times \mathfrak{H}_0 &= -\frac{\omega}{c}\, \varepsilon(\omega)\, \mathfrak{E}_0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Im Falle eines longitudinalen elektrischen Feldes gilt jedoch $\mathfrak{k} \times \mathfrak{E}_0 = 0$, so daß $\mathfrak{H}_0 = 0$ und $\varepsilon(\omega)\, \mathfrak{E}_0 = 0$ werden.

Aus der letzten Gleichung folgt, daß ein longitudinales elektrisches Feld existieren kann, falls

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} = 0 \tag{2}$$

ist. Die Frequenz der longitudinalen Plasmawellen wird durch diese Gleichung bestimmt und ist komplex; bei $\gamma \neq 0$ sind die Schwingungen gedämpft. Ist $\gamma \ll \omega$, so kann man die Dämpfung vernachlässigen, und Gleichung (2) ergibt

$$\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}\,. \tag{3}$$

Nach (3) hängt die Frequenz ω nicht vom Wellenvektor ab, so daß die Gruppengeschwindigkeit der longitudinalen Plasmawellen Null ist. Dieses Ergebnis ist jedoch nur in erster Näherung richtig und ist darauf zurückzuführen, daß die räumliche Inhomogenität des elektrischen Feldes nicht berücksichtigt wird. Die longitudinalen Plasmawellen sind Schwingungen der Elektronenwolke gegen die Ionenwolke (die Ionen werden in der betrachteten Näherung als unbeweglich angenommen).

Longitudinale Schwingungen können nicht nur im Plasma existieren, sondern auch in anderen Medien bei Frequenzen ω_α, die der Bedingung $\varepsilon(\omega_\alpha) = 0$ genügen. Die Dämpfung dieser Schwingungen kann jedoch im Plasma klein sein, während sie in anderen Medien gewöhnlich groß ist.

457. Nach Aufgabe 451 können sich in Richtung des konstanten Magnetfeldes zwei Wellen mit zirkularer Rechts- bzw. Linkspolarisation ausbreiten. Die Wellenvektoren dieser Wellen werden durch die Gleichung

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega + i\gamma \mp \omega_{\mathrm{H}} - \dfrac{\omega_{\mathrm{H}}\,\Omega_{\mathrm{H}}}{\omega}\right)} \tag{1}$$

bestimmt (s. Aufgabe 321).

Für $\Omega_{\mathrm{H}} \ll \omega$ ist der Einfluß der Bewegung der positiven Ionen sehr klein, und man kann sie als unbeweglich annehmen. Im umgekehrten Grenzfall $\Omega_{\mathrm{H}} \gg \omega$ und $\gamma\,\omega \ll \omega_{\mathrm{H}}\,\Omega_{\mathrm{H}}$ wird die Rolle der positiven Ionen bestimmend:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{\mathrm{H}}\,\Omega_{\mathrm{H}}} = 1 + \frac{4\pi N M c^2}{H_0^2}.$$

Beide Wellen breiten sich mit derselben Phasengeschwindigkeit v_φ aus, die mit ihrer Gruppengeschwindigkeit v_g übereinstimmt:

$$v_g = v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{4\pi N M c^2}{H_0^2}}} \tag{2}$$

oder

$$v_g = v_\varphi = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi N M}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\tau}}, \tag{3}$$

falls 1 gegenüber dem zweiten Term vernachlässigt werden kann; dabei ist $\tau = NM$ die Gasdichte (die Masse der Elektronen kann offensichtlich vernachlässigt werden). Würde man die Bewegung der positiven Ionen nicht berücksichtigen, so erhielte man für $\omega \to 0$ an Stelle der konstanten Geschwindigkeit (3) die Geschwindigkeit Null, und die entsprechenden Wellen könnten nicht existieren. Die mechanischen Schwingungen des Gases und die Schwingungen des elektromagnetischen Feldes hängen also in diesem Fall eng miteinander zusammen. Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit (3) ausbreiten, bezeichnet man als magnetohydrodynamische Wellen. Sie spielen bei astrophysikalischen und anderen Prozessen eine große Rolle.

458. Die linearisierte Gleichung, die die Amplituden der hochfrequenten Komponenten der Magnetisierung ($\mathfrak{m}_0$) und des Magnetfeldes ($\mathfrak{h}_0$) miteinander verknüpft, ergibt sich aus (6.15) und (6.16):

$$i\,\omega\,\mathfrak{m}_0 = -\gamma\,\mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{h}_0 - \gamma\,\mathfrak{m}_0 \times \mathfrak{H}_0 + \gamma\,q\,k^2\,\mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{m}_0. \tag{1}$$

Dabei ist $\mathfrak{M}_0$ die Sättigungsmagnetisierung, die die Richtung des Magnetfeldes $\mathfrak{H}_0$ hat. Wir wählen die Achse $z = x_3$ in der Richtung von $\mathfrak{H}_0$ und bestimmen die Komponenten des Tensors μ_{ik} mit Hilfe von (1):

$$\left.\begin{aligned} \mu_{11} &= \mu_{22} = 1 + \frac{\omega_M(\omega_0 + \alpha\,k^2)}{(\omega_0 + \alpha\,k^2)^2 - \omega^2}, \\ \mu_{12} &= -\mu_{21} = -i\,\frac{\omega\,\omega_M}{(\omega_0 + \alpha\,k^2)^2 - \omega^2}, \qquad \mu_{33} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

mit

$$\omega_0 = \gamma H_0, \qquad \omega_M = 4\pi\gamma M_0, \qquad \alpha = q\,\gamma M_0.$$

Die übrigen Komponenten von μ_{ik} sind Null.

Wie man aus (2) ersieht, hängt die Permeabilität hier nicht nur von der Frequenz, sondern auch vom Wellenvektor ab. Das hängt damit zusammen, daß die Magnetisierung in jedem Punkt von den Werten des Magnetfeldes nicht nur im betrachteten Punkt, sondern auch in benachbarten Punkten beeinflußt wird (Term $q\Delta\mathfrak{M}$ im Ausdruck für $\mathfrak{H}_{\text{eff}}$). Man bezeichnet diesen Effekt (Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante oder Permeabilität vom Wellenvektor) als räumliche Dispersion. Die Abhängigkeit $\mu(\mathfrak{k})$ spielt nur im Falle stark inhomogener Felder (kleine Wellenlängen) eine wesentliche Rolle.

459. Wir suchen eine simultane Lösung der MAXWELLschen Gleichungen und der Bewegungsgleichung des Magnetisierungsvektors (6.15) in Form ebener monochromatischer Wellen:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\,e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{h}_0\,e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}, \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{m}_0\,e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}. \tag{1}$$

Die Amplituden der Felder und der Magnetisierung genügen dem Gleichungssystem

$$c\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{h}_0 = -\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{E}_0, \quad c\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{E}_0 = \omega(\mathfrak{h}_0 + 4\pi\,\mathfrak{m}_0), \quad \mathfrak{k}(\mathfrak{h}_0 + 4\pi\,\mathfrak{m}_0) = 0, \tag{2}$$

$$i\,\omega\,\mathfrak{m}_0 = -\gamma\,\mathfrak{M}_0\times\mathfrak{h}_0 - \gamma\,\mathfrak{m}_0\times\mathfrak{H}_0 + \gamma\,q\,k^2\,\mathfrak{M}_0\times\mathfrak{m}_0. \tag{3}$$

Eliminiert man aus (2) und (3) $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{h}_0$ und führt die Bezeichnungen

$$u = \frac{\omega_M}{\Omega}, \quad x = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \xi = \frac{c\,k}{\Omega\sqrt{\varepsilon}}, \quad \Omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_M,$$

$$\omega_0 = \gamma H_0, \quad \omega_1 = \gamma\,q\,k^2 M_0, \quad \omega_M = 4\pi\,\gamma M_0$$

ein, so ergibt sich

$$i\,x\,\mathfrak{m}_0 = \frac{u}{x^2 - \xi^2}\,[x^2\,\mathfrak{e}_z\times\mathfrak{m}_0 + \xi^2(\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}_0)\,\mathfrak{e}_z\times\mathfrak{n} + (1-u)\,\mathfrak{e}_z\times\mathfrak{m}_0], \tag{4}$$

wobei $\mathfrak{n} = \mathfrak{k}/k$ ist und $\mathfrak{e}_z$ den Einheitsvektor in Richtung von $\mathfrak{H}_0$ bezeichnet ($\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ sind parallel).

Wir wählen die x-Achse in der von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{e}_z$ aufgespannten Ebene und bezeichnen den Winkel zwischen $\mathfrak{e}_z$ und $\mathfrak{n}$ mit Θ. Aus (4) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Komponenten von $\mathfrak{m}_0$:

$$i\,x\,m_{0x} + \left(1 + \frac{u\,\xi^2}{x^2 - \xi^2}\right) m_{0y} = 0,$$

$$\left(1 + \frac{u\,\xi^2}{x^2 - \xi^2}\cos^2\Theta\right) m_{0x} - i\,x\,m_{0y} = 0.$$

Die Bedingung für die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems liefert die gesuchte Dispersionsgleichung:

$$\left(1 + \frac{u\,\xi^2}{x^2 - \xi^2}\right)\left(1 + \frac{u\,\xi^2}{x^2 - \xi^2}\cos^2\Theta\right) - x^2 = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist in ω^2 vom dritten Grad ($\omega^2 = \Omega^2 x^2$, Ω hängt nicht von ω ab), so daß sich im betrachteten Medium Wellen dreier verschiedener Typen ausbreiten können, die sich durch die Dispersionsgesetze voneinander unterscheiden. Zwei dieser Dispersionsgesetze wurden in der Aufgabe 449 (wo $\omega_1 = 0$ gesetzt wurde) untersucht. Ihnen entsprechen gewöhnliche elektromagnetische Wellen, die sich im gyrotropen Medium ausbreiten. Zur Untersuchung des dritten Wellentyps benutzen wir die Bedingung $\omega^2\,\varepsilon/c^2\,k^2 \ll 1$ (für $x^2 \ll \xi^2$). Vernachlässigt man in den Nennern der Gleichung (4) x^2 gegenüber ξ^2, so erhält man das dritte Dispersionsgesetz:

$$\omega^2 = (\omega_0 + \omega_1)\,(\omega_0 + \omega_1 + \omega_M \sin^2\Theta) \tag{6}$$

(dabei hängt $\omega_1 = q\,\gamma\,k^2 M_0$ vom Betrag des Wellenvektors ab). Aus der Bedingung $\omega^2\,\varepsilon \ll c^2\,k^2$ und der Annahme, daß die Größenordnungen von ω_0, ω_1

und ω_M vergleichbar sind, ergibt sich, daß das Dispersionsgesetz (6) nur unter der Bedingung $\xi^2 \gg 1$ gilt.

Wir bestimmen nun die relative Größe von E_0 und h_0 für die Wellen mit dem Dispersionsgesetz (6). Mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen (2) und der Bedingung $\omega^2 \varepsilon/c^2 k^2 \ll 1$ ergibt sich

$$\mathfrak{E}_0 \approx \frac{4\pi\,\omega}{c\,k^2}\,\mathfrak{k} \times \mathfrak{m}; \qquad \mathfrak{h}_0 \approx 4\pi\,\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}).$$

Es ist also $E_0 \ll h_0$. Die betrachteten Wellen stellen rein magnetische Schwingungen des Magnetisierungsvektors dar, bei denen kein elektrisches Feld entsteht. Sie werden als Spinwellen bezeichnet und bestimmen viele magnetische, thermische und elektrische Eigenschaften von Ferromagnetika.

460. Wir wählen die y-Achse so, daß sie normal zur Oberfläche in das Metall hinein zeigt, und die z-Achse in Richtung des konstanten Magnetfeldes. Da die Impedanz ζ nicht vom Einfallswinkel der Welle abhängt, untersuchen wir nur den senkrechten Einfall. Löst man die MAXWELLschen Gleichungen und benutzt die Definition der Oberflächenimpedanz, so erhält man

$$\zeta_{xx} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\,\mu_{||}}{8\pi\,\sigma}}, \qquad \zeta_{zz} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\,\mu}{8\pi\,\sigma_3}}, \qquad \zeta_{xz} = \zeta_{zx} = 0$$

mit

$$\sigma = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1}, \qquad \mu = \frac{\mu_\perp^2 - \mu_a^2}{\mu_\perp}.$$

Die Frequenzabhängigkeit von ζ_{zz} hat Resonanzcharakter (s. Aufgabe **329**, in der die Komponenten μ_{ik} berechnet werden). Die Komponente ζ_{xx} hat wegen $\mu_{||} = 1$ keine Resonanzeigenschaften.

461. Man erhält

$$\zeta_\pm = \pm\frac{E_{\pm 1}}{h_{\pm 1}} = -(1-i)\sqrt{\frac{\omega\,\mu^\pm}{8\pi\,\sigma^\pm}},$$

wobei $\mu^\pm = \mu_\perp \pm \mu_a$, $\sigma^\pm = \sigma_1 \pm \sigma_2$ ist und $E_{\pm 1}$ und $h_{\pm 1}$ die zyklischen Komponenten von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{h}$ bedeuten: $h_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(h_x \pm i\,h_y)$.

9. ELEKTROMAGNETISCHE SCHWINGUNGEN IN BEGRENZTEN KÖRPERN

462. Für die E-Wellen erhält man

$$\tilde{E}_z(x, y) = \tilde{E}_0 \sin \varkappa_1 x \sin \varkappa_2 y$$

mit $\varkappa_1 = n_1 \pi/a$, $\varkappa_2 = n_2 \pi/b$; $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$, für die H-Wellen

$$\tilde{H}_z(x, y) = \tilde{H}_0 \cos \varkappa_1 x \cos \varkappa_2 y$$

mit denselben $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. Daraus folgt, daß das Feld in den transversalen Richtungen den Charakter stehender Wellen hat. Die Ausbreitungskonstante k als Funktion von ω ist

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right).$$

Die transversalen Komponenten der Felder können mit Hilfe der MAXWELL-schen Gleichungen durch $\tilde{E}_z$ und $\tilde{H}_z$ ausgedrückt werden.

463. Für E-Wellen erhält man

$$\alpha = \frac{2 \zeta' \omega}{c\, k\, \varkappa^2\, a\, b} (\varkappa_1^2 b + \varkappa_2^2 a)$$

mit $\varkappa^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2$, $\zeta' = \operatorname{Re} \zeta$, für Wellen vom Typ H_{n0}

$$\alpha = \frac{\zeta' \omega}{c\, k\, a\, b} \left(a + \frac{2 \varkappa^2 b}{k^2 + \varkappa^2} \right)$$

und für Wellen vom Typ $H_{n_1 n_2}$ $(n_1, n_2 \neq 0)$

$$\alpha = \frac{2 c\, \varkappa^2 \zeta'}{\omega\, k\, a\, b} \left[a + b + \frac{k^2}{\varkappa^4} (\varkappa_1^2 a + \varkappa_2^2 b) \right].$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in der vorigen Aufgabe.

464. Wir betrachten die E-Wellen.

a) Die geraden Lösungen $[\tilde{E}_x(x) = \tilde{E}_x(-x), \tilde{H}_y(x) = \tilde{H}_y(-x), \tilde{E}_z(x) = -\tilde{E}_z(-x)]$ sind

$$\tilde{E}_z = A\, e^{-sx}, \quad \tilde{E}_x = \frac{i k}{s} A\, e^{-sx}, \quad \tilde{H}_y = \frac{i \omega}{s c} A\, e^{-sx}$$

für $x > a$,

$$\tilde{E}_z = B \sin \varkappa x, \quad \tilde{E}_x = \frac{i k}{\varkappa} B \cos \varkappa x, \quad \tilde{H}_y = \frac{i \omega \varepsilon}{\varkappa c} B \cos \varkappa x \qquad (1)$$

für $-a \leqq x \leqq a$ und

$$\tilde{E}_z = -A\, e^{sx}, \quad \tilde{E}_x = \frac{i k}{s} A\, e^{sx}, \quad \tilde{H}_y = \frac{i \omega}{s c} A\, e^{sx}$$

für $x < -a$, wobei $A = B\,e^{sa}\sin\varkappa a$ ist; die übrigen Komponenten von $\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}$ sind Null. Die Parameter $\varkappa$ und s werden mit Hilfe des Gleichungssystems

$$(\varkappa a)^2 + (s a)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon\mu - 1), \tag{2}$$

$$s a = \frac{1}{\varepsilon}\varkappa a \tan\varkappa a \tag{3}$$

bestimmt, das leicht graphisch gelöst werden kann. Die möglichen Werte von $\varkappa$ und s entsprechen den Schnittpunkten zwischen den Kurven (3) und dem Kreis mit dem Radius $r = \omega a\sqrt{\varepsilon\mu - 1}/c$ (Abb. 71). Bei vorgegebenem ω, a, ε und μ gibt es eine endliche Zahl von Schnittpunkten, d.h. eine endliche Zahl von Wellentypen, für die die Feldverteilung durch die Gleichungen (1) beschrieben wird. Insbesondere existiert bei $r < \pi$ nur die E_{00}-Welle.

Wir betrachten die Abhängigkeit der Ausbreitungskonstanten

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} - \varkappa^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + s^2} \tag{4}$$

von der Frequenz ω bei vorgegebenen Parametern der dielektrischen Schicht für einen gegebenen Wellentyp. Aus Abb. 71 ersieht man, daß für Frequenzen in der Nähe der Grenzfrequenz, bei der ein gegebener Wellentyp erscheint, s angenähert Null und k angenähert gleich ω/c ist. Die Welle hat bei diesen Frequenzen dieselbe Ausbreitungskonstante wie im Vakuum, und das Feld dringt bis zu großen Abständen von der Schichtgrenze vor. Mit wachsendem ω nimmt der Parameter s zu, während $\varkappa$ begrenzt bleibt. Dabei strebt k gegen $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$, d.h. gegen den Wert, der einer Welle entspricht, die sich in einem unbegrenzten dielektrischen Medium mit den Parametern ε und μ ausbreitet. Bei genügend großen Werten von ω und folglich von s ist das Feld nahezu ganz innerhalb der dielektrischen Schicht konzentriert.

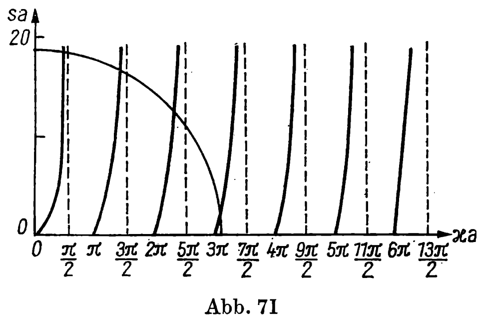


Abb. 71

b) Die ungeraden Lösungen $[\tilde{E}_x(x) = -\tilde{E}_x(-x),\, \tilde{H}_y(x) = -\tilde{H}_y(-x),\, \tilde{E}_z(x) = \tilde{E}_z(-x)]$ sind

$$\tilde{E}_z = A\,e^{-sx}, \quad \tilde{E}_x = \frac{i k}{s} A\,e^{-sx}, \quad \tilde{H}_y = \frac{i\omega}{s c} A\,e^{-sx} \tag{5}$$

für $x > a$,

$$\tilde{E}_z = B\cos\varkappa x, \quad \tilde{E}_x = -\frac{i k}{\varkappa} B\sin\varkappa x, \quad \tilde{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{\varkappa c} B\sin\varkappa x$$

für $-a \leqq x \leqq a$ und

$$\tilde{E}_z = A\, e^{sx}, \quad \tilde{E}_x = -\frac{i k}{s} A\, e^{sx}, \quad \tilde{H}_y = -\frac{i\omega}{s c} A\, e^{sx}$$

für $x < -a$, wobei $A = B\, e^{sa} \cos \varkappa a$ gilt; die übrigen Komponenten von $\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}$ sind Null. Die Parameter s und $\varkappa$ werden durch das Gleichungssystem

$$(\varkappa a)^2 + (s a)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} (\varepsilon \mu - 1), \quad s a = -\frac{1}{\varepsilon} \varkappa a \cot \varkappa a \tag{6}$$

bestimmt. Die Ausbreitungskonstante k hängt mit $\varkappa$ und s durch die Beziehung (4) zusammen.

Aus einer graphischen Darstellung entnimmt man leicht, daß ungerade elektrische Wellen bei $r < \pi/2$ nicht existieren können. Die übrigen Gesetzmäßigkeiten sind qualitativ dieselben wie bei den geraden Wellen.

Die Wellen vom magnetischen Typ können analog untersucht werden.

465. In der Schicht können sich gerade E-Wellen und ungerade H-Wellen mit denselben charakteristischen Größen (Ausbreitungskonstante, Konfiguration der Felder im Gebiet $x > 0$ usw.) wie in der vorigen Aufgabe ausbreiten.

466. Wir betrachten die E-Wellen. Zu ihrer Bestimmung muß man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial \alpha^2} + \varkappa^2 \tilde{E}_z = 0 \tag{1}$$

für die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes lösen. Gleichung (1) löst man durch Separation der Variablen. Die partikulären Lösungen sind

$$\tilde{E}_z(r, \alpha) = J_m(\varkappa r) \sin(m \alpha + \psi_m), \tag{2}$$

wobei J_m eine Bessel-Funktion und ψ_m eine beliebige Konstante bedeuten; m muß ganzzahlig sein, damit sich das Feld bei einer Änderung von α um 2π nicht ändert ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Die transversalen Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes werden mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen durch $\tilde{E}_z$ ausgedrückt:

$$\tilde{E}_r = \frac{i k}{\varkappa} J'_m(\varkappa r) \sin(m \alpha + \psi_m),$$

$$\tilde{E}_\alpha = \frac{i m k}{\varkappa^2 r} J_m(\varkappa r) \cos(m \alpha + \psi_m),$$

$$\tilde{H}_r = -\frac{i m \omega}{\varkappa^2 c r} J_m(\varkappa r) \cos(m \alpha + \psi_m),$$

$$\tilde{H}_\alpha = \frac{i \omega}{\varkappa c} J'_m(\varkappa r) \sin(m \alpha + \psi_m).$$

Die möglichen Werte des Parameters $\varkappa$ ergeben sich aus den Randbedingungen an der Wand des Hohlleiters:

$$\tilde{E}_r |_{r=a} = 0, \quad \tilde{E}_\alpha |_{r=a} = 0.$$

Daraus folgt $\varkappa_{mn} a = \alpha_{mn}$, wobei α_{mn} die n-te Wurzel der BESSEL-Funktion ist: $J_m(\alpha_{mn}) = 0$; $n = 1, 2, \ldots$

Die Wellen des betrachteten Typs werden also durch die beiden Indizes n und m charakterisiert; bei $m = 0$ ist das Feld bezüglich der z-Achse rotationssymmetrisch. Die Phasen ψ_m werden im Falle eines idealen Hohlleiters durch die Anregungsbedingungen bestimmt, in realen Fällen hängen sie jedoch wesentlich von Fehlern der Hohlleiterwände ab (Abweichungen des Querschnitts von der Kreisform, Ritzen in Längsrichtung usw.).

Die Ausbreitung einer Welle im Hohlleiter ist möglich, falls $k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \varkappa^2}$ reell ist. Daher wird sich eine E_{mn}-Welle vom Typ m, n im Hohlleiter ausbreiten, wenn ihre Frequenz der Ungleichung

$$\omega^2 \geqq \frac{c^2 \alpha^2_{mn}}{a^2}$$

genügt. Die kleinste Frequenz entspricht der E_{01}-Welle:

$$\omega_0 = \frac{c\,\alpha_{01}}{a} \approx 2{,}4\,\frac{c}{a}.$$

Die dazugehörige Wellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \approx 2{,}6 a$$

ist von der Größenordnung des Radius des Hohlleiters.

Die H-Wellen sind

$$\tilde{H}_z = J_m(\varkappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Ausbreitungskonstante k wird durch die Gleichung

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\beta^2_{mn}}{a^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bestimmt, in der β_{mn} die n-te Wurzel der Gleichung $J'_m(\beta_{mn}) = 0$ ist. Die kleinste Wurzel ist $\beta_{11} \approx 1{,}8$; ihr entspricht die Grenzfrequenz $\omega_0 \approx 1{,}8 c/a$ und die Grenzwellenlänge $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \approx 3{,}5 a$.

Für H-Wellen ist die Grenzfrequenz kleiner als für E-Wellen. Liegt die Frequenz einer Welle innerhalb der Grenzen $\omega_{0\,\mathrm{el}} > \omega > \omega_{0\,\mathrm{magn}}$, so kann sie nur vom Typ H_{11} sein.

467. Man erhält für die E-Wellen

$$\alpha = \frac{\omega\,\zeta'}{c\,a\,k}$$

und für die H_{mn}-Wellen

$$\alpha = \frac{c\,\zeta' \varkappa^2}{\omega\,a\,k}\left[1 + \frac{m^2\omega^2}{c^2\varkappa^2(a^2\varkappa^2 - m^2)}\right].$$

Dabei ist $\zeta' = \operatorname{Re}\zeta$.

468. Der Wellenvektor $\mathfrak{k}$ und die Frequenz ω der Wellen im Hohlleiter sind durch die Beziehung

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \varkappa^2$$

miteinander verknüpft, wobei $\varkappa$ eine Konstante bedeutet, die vom Wellentyp und den Abmessungen des Hohlleiterquerschnitts abhängt. Mit den üblichen Formeln erhält man

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2}},$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2},$$

wobei λ_0 die Grenzwellenlänge bedeutet.

Aus diesen Gleichungen folgt, daß immer $v_\varphi > c$ und $v_g < c$ und dabei $v_\varphi v_g = c^2$ ist. Dieses Ergebnis gilt für einen Hohlleiter, in dem Vakuum herrscht (die elektrischen Eigenschaften der Luft unterscheiden sich im betrachteten Gebiet praktisch nicht von denen des Vakuums).

Befindet sich im Hohlleiter ein Dielektrikum mit vernachlässigbarer Dispersion von ε und μ, so bleiben bei Ersetzung von c durch $c' = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ die oben angegebenen Relationen richtig. Daher kann in einem solchen Hohlleiter

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2}}$$

kleiner als c werden, d.h., die Welle wird „verzögert" (s. Aufgabe 474).

469. Man erhält

$$H_z = \frac{1}{2}\tilde{H}_0[e^{i(\varkappa_1 x + kz)} + e^{i(-\varkappa_1 x + kz)}]\, e^{-i\omega t}.$$

Die Ausbreitungsrichtungen der beiden ebenen Wellen, in die die H_{10}-Welle zerlegt wird, bilden mit der Achse des Hohlleiters den Winkel Θ (Abb. 72), der durch die Bedingung

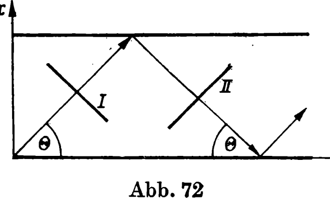


Abb. 72

$$\cos\Theta = \frac{k}{\sqrt{k^2+\varkappa_1^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$$

bestimmt wird. Die Phasenebene I bewegt sich mit der Geschwindigkeit c in der Richtung, die mit der z-Achse den Winkel Θ bildet; auf der Achse des Hohlleiters bewegt sie sich mit der größeren Geschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\cos\Theta} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2}} = v_\varphi,$$

d.h. gerade mit der Phasengeschwindigkeit der Welle im Hohlleiter.

Die Gruppengeschwindigkeit stimmt mit der Geschwindigkeit der Energiebewegung überein. Im Vakuum bewegt sich die Energie in einer ebenen Welle jedoch mit der Geschwindigkeit c in der Ausbreitungsrichtung der Welle. Jede ebene Welle, die in die Zusammensetzung der betrachteten H_{10}-Welle eingeht, wird mehrfach an den Wänden des Hohlleiters reflektiert und legt einen zickzackförmigen „Weg" zurück. Die resultierende Geschwindigkeit in Richtung der Hohlleiterachse wird

$$v = c\cos\Theta = c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2},$$

was mit der Gruppengeschwindigkeit v_g übereinstimmt.

470. Es ergibt sich

$$H_\alpha = E_r = \frac{A}{r}\,e^{i\omega(z/c-t)}, \tag{1}$$

wobei A eine Konstante bedeutet; die übrigen Feldkomponenten sind Null.

Der Energiefluß ist

$$|\overline{\mathfrak{S}}| = \frac{A^2 c}{4}\ln\frac{b}{a}. \tag{2}$$

Im Falle eines einzelnen idealen Leiters wird das Feld im ganzen Raum außerhalb des Leiters durch die Gleichungen (1) beschrieben; der Gesamtenergiefluß durch die Ebene z = const ist unendlich groß ($S \to \infty$ für $b \to \infty$). Daher kann ein solches Feld nicht durch eine Quelle endlicher Leistung aufrechterhalten werden, und dieser Fall hat keine physikalische Bedeutung.

471. Die E-Wellen sind

$$\tilde{E}_z = [A_{mn} J_m(\varkappa_{mn} r) + B_{mn} N_m(\varkappa_{mn} r)]\sin(m\alpha + \psi_m), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $\varkappa_{mn}$ die n-te Wurzel der Gleichung

$$J_m(\varkappa a)\,N_m(\varkappa b) - J_m(\varkappa b)\,N_m(\varkappa a) = 0$$

ist. Dabei bedeuten N_m, J_m Zylinderfunktionen (s. Anhang III) und A_{mn} und B_{mn} Konstanten, die durch die Bedingung

$$A_{mn} J_m(\varkappa_{mn} a) + B_{mn} N_m(\varkappa_{mn} a) = 0$$

miteinander zusammenhängen. Die H-Wellen sind

$$\tilde{H}_z = [C_{mn} J_m(\varkappa_{mn} r) + D_{mn} N_m(\varkappa_{mn} r)]\sin(m\alpha + \psi_m), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $\varkappa_{mn}$ die n-te Wurzel der Gleichung

$$J_m'(\varkappa a)\,N_m'(\varkappa b) - N_m'(\varkappa a)\,J_m'(\varkappa b) = 0$$

ist und C_{mn} und D_{mn} durch die Bedingung

$$C_{mn} J_m'(\varkappa_{mn} a) + D_{mn} N_m'(\varkappa_{mn} a) = 0$$

verknüpft sind. Die übrigen Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes können mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen durch $\tilde{E}_z$ und $\tilde{H}_z$ ausgedrückt werden.

472. Man erhält

$$\alpha = \frac{\zeta'(a+b)}{2ab\ln\frac{b}{a}}$$

mit $\zeta' = \operatorname{Re}\zeta$.

473. Ist das Feld symmetrisch zur Leiterachse, so genügt die longitudinale Komponente $\tilde{E}_z$ der Gleichung

$$\frac{d^2\tilde{E}_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{E}_z}{dr} + \varkappa^2\tilde{E}_z = 0. \tag{1}$$

Da der Leiter endliche Leitfähigkeit hat, sind die Parameter k und $\varkappa$ komplex. Wir bestimmen das Vorzeichen von $\varkappa$ so, daß $\operatorname{Im}\varkappa = \varkappa'' > 0$ ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (1) lautet

$$\tilde{E}_z(r) = A' H_0^{(1)}(\varkappa r) + B' H_0^{(2)}(\varkappa r),$$

wobei $H_0^{(1)}$ und $H_0^{(2)}$ HANKEL-Funktionen bedeuten. Aus dem asymptotischen Verhalten dieser Funktionen (s. Anhang III) und der Bedingung $\operatorname{Im}\varkappa > 0$ ergibt sich $B' = 0$, da andernfalls das Feld unendlich groß wird. Die übrigen Komponenten von $\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}$ drücken wir mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen durch $\tilde{E}_z$ aus:

$$\tilde{E}_z = A' H_0^{(1)}(\varkappa r), \qquad \tilde{E}_r = \frac{ik}{\varkappa} A' H_1^{(1)}(\varkappa r), \qquad \tilde{H}_\alpha = \frac{i\omega}{\varkappa c} A' H_1^{(1)}(\varkappa r). \tag{2}$$

Bei hinreichend großen Werten von $\varkappa r$ sind die Funktionen $H_0^{(1)}$ und $H_1^{(1)}$ proportional $e^{-\varkappa'' r}/\sqrt{\varkappa r}$, so daß das elektromagnetische Feld bei großen Abständen vom Leiter exponentiell abnimmt. Die maximale Konzentration des Feldes liegt in der Nähe des Leiters vor, das Feld hat also Oberflächencharakter.

Die LEONTOWITSCHsche Randbedingung

$$\tilde{E}_z = \zeta \tilde{H}_\alpha$$

auf der Leiteroberfläche führt zu einer charakteristischen Gleichung zur Bestimmung von $\varkappa$:

$$\varkappa a \frac{H_0^{(1)}(\varkappa a)}{H_1^{(1)}(\varkappa a)} = i\zeta\frac{\omega}{c}a.$$

Dabei ist ζ die Oberflächenimpedanz des Metalls. Für einen guten Leiter gilt $|\zeta| \ll 1$. Die Gleichung für $\varkappa$ kann deshalb nur für kleine $\varkappa a$ erfüllt werden. Mit Hilfe der Näherungsformeln für $H_0^{(1)}$ und $H_1^{(1)}$ (Anhang III) erhalten wir

$$(\varkappa a)^2 \ln\frac{\gamma\varkappa a}{2i} \approx i\zeta\frac{\omega}{c}a, \qquad \ln\gamma \approx 0{,}5772. \tag{3}$$

Die Gleichung (3) ist transzendent und kann graphisch nicht gelöst werden, da sie komplexe Größen enthält. SOMMERFELD benutzte zu ihrer Lösung eine Iterationsmethode, die darauf beruht, daß sich $\ln\varkappa a$ wesentlich schwächer

ändert als $\varkappa a$. Mit den Bezeichnungen

$$\left(\frac{\gamma \varkappa a}{2i}\right)^2 = u, \qquad -\frac{i\gamma^2 \omega}{2c} \zeta a = v$$

lautet Gleichung (3)

$$u \ln u = v.$$

Hat man einen Näherungswert u_n gefunden (n-te Näherung), so kann man den genaueren Wert u_{n+1} mit Hilfe der Formel

$$u_{n+1} \ln u_n = v$$

berechnen [$(n+1)$-te Näherung]. In der nullten Näherung kann man $u_0 = v$ setzen, so daß

$$u_1 = \frac{v}{\ln v}, \quad u_2 = \frac{v}{\ln (v/\ln v)}, \quad u_3 = \frac{v}{\ln \dfrac{v}{\ln (v/\ln v)}}, \ldots$$

wird.

Für Dezimeterwellen ($\lambda = 2\pi c/\omega \approx 30$ cm), die sich in einem aus Kupfer bestehenden Leiter von 1 mm Radius ausbreiten (die Leitfähigkeit des Kupfers ist $\sigma = 5{,}2 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$), ergibt die Rechnung nach dieser Methode unter Benutzung der Gleichungen (8.9) bis (8.11)

$$u \approx (4{,}2 + 4{,}5i) \cdot 10^{-8}$$

und

$$k = \frac{\omega}{c} [1 + (6{,}0 + 6{,}4i) \cdot 10^{-5}].$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}\, k} = (1 - 6 \cdot 10^{-5})\, c < c,$$

die Welle ist also etwas verzögert.

Man kann dieses Ergebnis auf Grund folgender Überlegungen verstehen. Im Falle idealer Leitfähigkeit des Leiters hat die transversale elektromagnetische Welle die Phasengeschwindigkeit c, und das Feld innerhalb des Leiters ist Null. Bei endlicher Leitfähigkeit wird sich ein Teil der Energie im Leiter fortpflanzen; da die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Metall klein gegen c ist, wird die elektromagnetische Welle „im Mittel" verzögert. Außerdem tritt eine Dämpfung auf.

Wir untersuchen nun noch den Charakter des Feldes im Grenzfall $\zeta \to 0$ (ideale Leitfähigkeit). Wie aus (3) folgt, ist dabei $\varkappa \to 0$, $k \to \omega/c$. Benutzt man die Ausdrücke für die Funktionen $H_0^{(1)}$ und $H_1^{(1)}$ bei kleinen Argumenten, so erhält man aus (2)

$$\tilde{E}_z = \lim_{\varkappa \to 0} \frac{2iA'}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma \varkappa r}{2i}\right), \qquad \tilde{E}_r = \lim_{\varkappa \to 0} \frac{2kA'}{\pi \varkappa^2} \frac{1}{r}, \qquad \tilde{H}_\alpha = \lim_{\varkappa \to 0} \frac{2kA'}{\pi \varkappa^2} \frac{1}{r}.$$

Da die Feldkomponenten keine unendlich großen Werte annehmen können, muß A' proportional $\varkappa^2$ sein. Wir setzen $A' = A\,\varkappa^2/k$ und erhalten

$$\tilde{E}_r = \tilde{H}_\alpha = \frac{A}{r}, \qquad \tilde{E}_z = 0.$$

Das ist eine rein transversale elektromagnetische Welle, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet.

474. Die Komponenten des elektromagnetischen Feldes im Hohlleiter werden durch

$$\tilde{E}_z = \tilde{E}_0 J_0(\varkappa_1 r), \qquad \tilde{E}_r = -i\frac{k}{\varkappa_1}\tilde{E}_0 J_1(\varkappa_1 r), \qquad \tilde{H}_\alpha = -i\frac{\omega}{c\,\varkappa_1}\tilde{E}_0 J_1(\varkappa_1 r)$$

für $r \leqq a$ und

$$\tilde{E}_z = A\,J_0(\varkappa_2 r) + B N_0(\varkappa_2 r), \qquad \tilde{E} = -i\frac{k}{\varkappa_2}[A\,J_1(\varkappa_2 r) + B N_1(\varkappa_2 r)],$$

$$\tilde{H}_\alpha = -i\frac{\varepsilon\,\omega}{c\,\varkappa_2}[A\,J_1(\varkappa_2 r) + B N_1(\varkappa_2 r)]$$

für $a \leqq r \leqq b$ bestimmt. Dabei ist $\varkappa_1 = \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}$, $\varkappa_2 = \sqrt{\varepsilon\,\omega^2/c^2 - k^2}$, und $\tilde{E}_0$, A und B bedeuten Konstanten.

Die Grenzbedingungen lauten

$$\tilde{E}_z|_{r=b} = 0, \qquad \tilde{E}_z|_{r=a-0} = \tilde{E}_z|_{r=a+0}, \qquad \tilde{H}_\alpha|_{r=a-0} = \tilde{H}_\alpha|_{r=a+0}.$$

Dabei ist die Grenzbedingung für $\tilde{E}_\alpha$ automatisch erfüllt.

Eliminiert man A, B und $\tilde{E}_0$, so erhält man die transzendente Gleichung

$$\frac{\varepsilon\,\varkappa_1}{\varkappa_2}\,\frac{J_0(\varkappa_1 a)}{J_1(\varkappa_1 a)} = \frac{J_0(\varkappa_2 a)\,N_0(\varkappa_2 b) - N_0(\varkappa_2 a)\,J_0(\varkappa_2 b)}{J_1(\varkappa_2 a)\,N_0(\varkappa_2 b) - N_1(\varkappa_2 a)\,J_0(\varkappa_2 b)}, \tag{1}$$

die k mit ω verknüpft. Bei $a \ll b$ vereinfacht sich (1) sehr stark. Wir betrachten die Welle mit dem größten k. Wäre der Hohlleiter vollständig von einem Dielektrikum erfüllt ($a = 0$), so wäre der entsprechende $\varkappa_2$-Wert $\varkappa_{02} = \alpha_{01}/b$ mit $\alpha_{01} = 2{,}4$ und $J_0(\alpha_{01}) = 0$ (s. Aufgabe 466).

Wir suchen eine wenig von $\varkappa_{02}$ verschiedene Lösung

$$\varkappa_2 = \varkappa_{02} + \varkappa_2' = \frac{\alpha_{01}}{b} + \frac{\Delta\alpha}{b}.$$

Dabei liegt die Größenordnung von $\Delta\alpha$ nicht unterhalb von a/b. Unter der Annahme $\alpha_{01}\,a/b \ll 1$ benutzen wir die Näherungsformeln für J_0, N_0, J_1 und N_1 aus dem Anhang III und erhalten zusammen mit (1) die Gleichung

$$\varepsilon\left[(\varkappa_2 a)^2 N_0(\varkappa_2 b) + \frac{2}{\pi}J_0(\varkappa_2 b)\right] = (\varkappa_2 a)^2\left[N_0(\varkappa_2 b) + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma\,\varkappa_2 a}\,J_0(\varkappa_2 b)\right].$$

Setzen wir hier

$$N_0(\varkappa_2 b) = N_0(\alpha_{01} + \Delta\alpha) \approx N_0(\alpha_{01}), \qquad J_0(\varkappa_2 b) = -J_1(\alpha_{10})\,\Delta\alpha,$$

so ergibt sich unter Vernachlässigung des kleinen Terms, der den Logarithmus enthält, die Beziehung

$$\Delta\alpha = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\pi\,\alpha_{01}^2}{4}\,\frac{N_0(\alpha_{01})}{J_1(\alpha_{01})}\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\varepsilon\,\omega^2}{c^2} - \frac{(\alpha_{01}^2 + 2\alpha_{01}\,\Delta\alpha)}{b^2}}}.$$

Mit der Bezeichnung $\omega_0 = \alpha_{01}\, c/b \approx 2{,}4\, c/b$ (minimale Frequenz für den dielektrikumfreien Hohlleiter) erhalten wir, wenn wir noch die Tabellenwerte für $N_0(\alpha_{01})$ und $J_1(\alpha_{01})$ einsetzen,

$$v_\varphi = c\left\{\varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\left[1 + 3{,}7\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]\right\}^{-1/2}. \tag{2}$$

Ist der Hohlleiter vollständig von einem Dielektrikum erfüllt ($a = 0$), so gilt

$$v_\varphi = c\left[\varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Die Grenzfrequenz

$$\omega_{\text{gr}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}}\left[1 + 1{,}85\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]$$

des teilweise mit einem Dielektrikum erfüllten Hohlleiters liegt zwischen den Grenzfrequenzen des nicht und des vollständig ausgefüllten Hohlleiters:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}} < \omega_{\text{gr}} < \omega_0.$$

Die Phasengeschwindigkeit (2) wird bei Frequenzen

$$\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon - 1}}\left[1 + 1{,}85\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]$$

kleiner als c.

Ein Hohlleiter, der teilweise oder ganz von einem Dielektrikum erfüllt ist, bildet also ein Verzögerungssystem: Die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in ihm kann kleiner als c sein. Eine wichtige Eigenschaft langsamer Wellen besteht darin, daß sie effektiv mit geladenen Teilchen wechselwirken können. Diese Wechselwirkung kann sowohl zur Erzeugung und Verstärkung elektromagnetischer Schwingungen höchster Frequenzen (Klystron, Wanderfeldröhre, Magnetron) als auch zur Teilchenbeschleunigung ausgenutzt werden (Linearbeschleuniger).

475. E-Wellen können in diesem Fall nicht auftreten. Die H-Wellen sind

$$\tilde{H}_z = \frac{i\tilde{E}_0\, c}{\omega\,\mu}\left(\varkappa\cos\varkappa x - k\frac{\mu_a}{\mu_\perp}\sin\varkappa x\right),$$

$$\tilde{H}_x = \frac{\tilde{E}_0\, c}{\omega\,\mu}\left(k\sin\varkappa x - \varkappa\frac{\mu_a}{\mu_\perp}\cos\varkappa x\right), \qquad \tilde{E}_z = \tilde{E}_0\sin\varkappa x,$$

$$\tilde{E}_x = \tilde{E}_y = \tilde{H}_y = 0$$

mit

$$\varkappa = \frac{n\pi}{a}, \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon_{\|}\mu}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\mu = \mu_{\perp} - \frac{\mu_a^2}{\mu_{\perp}}.$$

Die Grenzfrequenz ist

$$\omega_0^{(n)} = \frac{c\,\varkappa_n}{\varepsilon_{\|}\mu}.$$

Wie aus den Gleichungen für $\tilde{H}_z$ und $\tilde{H}_x$ folgt, hängt die Konfiguration des Magnetfeldes für einen vorgegebenen Wellentyp vom Vorzeichen von k, d.h. von der Ausbreitungsrichtung der Welle, und vom Vorzeichen von μ_a, d.h. von der Richtung des konstanten Magnetfeldes, ab. Dieser Effekt hängt mit der Gyrotropie des Mediums im Hohlleiter zusammen.

476. Die MAXWELLschen Gleichungen für die konjugiert komplexen Amplituden $\tilde{\mathfrak{E}}_0^*$ und $\tilde{\mathfrak{H}}_0^*$ lauten

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{E}}_0^* - i\,k_0(\mathfrak{e}_z\times\tilde{\mathfrak{E}}_0^*) &= -\frac{i\,\omega}{c}\,\tilde{\mathfrak{H}}_0^*, \\ \operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{H}}_0^* - i\,k_0(\mathfrak{e}_z\times\tilde{\mathfrak{H}}_0^*) &= \frac{i\,\omega}{c}\,\tilde{\mathfrak{E}}_0^*. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Amplituden $\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}$ genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{E}} + i\,k(\mathfrak{e}_z\times\tilde{\mathfrak{E}}) &= \frac{i\,\omega}{c}\,\boldsymbol{\mu}'\,\tilde{\mathfrak{H}}, \\ \operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{H}} + i\,k(\mathfrak{e}_z\times\tilde{\mathfrak{H}}) &= -\frac{i\,\omega}{c}\,\boldsymbol{\varepsilon}'\,\tilde{\mathfrak{E}}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{\mu}'\,\tilde{\mathfrak{H}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}'\,\tilde{\mathfrak{E}}$ Vektoren mit den Komponenten $\mu'_{ik}\tilde{H}_k$ und $\varepsilon'_{ik}\tilde{E}_k$ sind; für die Komponenten der Tensoren $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ gilt $\mu'_{ik} = \varepsilon'_{ik} = \delta_{ik}$ außerhalb und $\mu'_{ik} = \mu_{ik}$, $\varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik}$ innerhalb des vom Dielektrikum eingenommenen Gebietes.

Aus den Gleichungen für rot $\tilde{\mathfrak{E}}_0^*$ und rot $\tilde{\mathfrak{H}}$ ergibt sich

$$\tilde{\mathfrak{H}}\operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{E}}_0^* - \tilde{\mathfrak{E}}_0^*\operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{H}} + i(k-k_0)\,(\mathfrak{e}_z\times\tilde{\mathfrak{E}}_0^*)\,\tilde{\mathfrak{H}} = -i\,\omega(\tilde{\mathfrak{H}}\,\tilde{\mathfrak{H}}_0^* - \boldsymbol{\varepsilon}'\,\tilde{\mathfrak{E}}\,\tilde{\mathfrak{E}}_0^*). \tag{3}$$

Wir integrieren beide Seiten dieser Gleichung über den Querschnitt F des Hohlleiters. Die ersten beiden Terme lassen sich folgendermaßen umformen:

$$\int\limits_F (\tilde{\mathfrak{H}}\operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{E}}_0^* - \tilde{\mathfrak{E}}_0^*\operatorname{rot}\tilde{\mathfrak{H}})\,\mathrm{d}F = \frac{1}{l}\int\limits_V \operatorname{div}(\tilde{\mathfrak{E}}_0^*\times\tilde{\mathfrak{H}})\,\mathrm{d}V.$$

Auf der linken Seite wird über das Volumen V integriert, das durch die Hohlleiterwand und zwei Querschnitte im Abstand l voneinander begrenzt wird (der Integrand hängt nicht von z ab).

Mit Hilfe des GAUSSschen Satzes folgt weiter

$$\int \operatorname{div}(\tilde{\mathfrak{E}}_0^*\times\tilde{\mathfrak{H}})\,\mathrm{d}V = \int (\tilde{\mathfrak{E}}_0^*\times\tilde{\mathfrak{H}})\,\mathfrak{n}\,\mathrm{d}F = \int (\mathfrak{n}\times\tilde{\mathfrak{E}}_0^*)\,\tilde{\mathfrak{H}}\,\mathrm{d}F.$$

In der Hohlleiterwand ist $\mathfrak{n} \times \tilde{\mathfrak{E}}_0^* = 0$ wegen der Grenzbedingung $\tilde{E}_{0t} = 0$. Die Integrale über die Querschnitte gehen deshalb mit verschiedenen Vorzeichen ein und heben sich gegenseitig weg. Daher gilt

$$\int (\mathfrak{n} \times \tilde{\mathfrak{E}}_0^*) \, \tilde{\mathfrak{H}} \, \mathrm{d}F = 0,$$

und Gleichung (3) ergibt

$$(k - k_0) \int_F (\tilde{\mathfrak{E}}_0^* \times \tilde{\mathfrak{H}}) \, \mathfrak{e}_z \, \mathrm{d}F = -\omega \left[\int_F (\tilde{\mathfrak{H}} \, \tilde{\mathfrak{H}}_0^*) \, \mathrm{d}F - \right.$$
$$\left. - \int_F (\tilde{\mathfrak{E}} \, \tilde{\mathfrak{E}}_0^*) \, \mathrm{d}F - \int_{\Delta F} \Delta\varepsilon \, \tilde{\mathfrak{E}} \, \tilde{\mathfrak{E}}_0^* \mathrm{d}F \right], \tag{4}$$

wobei $\Delta\varepsilon = \varepsilon - 1$ ist und ΔF der Querschnitt des Gebietes ist, das vom Dielektrikum eingenommen wird.

Analog ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen für $\operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{E}}$ und $\operatorname{rot} \tilde{\mathfrak{H}}_0^*$

$$(k - k_0) \int_F (\tilde{\mathfrak{E}} \times \tilde{\mathfrak{H}}_0^*) \, \mathfrak{e}_z \, \mathrm{d}F = \frac{\omega}{c} \left[\int_F \tilde{\mathfrak{H}} \, \tilde{\mathfrak{H}}_0^* \, \mathrm{d}F - \right.$$
$$\left. - \int_F \tilde{\mathfrak{E}} \, \tilde{\mathfrak{E}}_0^* \, \mathrm{d}F + \int_{\Delta F} \Delta\mu \, \tilde{\mathfrak{H}} \, \tilde{\mathfrak{H}}_0^* \, \mathrm{d}F \right] \tag{5}$$

mit $\Delta\mu = \mu - 1$.

Durch Addition der Gleichungen (4) und (5) erhalten wir die in der Aufgabenstellung angegebene Beziehung. Es ist eine exakte Beziehung für die Änderung Δk der Ausbreitungskonstanten mit den Feldamplituden. Meist läßt sich jedoch keine exakte Lösung des Problems des teilweise von einem Dielektrikum erfüllten Hohlleiters angeben. Nur bei hinreichend kleinen transversalen Abmessungen des vom Dielektrikum eingenommenen Gebietes gelingt es, die Amplituden der gestörten Felder $\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}$ näherungsweise zu bestimmen. Daraus kann man dann mit Hilfe der Formel für Δk die Änderung der Ausbreitungskonstanten berechnen, die eine wichtige charakteristische Größe der Wellen in einem Hohlleiter ist. Beispiele zur Berechnung von Hohlleitern mit dieser Methode sind die Aufgaben 477 bis 479.

477. Im Falle einer Scheibe kleiner Dicke kann man die Amplituden der gestörten Felder angenähert durch die ungestörten Amplituden ausdrücken, die für die H_{10}-Welle folgende Form haben:

$$\tilde{H}_{0z} = \tilde{H}_0 \cos\frac{\pi x}{a}, \qquad \tilde{H}_{0x} = -\frac{i k_0 a}{\pi} \tilde{H}_0 \sin\frac{\pi x}{a},$$

$$\tilde{E}_{0y} = \frac{i \omega a}{\pi c} \tilde{H}_0 \sin\frac{\pi x}{a}, \qquad \tilde{E}_{0x} = \tilde{E}_{0z} = \tilde{H}_{0y} = 0.$$

(Diese Ausdrücke folgen aus den Ergebnissen der Aufgabe 462.) Wir vernachlässigen die Änderung der Feldamplituden außerhalb des von der Scheibe eingenommenen Volumens und die Änderung der Felder mit der Dicke der Scheibe, d.h. lassen Terme der Ordnung d^2 und höher fort. Auf der Oberfläche der Scheibe müssen die Grenzbedingungen

$$\tilde{E}_y = \tilde{E}_{0y}, \quad \tilde{H}_z = \tilde{H}_{0z}, \quad \mu_\perp \tilde{H}_x - i\,\mu_a \tilde{H}_y = \tilde{H}_{0x},$$
$$\tilde{H}_y = \tilde{H}_{0y} = 0$$

erfüllt sein, wobei die ungestörten Amplituden auf den rechten Seiten für $x = x_1$ genommen werden. Diese Gleichungen bestimmen die Amplituden des ungestörten Feldes in der Scheibe.

Das Integral im Zähler des Ausdrucks für Δk (s. die Problemstellung der vorigen Aufgabe) ist gleich dem Produkt der Funktion im Integranden und der Querschnittsfläche $b\,d$ der Scheibe, da das Feld nicht von y abhängt und die Abhängigkeit von x vernachlässigt wird.

Im Integral des Nenners kann man die ungestörten Werte der Amplituden einsetzen. Es ergibt sich

$$\Delta k = \frac{d}{k_0 a}\left\{\left[\frac{(\varepsilon - 1)\,\omega^2}{c^2} + \left(1 - \frac{1}{\mu_\perp}\right) k_0^2\right] \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} + \right.$$
$$\left. + (\mu_{||} - 1)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x_1}{a}\right\}.$$

Da $\mu_\perp$ von dem konstanten magnetisierenden Feld H_0 abhängt (s. Aufgabe 329), wird auch Δk von H_0 abhängig sein. Infolge der Änderung von H_0 wird sich auch die Phase der Welle ändern. Ein Gerät, das auf dieser Erscheinung beruht, wird in der HF-Technik zur Phasenumwandlung benutzt.

478.

$$\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \frac{b - a}{a\,b \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_\perp}\right).$$

479. Man erhält

a) $$\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \frac{b - a}{a\,b \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_{||}}\right),$$

b) $$\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \frac{b - a}{a\,b \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_\perp}\right).$$

Im Falle **a)** hängt Δk wegen $\mu_{||} \approx 1$ praktisch nicht vom konstanten magnetischen Feld H_0 ab (s. Aufgabe 329). Das erklärt sich dadurch, daß das hochfrequente Magnetfeld innerhalb der Platte dieselbe Richtung wie das konstante Feld hat und keine Präzession der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ hervorruft.

Im Falle b) steht das hochfrequente Magnetfeld innerhalb der Platte senkrecht auf dem konstanten Feld, und $\mu_\perp$ hängt resonanzförmig von H_0 ab.

480. Wir integrieren die Differentialgleichungen (9.1) mit den Grenzbedingungen $E_t = 0$, d.h.

$$E_y = E_z = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, x = a,$$

$$E_z = E_x = 0 \quad \text{für} \quad y = 0, y = b,$$

$$E_x = E_y = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, z = h.$$

Die Gleichungen und Grenzbedingungen werden durch die Funktionen

$$E_x = A_1 \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \, e^{-i\omega t},$$

$$H_x = -i \frac{c}{\omega} (A_3 k_2 - A_2 k_3) \sin k_1 x \cos k_2 y \cos k_3 z \, e^{-i\omega t}$$

erfüllt (für die übrigen Komponenten gelten analoge Ausdrücke), wobei

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{b}, \quad k_3 = \frac{n_3 \pi}{h}, \quad \omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

sind und n_1, n_2, n_3 ganze positive Zahlen (einschließlich Null) bedeuten. Negative n_i ergeben keine neuen Schwingungstypen, da sich die Feldrichtungen bei der Substitution $k_i \to -k_i$ umkehren, während sich die Konfigurationen der Felder nicht ändern. Wegen $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ hängen die Konstanten A_i folgendermaßen miteinander zusammen:

$$A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 = 0.$$

Zwei dieser Konstanten bleiben voneinander unabhängig, so daß die Eigenschwingungen ($n_1, n_2, n_3 \neq 0$) im allgemeinen zweifach entartet sind, d. h., jeder Eigenfrequenz entsprechen zwei Schwingungen mit verschiedenen Konfigurationen des elektrischen und des magnetischen Feldes. Ist eine der Zahlen n_1, n_2, n_3 gleich Null, so tritt keine Entartung auf. Sind jedoch die Abmessungen a, b, h des Resonators kommensurabel, d.h., verhalten sie sich zueinander wie ganze Zahlen, so nimmt der Grad der Entartung zu.

481.

$$\Delta N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega.$$

482.

$$\Delta\omega' = \frac{\pi^2 c \zeta''}{2} \left[a \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{h^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{h} \right) \right],$$

$$\Delta\omega'' = -\frac{\pi^2 c \zeta'}{2} \left[a \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{h^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{h} \right) \right].$$

483. Die E-Wellen sind

$$E_z = \tilde{E}_0 J_m(\varkappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \cos kz\, e^{-i\omega t}, \qquad H_z = 0,$$

$$E_r = -\frac{k}{\varkappa} \tilde{E}_0 J_m'(\varkappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \sin kz\, e^{-i\omega t},$$

$$E_\alpha = -\frac{m k}{\varkappa^2 r} \tilde{E}_0 J_m(\varkappa r) \cos(m\alpha + \psi_m) \sin kz\, e^{-i\omega t},$$

$$H_r = -\frac{i m \omega}{\varkappa^2 c r} \tilde{E}_0 J_m(\varkappa r) \cos(m\alpha + \psi_m) \cos kz\, e^{-i\omega t},$$

$$H_\alpha = \frac{i \omega}{\varkappa c} \tilde{E}_0 J_m'(\varkappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \cos kz\, e^{-i\omega t},$$

wobei $k = l\pi/h$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $\varkappa_{mn} = \alpha_{mn}/a$ ist, α_{mn} die Wurzeln der Gleichung $J_m(\alpha_{mn}) = 0$ bedeuten und $\omega^2 = c^2(\varkappa_{mn}^2 + k^2)$ gilt.

Die H-Wellen sind

$$H_z = \tilde{H}_0 J_m(\varkappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \sin kz\, e^{-i\omega t},$$

wobei $k = l\pi/h$, $l = 1, 2, \ldots$ ist; der Wert $l = 0$ ist nicht möglich; ferner ist $\varkappa_{mn} = \beta_{mn}/a$, wobei β_{mn} Wurzel der Gleichung $J_m'(\beta_{mn}) = 0$ und $\omega^2 = c^2(\varkappa_{mn}^2 + k^2)$ ist. Die übrigen Feldkomponenten lassen sich mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen durch H_z ausdrücken.

Für $m \neq 0$ sind sowohl die E- als auch die H-Wellen im allgemeinen zweifach entartet, da jeder Eigenfrequenz zwei Eigenfunktionen entsprechen, z.B.

$$H_z = \tilde{H}_0 J_m(\varkappa r) \sin m\alpha \sin kz\, e^{-i\omega t}$$

und

$$H_z = \tilde{H}_0 J_m(\varkappa r) \cos m\alpha \sin kz\, e^{-i\omega t}.$$

10. SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

10.1. LORENTZ-Transformationen

484.

$$x - x_0 = \frac{x' - x_0' + V(t' - t_0')}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$y - y_0 = y' - y_0',$$

$$z - z_0 = z' - z_0',$$

$$t - t_0 = \frac{t' - t_0' + \frac{V}{c^2}(x' - x_0')}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

487. Die Koordinaten der Uhren, die in den Systemen S und S' dieselbe Zeit $t = t'$ anzeigen, sind

$$x = \frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t, \quad x' = -\frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t.$$

Hieraus folgt, daß sich der Punkt, in dem $t = t'$ ist, in jedem der Systeme S und S' gleichförmig bewegt. Führt man ein Bezugssystem ein, in dem dieser Punkt ruht, so bewegen sich S und S' mit der gleichen Geschwindigkeit

$$V_0 = \frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

nach entgegengesetzten Seiten (V_0 ist relativistisch die „Hälfte" der Geschwindigkeit V in dem Sinne, daß die relativistische Addition zweier Geschwindigkeiten V_0 die Geschwindigkeit V ergibt).

488.

a) Nein. 12h 00min können gleichzeitig zwei Uhren in einem der Bezugssysteme und nur eine Uhr im anderen Bezugssystem anzeigen.

b) Die Anzeigen der am gleichen Ort befindlichen Uhren hängen nicht von der Wahl des Bezugssystems ab:

$$t_{A'} = 12\text{ h } 00\text{ min} + \frac{l_0}{V} = 13\text{ h } 00\text{ min};$$

$$t_A = 12\text{ h } 00\text{ min} + \frac{l_0}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 12\text{ h } 36\text{ min}.$$

Die Anzeigen der übrigen Uhren B und B' werden infolge der Relativität der Gleichzeitigkeit von der Wahl des Bezugssystems abhängen.

Vom Standpunkt des Beobachters auf der „Plattform" ist (Abb. 73*a*)

$$t_{B'} = 12\,\text{h}\ 21{,}6\ \text{min}, \quad t_B = t_A = 12\,\text{h}\ 36\ \text{min}.$$

Vom Standpunkt des Beobachters im „Zug" ist (Abb. 73*b*)

$$t_{B'} = t_{A'} = 13\,\text{h}\ 00\ \text{min}, \quad t_B = 13\,\text{h}\ 14{,}4\ \text{min}.$$

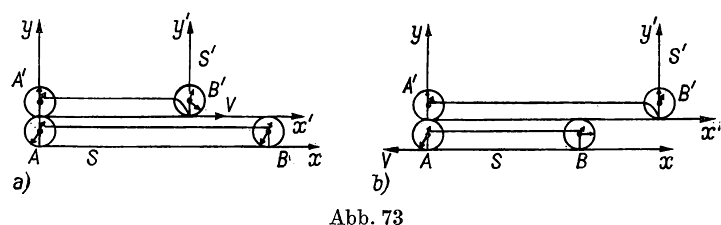


Abb. 73

c) Vom Standpunkt des Beobachters auf der „Plattform" ist

$$t_A = 13\,\text{h}\ 00\ \text{min} = t_B, \quad t_{B'} = 12\,\text{h}\ 36\ \text{min}, \quad t_{A'} = 13\,\text{h}\ 14{,}4\ \text{min}.$$

Vom Standpunkt des Beobachters im „Zug" ist

$$t_A = 12\,\text{h}\ 21{,}6\ \text{min}, \quad t_{A'} = t_{B'} = 12\,\text{h}\ 36\ \text{min},$$

$$t_B = 13\,\text{h}\ 00\ \text{min}.$$

In allen Fällen gehen jeweils diejenigen Uhren nach, deren Anzeigen mit denen zweier Uhren im anderen Bezugssystem verglichen werden.

489. Nach den Erduhren ist $\Delta t \doteq 8$ Jahre. Bei der Berechnung der Vorräte muß der Zeitraum $\Delta t_0 = 0{,}01\,\Delta t \approx 1$ Monat nach den Raketenuhren zugrunde gelegt werden. Die kinetische Energie ist

$$T = m\,c^2(\gamma - 1) \equiv 2{,}5 \cdot 10^{16}\ \text{kWh}.$$

Diese Energiemenge ist um den Faktor 10000 größer als die zur Zeit jährlich erzeugte Menge an Elektroenergie in der ganzen Welt.

490. Man erhält

$$v = \frac{2 l_0 \Delta t}{(\Delta t)^2 + l_0^2/c^2}.$$

Für einen mit dem ersten Maßstab verbundenen Beobachter (Abb. 74*a*) decken sich zunächst die linken, dann die rechten Enden; für einen mit dem

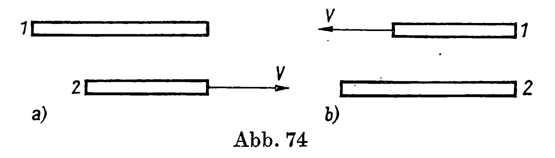


Abb. 74

zweiten Maßstab verbundenen Beobachter (Abb. 74*b*) ist dies umgekehrt. Vom Standpunkt eines Beobachters, gegenüber dem sich beide Maßstäbe mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen, decken sich die Enden gleichzeitig.

491. Wir führen die transversale und die longitudinale Komponente des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ ein:

$$\mathfrak{r}_{\parallel} = \mathfrak{V}\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{V}}{V^2}, \qquad \mathfrak{r}'_{\parallel} = \mathfrak{V}\frac{\mathfrak{r}'\mathfrak{V}}{V^2},$$

$$\mathfrak{r}_{\perp} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_{\parallel}, \qquad \mathfrak{r}'_{\perp} = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'_{\parallel}.$$

Wendet man auf $\mathfrak{r}_{\parallel}$ und $\mathfrak{r}_{\perp}$ die LORENTZ-Transformation (10.1) an, so folgt

$$\mathfrak{r}_{\parallel} = \gamma(\mathfrak{r}'_{\parallel} + \mathfrak{V}\,t'), \qquad \mathfrak{r}_{\perp} = \mathfrak{r}'_{\perp}.$$

Schließlich erhält man

$$\mathfrak{r} = \gamma(\mathfrak{r}' + \mathfrak{V}\,t') + (\gamma - 1)\frac{(\mathfrak{r}' \times \mathfrak{V}) \times \mathfrak{V}}{V^2},$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\mathfrak{r}'\mathfrak{V}}{c^2}\right).$$

492.

$$\mathfrak{A} = \gamma\left(\mathfrak{A}' - i\frac{\mathfrak{V}}{c}A'_4\right) + (\gamma - 1)\frac{(\mathfrak{A}' \times \mathfrak{V}) \times \mathfrak{V}}{V^2},$$

$$A_4 = \gamma\left(A'_4 + i\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{V}}{c^2}\right).$$

493. Es ergibt sich

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_{\parallel} + \mathfrak{v}_{\perp} = \frac{\mathfrak{v}' + \mathfrak{V} + (\gamma - 1)\frac{\mathfrak{V}}{V^2}[\mathfrak{v}'\mathfrak{V} + V^2]}{\gamma\left(1 + \frac{\mathfrak{v}'\mathfrak{V}}{c^2}\right)}.$$

Man kann auch einfach den Radiusvektor $\mathfrak{r}$, der in der Aufgabe 491 durch $\mathfrak{r}'$ und t' ausgedrückt wurde, nach der Zeit differenzieren.

497.

$$l = l_0\frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}.$$

498. Man findet

$$l = l_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

(die Relativgeschwindigkeiten der Maßstäbe erhält man am einfachsten mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe 493).

499.

a) $V = 2 \cdot 0{,}9c = 1{,}8c$;

b) $V = 0{,}994c$.

500. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen ist in dem mit einem von ihnen verbundenen System

$$V = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

Daraus folgt

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m c^2 \left[2\left(\frac{E_0}{m c^2}\right)^2 - 1\right].$$

Im extrem relativistischen Fall ist $E_0 \gg m c^2$ und folglich

$$E = \frac{2 E_0^2}{m c^2}.$$

Werden Elektronen beschleunigt ($m c^2 = 0{,}5$ MeV), so ergibt sich z.B. für $E_0 =$ $= 50$ MeV ein 200facher Gewinn der Beschleunigerleistung: $E = 10000$ MeV.

501. Man kann diese Aufgabe wie die Aufgabe 493 auf zwei Wegen lösen. Es ergibt sich

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{1}{\gamma^2 s^2} \dot{\mathfrak{v}}' - \frac{(\gamma - 1)(\dot{\mathfrak{v}}' \mathfrak{V}) \mathfrak{V}}{\gamma^3 s^3 V^2} - \frac{(\dot{\mathfrak{v}}' \mathfrak{V}) \mathfrak{v}'}{\gamma^2 s^3 c^2}$$

mit

$$s = 1 + \frac{\mathfrak{v}' \mathfrak{V}}{c^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt: Bewegt sich das Teilchen in einem Bezugssystem mit der konstanten Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}'$, so ist die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ im anderen Bezugssystem im allgemeinen zeitabhängig (da die Transformationsgleichung die veränderliche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ des Teilchens enthält).

502. Man erhält

$$w_i^2 = \gamma^6 \left[\dot{\mathfrak{v}}^2 - \left(\dot{\mathfrak{v}} \times \frac{\mathfrak{v}}{c}\right)^2\right] = \gamma^4 \left[\dot{\mathfrak{v}}^2 + \gamma^2 v^2 \frac{\dot{v}^2}{c^2}\right] > 0,$$

d.h., die Viererbeschleunigung ist raumartig.

503. S' sei das momentane Ruhsystem des Teilchens. Nach Aufgabe 501 ist

$$\dot{\mathfrak{v}}' = \gamma^2 \left[\dot{\mathfrak{v}} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\dot{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{v})\, \mathfrak{v}\right] \tag{1}$$

und damit

$$\dot{\mathfrak{v}}'^2 = \gamma^4 \left[\dot{\mathfrak{v}}^2 + \frac{\gamma^2 (\dot{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{v})^2}{c^2}\right] = \gamma^6 \left[\dot{\mathfrak{v}}^2 - \left(\dot{\mathfrak{v}} \times \frac{\mathfrak{v}}{c}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Ändert sich die Geschwindigkeit des Teilchens nur dem Betrage nach, so gilt $\dot{\mathfrak{v}} \parallel \mathfrak{v}$ und

$$\dot{\mathfrak{v}}' = \gamma^3 \dot{\mathfrak{v}}. \tag{3}$$

Ändert sich die Geschwindigkeit des Teilchens nur der Richtung nach, so ist $\mathfrak{v} \perp \dot{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{v}\, \dot{\mathfrak{v}} = 0$, also

$$\dot{\mathfrak{v}}' = \gamma^2 \dot{\mathfrak{v}}. \tag{4}$$

Gleichung (2) erhält man auch auf einfachere Weise, indem man den Ausdruck für das Quadrat der Viererbeschleunigung aus der vorigen Aufgabe be-

nutzt. Das Quadrat w_i^2 ist eine Viererinvariante. Das bedeutet, daß w_i^2 im System S und im System S' die gleiche Form hat. Berücksichtigt man noch, daß die Geschwindigkeit des Teilchens $\mathfrak{v}' = 0$ ist, so erhält man unmittelbar die Gleichung (2).

504. Die Beschleunigungsdauer im unbewegten System ist

$$T = \frac{1}{|\dot{\mathfrak{v}}|} \int_0^V \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{v}{|\dot{\mathfrak{v}}| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 47{,}5 \text{ Jahre.}$$

Nach den in der Rakete befindlichen Uhren ist sie

$$\tau = \frac{c}{2|\dot{\mathfrak{v}}|} \ln \left| \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right| = 2{,}5 \text{ Jahre.}$$

505. Im S-System ist

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2}{|\mathfrak{v}_1| \, |\mathfrak{v}_2|},$$

im S'-System

$$\cos\alpha' = \frac{(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{V})(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{V}) - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{V})(\mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{V})}{\sqrt{(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{V})^2} \sqrt{(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{V})^2}}.$$

506. Der Winkel im S'-System strebt gegen Null. Um das zu zeigen, setzen wir $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 c$ mit $|\mathfrak{V}_0| = 1$ und berechnen $\cos\alpha'$ mit Hilfe der Beziehung in der vorigen Aufgabe. Wegen

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1) - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b})$$

ergibt sich

$$\cos\alpha' = \frac{c^2 - \mathfrak{v}_1 \mathfrak{V} - \mathfrak{v}_2 \mathfrak{V} + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}_1 \mathfrak{V})(\mathfrak{v}_2 \mathfrak{V})}{\sqrt{\left(c - \frac{\mathfrak{v}_1 \mathfrak{V}}{c}\right)^2} \sqrt{\left(c - \frac{\mathfrak{v}_2 \mathfrak{V}}{c}\right)^2}} = 1.$$

Daraus folgt $\alpha' = 0$. Diese Einengung der Winkelverteilung ist ein typischer relativistischer Effekt, der bei vielen Erscheinungen auftritt.

507. Die Bestimmung des Aberrationswinkels läuft auf die Berechnung von zwei Winkeln hinaus (Abb. 75): des Winkels α_1 zwischen der Strahlrichtung AC und der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Erde in ihrer ersten Position und des Winkels α_2 zwischen der Strahlrichtung BC und der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ der Erde in ihrer zweiten Position (nach einem halben Jahr). Der Aberrationswinkel δ ist durch $\delta = (\pi - \alpha_2) - \alpha_1 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$ definiert. Wir berechnen die Winkel α_1 und α_2 mit Hilfe der Gleichungen (10.15) und drücken sie durch den Winkel ϑ aus, der in dem mit der Sonne verbunde-

nen Bezugssystem zwischen dem Lichtstrahl OC und dem Geschwindigkeitsvektor der Erde beobachtet wird:

$$\tan(\pi - \alpha_1) = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \beta}, \qquad \tan(\pi - \alpha_2) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta + \beta},$$

wobei $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ist. Daraus folgt

$$\tan\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\delta}{1 + \cos\delta}} = \beta\,\gamma \sin\vartheta.$$

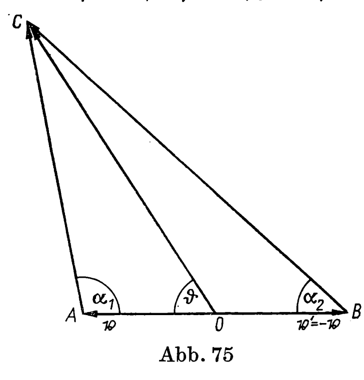


Abb. 75

Wir weisen darauf hin, daß sich alle drei Winkel zwischen den Geschwindigkeiten, die in der Abb. 75 dargestellt sind, auf verschiedene Bezugssysteme beziehen und daß die Abbildung selbst nicht maßstabsgetreu ist (z. B. sind die eingezeichneten Strecken $\overline{AC} \approx \overline{CO} \approx \overline{CB} \approx c$).

Die Ergebnisse zeigen insbesondere, daß der Aberrationswinkel δ nur von der Relativgeschwindigkeit zwischen Erde und Sonne und nicht von der Geschwindigkeit des Sonnensystems gegenüber den Sternen abhängt.

508. Wird die Position der Erde auf der Bahn durch den Azimutwinkel φ beschrieben und ist $\mathfrak{a} = (0, a_\vartheta, a_\alpha)$ ein Vektor, der vom Punkt (ϑ, α) der Himmelskugel zur beobachteten Position des Sterns an der Himmelskugel zeigt, so gilt

$$a_\vartheta = -\beta \cos\vartheta \sin(\alpha - \varphi),$$
$$a_\alpha = -\beta \cos(\alpha - \varphi).$$

Daraus folgt, daß der Stern im Laufe eines Jahres an der Himmelskugel scheinbar eine Ellipse mit den Halbachsen $\beta\cos\vartheta$ und β beschreibt.

509. Wir betrachten im S-System das Lichtbündel im Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\alpha$. Im S'-System wird man dasselbe Lichtbündel im Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega' = \sin\vartheta'\,\mathrm{d}\vartheta'\,\mathrm{d}\alpha'$ beobachten. Es ist $\alpha = \alpha'$ und

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - \beta}{1 - \beta\cos\vartheta}.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{d}\Omega' = \sin\vartheta'\,\mathrm{d}\vartheta'\,\mathrm{d}\alpha' = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta\cos\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\Omega.$$

Dabei gilt natürlich $\int \mathrm{d}\Omega' = \int \mathrm{d}\Omega = 4\pi$.

510. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi}\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta\cos\vartheta')^2},$$

wobei N_0 die Gesamtzahl der sichtbaren Sterne bedeutet.

511. Es ergibt sich

$$\omega = \gamma\,\omega'\left(1 + \frac{\mathfrak{n}'\mathfrak{V}}{c}\right) \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{\omega'}{\gamma\left(1 - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{V}}{c}\right)},$$

$$\mathfrak{k} = \gamma\left(\mathfrak{k}' + \frac{\mathfrak{V}\,\omega'}{c^2}\right) + (\gamma - 1)\,(\mathfrak{k}' \times \mathfrak{V}) \times \frac{\mathfrak{V}}{V^2}$$

mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{k}/k$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{k}'/k'$, $k = \omega/c$.

512. Ist ω_0 die Frequenz im Ruhsystem der Quelle und V die Geschwindigkeit der Quelle gegen den Lichtempfänger, so registriert der Empfänger eine kleinere Frequenz: $\omega = \omega_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ (Rotverschiebung).

Der Winkel α des Strahles mit der Bewegungsrichtung der Quelle in deren Ruhsystem wird durch die Beziehung $\cos\alpha = V/c$ bestimmt.

513.

a) $\lambda = \lambda_0\sqrt{\dfrac{1 - V/c}{1 + V/c}}$;

b) $\lambda = \lambda_0\sqrt{\dfrac{1 + V/c}{1 - V/c}}$.

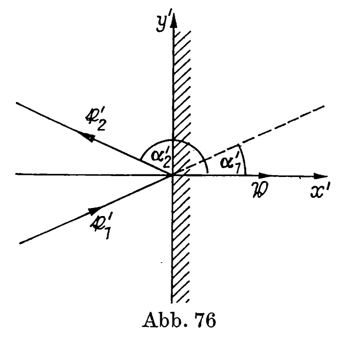


Abb. 76

514. Wir führen das Ruhsystem S' des Spiegels ein (S sei das Laborsystem). α_1' und α_2' seien die Winkel zwischen den Wellenvektoren $\mathfrak{k}_1'$ und $\mathfrak{k}_2'$ der einfallenden bzw. reflektierten Welle und der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ des Spiegels (Abb. 76). Die Frequenzen vor und nach der Reflexion seien ω_1' bzw. ω_2'. Bei den analogen Größen im System S werden die Striche an den Buchstaben weggelassen. Wir gehen vom bekannten Reflexionsgesetz im S'-System aus: $\omega_1' = \omega_2' = \omega'$ und $\alpha_2' = \pi - \alpha_1'$, also $\cos\alpha_2' = -\cos\alpha_1'$.

Drückt man mit Hilfe von (10.4) und (10.14) ω' durch ω und $\cos\alpha'$ durch $\cos\alpha$ aus und löst die erhaltenen Gleichungen nach $\cos\alpha_2$ und ω_2 auf, so wird

$$\cos\alpha_2 = -\frac{(1 + \beta^2)\cos\alpha_1 - 2\beta}{1 - 2\beta\cos\alpha_1 + \beta^2},$$

$$\omega_2 = \omega_1\frac{1 - 2\beta\cos\alpha_1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Für $\beta \to 1$ folgt $\omega_2 \to 0$ bei senkrechtem Einfall auf einen sich entfernenden Spiegel und $\omega_2 \to \infty$ bei senkrechtem Einfall auf einen sich nähernden Spiegel.

515. Es ist $\omega_1 = \omega_2$, d.h., der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel.

516. Das Medium bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ parallel zur x-Achse (Bezugssystem S'). In ihm breitet sich in der Richtung $\mathfrak{n}_0$ eine ebene Welle der Frequenz ω aus. Die Feldkomponenten sind proportional $e^{-ik_ix_i}$ mit

$$k_i = \left(\frac{\omega}{v}\cos\alpha,\ \frac{\omega}{v}\sin\alpha,\ 0,\ i\frac{\omega}{c}\right).$$

Dabei steht die Ausbreitungsrichtung $\mathfrak{n}_0$ senkrecht auf der z-Achse und bildet den Winkel α mit der x-Achse, während v die Phasengeschwindigkeit der Welle bedeutet. Da die Phase $k_i x_i$ eine Invariante der LORENTZ-Transformation ist, bildet k_i einen Vierervektor (Wellenvektor). Mit Hilfe von (10.4) und (10.14) ergibt sich

$$\omega = \gamma\,\omega'(1 + \beta\, n \cos\alpha'), \tag{1}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha'}{\gamma\left(\cos\alpha' + \frac{\beta}{n}\right)}, \tag{2}$$

$$v = c\,\frac{1 + \beta\, n\cos\alpha'}{\sqrt{(n\cos\alpha' + \beta)^2 + n^2\sin^2\alpha'(1 - \beta^2)}} \tag{3}$$

mit $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Aus (3) folgt, daß die Phasengeschwindigkeit im bewegten Medium von der Ausbreitungsrichtung abhängt. Bei der Bewegung des Mediums entsteht also eine Art Anisotropie.

517. Man kann die gesuchte Geschwindigkeit mit Hilfe der Gleichung (3) der vorigen Aufgabe bestimmen ($\alpha' = 0$):

$$v = c\,\frac{1 + \beta\, n(\lambda')}{n(\lambda') + \beta} \approx \frac{c}{n(\lambda')} + V\left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda')}\right).$$

Dabei ist $\lambda' = 2\pi\, c/\omega'$, wobei ω' die Frequenz bedeutet, die im Ruhsystem S' des Mediums beobachtet wird. Aus Gleichung (1) der vorigen Aufgabe folgt bis auf V/c genau

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega'} = 1 + \frac{n\,V}{c}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\lambda\frac{n\,V}{c}$$

und schließlich

$$v = \frac{c}{n(\lambda)} + V\left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda)} - \frac{\lambda}{n(\lambda)}\frac{\mathrm{d}n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right).$$

10.2. Vierervektoren und -tensoren

519. In einen dreidimensionalen Tensor zweiter Stufe $A_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), zwei dreidimensionale Vektoren $A_{4\alpha}$ und $A_{\alpha 4}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) und einen dreidimensionalen Skalar A_{44}.

520. Ein antisymmetrischer Vierertensor A_{ik} kann in der Form

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 & B_1 \\ -A_3 & 0 & A_1 & B_2 \\ A_2 & -A_1 & 0 & B_3 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wobei $\mathfrak{A} = (A_1, A_2, A_3)$ und $\mathfrak{B} = (B_1, B_2, B_3)$ dreidimensionale Vektoren sind (genauer: $\mathfrak{B}$ ist ein polarer und $\mathfrak{A}$ ein axialer Vektor).

524.

a) Wie ein Vektor.

b) Wie ein Tensor zweiter Stufe.

c) Wie ein Vektor.

525. Wir schreiben die Bedingung für die Parallelität der Vektoren A_i und B_i in der Form (Zähler und Nenner jedes Terms werden jeweils mit derselben Zahl multipliziert)

$$\frac{\alpha_{1i}A_1}{\alpha_{1i}B_1} = \frac{\alpha_{2i}A_2}{\alpha_{2i}B_2} = \frac{\alpha_{3i}A_3}{\alpha_{3i}B_3} = \frac{\alpha_{4i}A_4}{\alpha_{4i}B_4}.$$

Benutzt man nun die bekannten Eigenschaften von Proportionalgleichungen, so erhält man

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{\alpha_{1i}A_1 + \alpha_{2i}A_2 + \alpha_{3i}A_3 + \alpha_{4i}A_4}{\alpha_{1i}B_1 + \alpha_{2i}B_2 + \alpha_{3i}B_3 + \alpha_{4i}B_4} = \frac{A'_i}{B'_i}.$$

526. Wesentlich verschieden sind vier Komponenten. Sie stimmen bis auf das Vorzeichen mit den Komponenten des Vektors $A_i = e_{iklm}A_{klm}/6$ überein, so daß $A_4 = -A_{123} = A_{213} = \ldots$, $A_1 = A_{234} = -A_{324} = \ldots$, $A_2 = = A_{314} = -A_{134} = \ldots$, $A_3 = A_{124} = -A_{214} = \ldots$ ist. Die übrigen Komponenten A_{ikl} sind Null (sie haben irgendzwei übereinstimmende Indizes). Daraus folgt unmittelbar, daß sich die von Null verschiedenen Komponenten A_{ikl} bei vierdimensionalen Drehungen und Spiegelungen wie die Komponenten eines vierdimensionalen Pseudovektors transformieren.

527. Die Funktionaldeterminante der eigentlichen Transformation ist

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)} = |\alpha_{ik}| = 1,$$

woraus unmittelbar die Invarianz von $d\Omega$ folgt.

528. Für $x_i = \alpha_{ik}\, x'_k$ hat die Matrix $\boldsymbol{\alpha}$ die Form (die Koordinate x_0 steht an vierter Stelle)

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix}.$$

529. Die gesuchte Matrix $\boldsymbol{g}$ kann als Produkt dreier Matrizen dargestellt werden:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\vartheta, \varphi)\, \boldsymbol{g}(\alpha)\, \boldsymbol{g}^{-1}(\vartheta, \varphi).$$

Die Matrix

$$\boldsymbol{g}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine räumliche Drehung des Bezugssystems (Abb. 77):

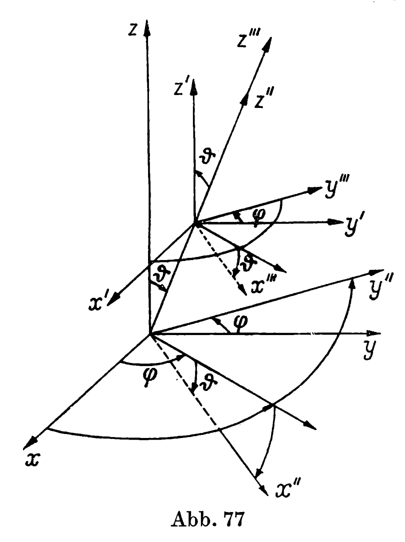


Abb. 77

$$x_i = \sum_k g_{ik}(\vartheta, \varphi)\, x_k''',$$

und die Matrix

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ 0 & 0 & \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

entspricht dem Übergang von S''' nach S'', wobei sich S''' in Richtung der x_3''-Achse mit der Geschwindigkeit $V = c\tanh\alpha$ bewegt [spezielle LORENTZ-Transformation (10.1)]. Schließlich beschreibt die Matrix $g^{-1}(\vartheta, \varphi)$ eine Drehung, durch die das Bezugssystem S' in S''' übergeht (siehe Abb. 77); sie stimmt mit der zu $g(\vartheta, \varphi)$ transponierten Matrix überein. Durch Multiplikation der Matrizen erhält man

$$g = \begin{pmatrix} 1+\omega_1^2(\cosh\alpha-1) & \omega_1\omega_2(\cosh\alpha-1) & \omega_1\omega_3(\cosh\alpha-1) & \omega_1\sinh\alpha \\ \omega_1\omega_2(\cosh\alpha-1) & 1+\omega_2^2(\cosh\alpha-1) & \omega_2\omega_3(\cosh\alpha-1) & \omega_2\sinh\alpha \\ \omega_1\omega_3(\cosh\alpha-1) & \omega_2\omega_3(\cosh\alpha-1) & 1+\omega_3^2(\cosh\alpha-1) & \omega_3\sinh\alpha \\ \omega_1\sinh\alpha & \omega_2\sinh\alpha & \omega_3\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

mit

$$\omega_1 = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \omega_2 = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \omega_3 = \cos\vartheta.$$

10.3. Relativistische Elektrodynamik

530. Für das Vakuum erhält man

$$\mathfrak{E} = \gamma\left(\mathfrak{E}' - \frac{\mathfrak{B}}{c}\times\mathfrak{H}'\right) - (\gamma-1)\,\mathfrak{B}\,\frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}'}{V^2},$$

$$\mathfrak{H} = \gamma\left(\mathfrak{H}' + \frac{\mathfrak{B}}{c}\times\mathfrak{E}'\right) - (\gamma-1)\,\mathfrak{B}\,\frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}'}{V^2};$$

für Medien wird

$$\mathfrak{P} = \gamma\left(\mathfrak{P}' + \frac{\mathfrak{B}}{c}\times\mathfrak{M}'\right) - (\gamma-1)\,\mathfrak{B}\,\frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{P}'}{V^2},$$

$$\mathfrak{M} = \gamma\left(\mathfrak{M}' - \frac{\mathfrak{B}}{c}\times\mathfrak{P}'\right) - (\gamma-1)\,\mathfrak{B}\,\frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{M}'}{V^2}.$$

Die Transformationsgleichungen für die Vektorpaare $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ sind denen des Paares $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ im Vakuum analog.

531. Das Problem hat unendlich viele Lösungen. Hat man ein (sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bewegendes) System S' gefunden, in dem $\mathfrak{E}' \parallel \mathfrak{H}'$ ist, so sind wegen (10.25) $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in jedem Bezugssystem, das sich gegen S' in dieser gemeinsamen Richtung bewegt, parallel. Wir werden deshalb nur dasjenige Bezugssystem S' suchen, das sich senkrecht zu der von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ aufgespannten Ebene bewegt. Benutzt man die Bedingung für die Parallelität der Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{E}' \times \mathfrak{H}' = 0$, und die Transformationsgleichungen der Aufgabe 530, so ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{V}}{c} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \, \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})^2}}{2(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})^2}.$$

Mit Hilfe der Feldinvarianten erhält man schließlich

$$E'^2 = \frac{1}{2}\left[E^2 - H^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})^2}\right],$$

$$H'^2 = \frac{1}{2}\left[H^2 - E^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})^2}\right].$$

532. Zur Voruntersuchung benutzt man die Feldinvarianten. Bei $E > H$ muß ein Bezugssystem existieren, in dem $H' = 0$, $E' = \sqrt{E^2 - H^2}$ ist, bei $E < H$ entsprechend ein Bezugssystem, in dem $E' = 0$, $H' = \sqrt{H^2 - E^2}$ ist.

Im Falle $E > H$ ist

$$\mathfrak{V} = c\,\frac{\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}}{E^2}, \quad \mathfrak{E}' = \frac{\mathfrak{E}}{E}\sqrt{E^2 - H^2}.$$

In einem beliebigen System S'', das sich mit beliebiger Geschwindigkeit in der Richtung von $\mathfrak{E}'$ bewegt, ist ebenfalls kein Magnetfeld vorhanden.

Im Falle $E < H$ gilt

$$\mathfrak{V} = c\,\frac{\mathfrak{H} \times \mathfrak{E}}{H^2}, \quad \mathfrak{H}' = \frac{\mathfrak{H}}{H}\sqrt{H^2 - E^2}.$$

533. Bei $\varkappa < I/c$ ist in dem Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit $V = c^2\varkappa/I$ parallel zur Zylinderachse in Richtung des Vektors $\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$ bewegt, das elektrische Feld $E' = 0$ und das Magnetfeld

$$H' = \frac{2I}{c\,r}\sqrt{1 - \frac{c^2\varkappa^2}{I^2}}.$$

Bei $\varkappa > I/c$ gilt in dem Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit $V = I/\varkappa$ parallel zur Zylinderachse in der Richtung von $\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$ bewegt, $H' = 0$ und

$$E' = \frac{2\varkappa}{r}\left(1 - \frac{I^2}{c^2\varkappa^2}\right)^{1/2}.$$

Bei $\varkappa = I/c$ gibt es kein Bezugssystem, in dem nur ein elektrisches bzw. nur ein magnetisches Feld vorhanden ist. Die angegebenen Beziehungen zeigen, daß die Geschwindigkeit eines solchen Bezugssystems bei $\varkappa \to I/c$ gegen c und die Werte beider Felder gegen Null streben würden.

535. Man erhält

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \quad \mathfrak{A} = e\frac{\mathfrak{V}}{cR^*},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{e\,\mathfrak{R}}{\gamma^2 R^{*3}} = \frac{e\,\mathfrak{R}(1 - V^2/c^2)}{R^3\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}, \quad \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{V}}{c} \times \mathfrak{E}$$

mit $R^* = \sqrt{(x - v\,t)^2 + (1 - \beta^2)(x^2 + y^2)}$. Dabei bedeuten $(v\,t, 0, 0)$ die Koordinaten der bewegten Ladung im Zeitpunkt t, $\mathfrak{R}(x - v\,t, y, z)$ den Radiusvektor von der Ladung zum Aufpunkt im Zeitpunkt t und ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{v}$.

536. Aus den Ergebnissen der vorigen Aufgabe folgt, daß das Feld E in Richtung der Bahn der Ladung ($\vartheta = 0, \pi$) im Vergleich zum COULOMB-Feld $E_{\text{Coul}} = e/R^2$ um das $(1 - V^2/c^2)$-fache abgeschwächt wird, während es in der dazu senkrechten Richtung ($\vartheta = \pi/2$) um das $(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$-fache verstärkt wird. Bei $V \approx c$ ist das Feld nur im engen Winkelintervall $\Delta\vartheta \approx \sqrt{1 - V^2/c^2}$ in der Nähe der Äquatorebene groß.

Die Bedingung $E_{||} = E'_{||}$ bezieht sich auf einen bestimmten Punkt im Viererraum. Ein Punkt A auf der x-Achse, der sich im Ruhsystem der Ladung im Abstand R von der Ladung befindet, hat im Laborsystem den Abstand $R\sqrt{1 - \beta^2}$. Durch Vergleich von $E_{||}$ im Punkt $R\sqrt{1 - \beta^2}$ und von $E'_{||}$ im Punkt R folgt

$$E_{||} = \frac{eR\sqrt{1 - \beta^2}\,(1 - \beta^2)}{\left(R\sqrt{1 - \beta^2}\right)^3} = \frac{e}{R^2} = E'_{||},$$

was zu erwarten war.

537. Man erhält

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{r}^*}{\gamma\,r^{*3}}, \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\varphi,$$

$$\mathfrak{E} = \frac{3\mathfrak{R}(\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{r}^*) - \mathfrak{p}_0\,r^{*2}}{\gamma^2\,r^{*5}}, \quad \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}$$

mit

$$\mathfrak{R} = (x - v\,t, y, z), \quad \mathfrak{r}^* = \left(x - v\,t, \frac{1}{\gamma}y, \frac{1}{\gamma}z\right);$$

der Dipol bewegt sich auf der x-Achse und befindet sich zur Zeit t im Punkt mit dem Radiusvektor $\mathfrak{v}\,t$.

538. Es ergibt sich

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' + \frac{\mathfrak{V}}{c} \times \mathfrak{m}' - (\gamma - 1)\,\mathfrak{V}\frac{\mathfrak{V}\,\mathfrak{p}'}{\gamma V^2},$$

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' - \frac{\mathfrak{V}}{c} \times \mathfrak{p}' - (\gamma - 1)\,\mathfrak{V}\frac{\mathfrak{V}\,\mathfrak{m}'}{\gamma V^2},$$

wobei $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{m}'$ die Dipolmomente im Ruhsystem bedeuten.

539. Mit Hilfe der Transformationsgleichung für die Viererstromdichte finden wir, daß die Rechteckseiten *2* und *4* (Abb. 78) ungeladen sind, während die Seiten *1* und *3* die Ladungen

$$q_1 = -q_3 = -\frac{V}{c}\frac{I'a}{c}$$

tragen, wobei I' den Strom im Ruhsystem S' der Schleife bedeutet. Daraus (oder aus dem Ergebnis der Aufgabe 538) folgt, daß das elektrische Dipolmoment der Schleife, das in S' beobachtet wird,

$$p = q_3 b = \frac{V}{c} m'$$

ist, wobei $m' = I'a\,b/c$ das im System S' beobachtete magnetische Moment der Schleife bedeutet.

540. u_i sei die Vierergeschwindigkeit des Mediums. Wir bilden die Vierer-invariante [s. Formel (10.37)]

$$f_i u_i = \gamma(\mathfrak{f}\,\mathfrak{B}) - \gamma(Q + \mathfrak{f}\,\mathfrak{B}) = -\gamma Q = \text{inv.}$$

Bezeichnet man mit Q_0 die Wärmemenge, die je Volumen- und Zeiteinheit im Ruhsystem des Mediums abgegeben wird, so erhält man $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$.

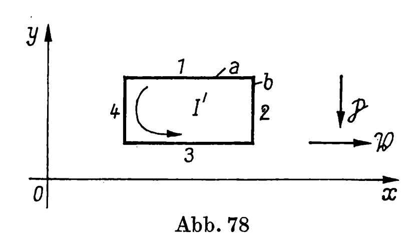


Abb. 78

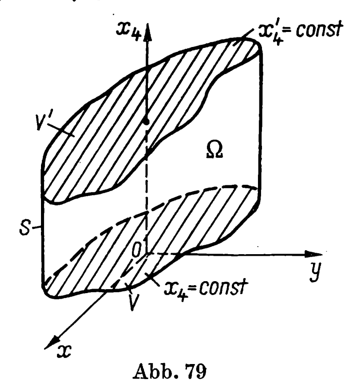


Abb. 79

542. $T_{ii} = 0$.

543. Impuls und Energie des Feldes im Volumen V zur Zeit $t = x_4/i\,c$ kann man durch die Integrale $\int T_{4\alpha}\,\mathrm{d}S$ und $\int T_{44}\,\mathrm{d}S$ ausdrücken, wobei $\mathrm{d}S$ das Element der Hyperebene $x_4 = \text{const}$ bedeutet (offenbar ist $\mathrm{d}S = \mathrm{d}V$). Durch analoge Integrale werden Impuls und Energie des Feldes zur Zeit $t' = x_4'/i\,c$ ausgedrückt. Wir führen einen willkürlichen konstanten Hilfsvektor a_i ein und bilden die Summe $T_{4i}\,a_i$. Ferner betrachten wir das Vierervolumen Ω, das durch die zylinderförmige Hyperfläche S, deren Erzeugende der x_4-Achse parallel ist, und die beiden Hyperebenen $x_4 = \text{const}$ und $x_4' = \text{const}$ begrenzt wird (Abb. 79).[1])

[1]) Eine solche Abbildung kann nur bedingt zur Veranschaulichung dienen, da der Minkowskische Viererraum pseudoeuklidisch und die x_4-Achse mit den übrigen Achsen nicht völlig gleichberechtigt ist (auf ihr werden imaginäre Größen abgetragen).

Wir formen das Integral der Funktion $T_{4i} a_i$ über diese Hyperfläche mit Hilfe des GAUSSschen Satzes im Vierdimensionalen um und erhalten

$$\oint T_{4i} a_i \,\mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial T_{4i}}{\partial x_i} a_i \,\mathrm{d}\Omega = 0,$$

da bei Abwesenheit von Ladungen $\partial T_{4i}/\partial x_i = 0$ ist. Auf der zylinderförmigen Hyperfläche ist $T_{4i} = 0$, da auf dem Rande des Volumens V des Systems kein Feld vorhanden ist. Damit wird (unter Berücksichtigung der Normalenrichtung)

$$a_i \int T_{4i} \mathrm{d}V = a_i' \int T'_{4i} \mathrm{d}V'.$$

Mit anderen Worten, die Größe $a_i \int T_{4i} \,\mathrm{d}V$ ist eine LORENTZ-Invariante. Dann muß aber $\int T_{4i} \,\mathrm{d}V$ einen Vierervektor bilden (vgl. mit den Aufgaben 524 und 4).

544. Wir berechnen die Änderung von L_{ik}[1]) in der Zeit $\mathrm{d}t$. Dazu sind die Werte von L_{ik} für zwei benachbarte Hyperebenen $t = \text{const}$ und $t + \mathrm{d}t = \text{const}$ miteinander zu vergleichen. Berücksichtigt man, daß das Feld im Unendlichen Null ist, so kann man die Differenz der Integrale über diese Hyperebenen in ein Integral über die geschlossene Hyperfläche S umformen, die sich durch die Ergänzung dieser Hyperebenen durch die unendlich ferne Hyperebene ergibt. Das erhaltene Integral kann mit Hilfe des GAUSSschen Satzes umgeformt werden:

$$\oint\limits_{S} A_{ikl} \,\mathrm{d}S_l = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_l} \mathrm{d}\Omega$$

(Ω bedeutet das Volumen innerhalb der geschlossenen Hyperfläche S). Die rechte Seite dieser Gleichung wird folgendermaßen umgeformt:

$$\frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (x_i T_{kl} - x_k T_{il}) = T_{ki} - T_{ik} + x_i \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} - x_k \frac{\partial T_{il}}{\partial x_l}.$$

Dabei gilt infolge der Symmetrie des Viererspannungstensors $T_{ik} = T_{ki}$.

Wir betrachten die Beziehung

$$\int x_i \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} \mathrm{d}\Omega = -\frac{1}{c} \int x_i F_{kl} j_l \,\mathrm{d}\Omega.$$

Da wir es mit einem System punktförmiger Teilchen zu tun haben, gilt

$$\int x_i F_{kl} j_l \,\mathrm{d}V = \sum e\, x_i F_{kl} \frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}t};$$

auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen die Koordinaten der Teilchen und deren Funktionen im Zeitpunkt t. Gemäß den Bewegungsgleichungen der

[1]) L_{ik} ist ein Funktional der raumartigen Hyperebene $t = \text{const}$.

Teilchen gilt

$$\frac{e}{c} F_{kl} \frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}.$$

Analog kann man das Integral

$$\int x_k \frac{\partial T_{il}}{\partial x_l} \mathrm{d}\Omega$$

betrachten, das auf diese Weise gleich

$$-\sum \left(x_i \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} - x_k \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t$$

wird und sich auf dieselbe Summe über die Teilchen reduziert.

Daher gilt

$$\frac{\mathrm{d}L_{ik}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad L_{ik} = \text{const.}$$

545. Der Gesamtdrehimpuls der Teilchen und des Feldes im Volumen ist

$$L_{\alpha\beta}(t) = \sum l_{\alpha\beta} - \frac{i}{c} \int\limits_t (x_\alpha T_{\beta\gamma} - x_\beta T_{\alpha\gamma})\, \mathrm{d}S_\gamma,$$

wobei $l_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ den Drehimpuls eines Teilchens bedeutet und über den Teil der Hyperebene $t = \text{const}$ integriert wird, dessen Projektion auf den dreidimensionalen Raum gleich V ist. Analog kann man $L_{\alpha\beta}(t + \mathrm{d}t)$ schreiben.

Wir betrachten den Drehimpuls, den das System in der Zeit $\mathrm{d}t$ verliert:

$$-\mathrm{d}L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}(t) - L_{\alpha\beta}(t + \mathrm{d}t) = -\sum \mathrm{d}l_{\alpha\beta} + \frac{i}{c} \int\limits_{t+\mathrm{d}t} \ldots - \frac{i}{c} \int\limits_t \ldots$$

Die Differenz der Integrale über die dicht benachbarten Hyperebenen kann in einer anderen Form geschrieben werden; es ist nämlich

$$\int\limits_t + \int\limits_{t+\mathrm{d}t} + \int\limits_{S_{\text{Seite}}} = \oint,$$

d.h. gleich dem Integral $\oint$ über die geschlossene zylinderförmige Hyperfläche (s. Abb. 80)[1], deren Erzeugende der Zeitachse parallel ist. Genauso wie in der vorigen Aufgabe kann man das Integral über die geschlossene Hyperfläche in den Ausdruck $-\sum \mathrm{d}l_{\alpha\beta}$ umformen und erhält

$$-\mathrm{d}L_{\alpha\beta} = \frac{i}{c} \int\limits_{S_{\text{Seite}}} (x_\alpha T_{\beta\gamma} - x_\beta T_{\alpha\gamma})\, \mathrm{d}S_\gamma.$$

---

[1]) Wir erinnern daran, daß eine solche Abbildung nur eine bedingt richtige Vorstellung von den wahren Verhältnissen vermitteln kann.

Die Elemente der Hyperfläche S_{Seite} sind offensichtlich normal zur t-Achse und können in der Form $dS_\gamma = i\,c\,dt\,n_\gamma\,df$ dargestellt werden, wobei df das gewöhnliche Flächenelement zum Volumen V und $\mathfrak{n}$ den Normaleneinheitsvektor von df bedeuten. Daraus ergibt sich ein Ausdruck für die Abnahme des Drehimpulses des Systems in der Zeiteinheit:

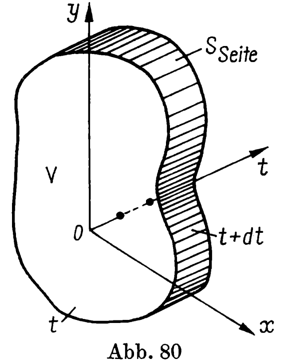


Abb. 80

$$-\frac{dL_{\alpha\beta}}{dt} = \int (-x_\alpha T_{\beta\gamma} + x_\beta T_{\alpha\gamma})\, n_\gamma\, df. \tag{1}$$

Wir führen den bezüglich der Indizes α und β antisymmetrischen Tensor

$$R_{\alpha\beta\gamma} = x_\beta T_{\alpha\gamma} - x_\alpha T_{\beta\gamma}$$

ein. Wie aus (1) folgt, muß er als Drehimpulsdichte interpretiert werden. Die Komponente $R_{\alpha\beta\gamma}$ ist gleich dem Anteil der $\alpha\beta$-Komponenten des Gesamtdrehimpulses $L_{\alpha\beta}$, der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zur x_γ-Achse fließt. Ähnlich wie man an Stelle von $L_{\alpha\beta}$ den Pseudovektor $\mathfrak{L}$ des Drehimpulses einführen kann, kann man auch einen Pseudovektor definieren, der zu $R_{\alpha\beta\gamma}\,n_\gamma$ äquivalent ist. Dann nimmt Gleichung (1) die Form

$$-\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \int \mathfrak{R}\, df, \tag{2}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{n}) - \frac{1}{4\pi}[(\mathfrak{r} \times \mathfrak{E})(\mathfrak{n}\,\mathfrak{E}) + (\mathfrak{r} \times \mathfrak{H})(\mathfrak{n}\,\mathfrak{H})] \tag{3}$$

an. Bei der Ableitung von (3) wurden die Gleichungen (10.29) für die Komponenten $T_{\alpha\beta}$ benutzt.

11. RELATIVISTISCHE MECHANIK

11.1. Energie und Impuls

546.

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2m\,c^2)}\,.$$

547.

$$\mathfrak{v} = \frac{c\,\mathfrak{p}}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}\,.$$

548. Man erhält

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$$

mit $E_0 = m\,c^2$.

Im nichtrelativistischen Fall wird $\beta \approx \sqrt{2\,T/E_0}$ und im extrem relativistischen Fall $\beta = 1 - {}^1/_2 (E_0/E)^2$.

549.

$$\text{a)}\;\; T = \frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \ldots;$$

$$\text{b)}\;\; T = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2} + \ldots$$

550. Es ergibt sich

$$v = \sqrt{\frac{2e\,V}{m} \frac{1 + \dfrac{e\,V}{2m\,c^2}}{\left(1 + \dfrac{e\,V}{m\,c^2}\right)^2}}\,.$$

Insbesondere gilt bei $e\,V \ll m\,c^2$

$$v = \sqrt{\frac{2e\,V}{m}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{e\,V}{m\,c^2}\right) \ll c$$

und bei $e\,V \gg m\,c^2$

$$v = c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m\,c^2}{e\,V}\right)^2\right] \approx c\,.$$

551.
a) $3{,}42 \cdot 10^{-2} c$;
b) $v = 0{,}9999985\,c$;
c) $0{,}81\,c$;
d) $0{,}9956\,c$.

552. Die Länge der n-ten Röhre ist

$$L_n = \frac{v_n}{2\nu} = \frac{c}{2\nu} \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{n V_e e + m c^2}\right)^2},$$

wobei v_n die Geschwindigkeit des Teilchens in der n-ten Röhre bedeutet. Am Anfang der Beschleunigung gilt $m c^2 \gg n e V_e$ und

$$L_n \approx \frac{1}{2\nu} \sqrt{\frac{2 e V_e}{m}} \sqrt{n}\,.$$

Im extrem relativistischen Grenzfall ist $T_n \gg m c^2$, $v \approx c$ und $L_n \approx c/2\nu$.

Die Abschätzung der Beschleunigerlänge ergibt

$$L = \sum_n L_n \approx \frac{c}{2\nu} \int_0^N \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{n V_e e + m c^2}\right)^2}\, dn =$$

$$= \frac{c}{2\nu e V_e} \left[\sqrt{(N e V_e + m c^2)^2 - m^2 c^4} - m c^2 \arccos \frac{m c^2}{N e V_e + m c^2}\right].$$

553. Das Verhältnis der Intensitäten ist

$$\frac{I_h}{I_0} = 2^{\frac{h}{v\tau}} \approx 2^{\frac{h}{\tau_0 c} \frac{m_\mu c^2}{E}} = 2\,.$$

Dabei ist $\tau = \tau_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ die Halbwertzeit eines μ-Mesons, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Gäbe es keine relativistische Transformation der Zeit, so erhielte man für das Verhältnis der Intensitäten (unter der Annahme, daß die Mesonen die Geschwindigkeit c haben)

$$\frac{I_h'}{I_0'} \approx 2^{\frac{h}{\tau_0 c}} = 2^5 = 32\,.$$

Experimentell wird das erste Ergebnis bestätigt ($I_h/I_0 = 2$); das ist ein direkter experimenteller Beweis für die Existenz des relativistischen Effektes der Verlangsamung des Ganges bewegter Uhren.

554. Man erhält

$$\tan \vartheta = \frac{1}{\gamma} \frac{p' \sin \vartheta'}{p' \cos \vartheta' + V \dfrac{E'}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \dfrac{V}{v'}}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \qquad E = \gamma (E' + p' V \cos \vartheta'),$$

wobei p und p' die Impulse des Teilchens im System S bzw. S' bedeuten.

Man kann die in der Aufgabenstellung angegebene Näherungsformel für den extrem relativistischen Fall benutzen, wenn

$$\cos\frac{\vartheta'}{2} \gg \sqrt{\left|1 - \frac{V}{v'}\right|}$$

gilt, wobei $v' = p'c^2/E'$ die Geschwindigkeit des Teilchens im System S' bedeutet. Die Energie hat im extrem relativistischen Fall die Form

$$E \approx p\,c \approx 2\gamma E' \cos^2\frac{\vartheta'}{2}.$$

555. Wir betrachten die $\mathrm{d}N$ Teilchen, die sich im System S' innerhalb des Raumwinkels $\mathrm{d}\Omega'$ bewegen. Im System S befinden sich diese Teilchen innerhalb des Raumwinkels $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\alpha$, der durch die Geschwindigkeitsvektoren der Teilchen im S-System gebildet wird. Die Winkelverteilung der Teilchen im S-System wird durch die Funktion $F(\vartheta, \alpha)$ beschrieben, die durch die Gleichung

$$F(\vartheta, \alpha)\,\mathrm{d}\Omega = F'(\vartheta', \alpha')\,\mathrm{d}\Omega' = \mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}N}{N} \tag{1}$$

bestimmt wird. Der Winkel ϑ' wird mit Hilfe der Gleichung

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{1+\tan^2\vartheta} = \frac{\left(\cos\vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2}{\left(\cos\vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\vartheta'}$$

durch ϑ ausgedrückt; diese Beziehung ergibt sich aus der Lösung der Aufgabe 554 ($v' = p'c^2/E'$ ist die Geschwindigkeit der Teilchen im S'-System). Berücksichtigt man $\alpha = \alpha'$, so erhält man schließlich

$$F(\vartheta, \alpha) = F'[\vartheta'(\vartheta), \alpha]\,\frac{\gamma^2\left[\left(\cos\vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\vartheta'\right]^{3/2}}{1 + \frac{V}{v'}\cos\vartheta'}. \tag{2}$$

Im Falle extrem relativistischer Teilchen gilt $v' = c$, und die Winkelverteilung im System S vereinfacht sich zu

$$F(\vartheta, \alpha) = F'[\vartheta'(\vartheta), \alpha]\,\frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta\right)^2} \tag{3}$$

(s. Aufgabe 509).

Wir weisen darauf hin, daß Teilchen, die sich im System S unter verschiedenen Winkeln ϑ bewegen, verschiedene Energien besitzen, obwohl sie im System S' gleiche Energien haben.

556. Es ergibt sich

$$\mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi\,\gamma^2(1-\beta\cos\vartheta)^2}, \qquad \int\limits_{4\pi} \mathrm{d}W = 1$$

mit $\beta = v/c$.

557. Man erhält

$$f = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

und daraus

$$E = m\,c^2\,\frac{f+1}{2\sqrt{f}},$$

wobei m die Masse des π^0-Mesons bezeichnet.

558. Da der Impuls eines Photons $p = E/c$ ist, gilt

$$E = \frac{E'}{\gamma(1-\beta\cos\vartheta)}, \quad E' = \frac{m\,c^2}{2}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

(s. Aufgabe 554). Vergleicht man den daraus folgenden Ausdruck

$$\mathrm{d}E = -\frac{E'\,\mathrm{d}(1-\beta\cos\vartheta)}{\gamma(1-\beta\cos\vartheta)^2}$$

mit der bei der Lösung der Aufgabe 556 erhaltenen Winkelverteilung der beim Zerfall entstehenden γ-Quanten, so erhält man folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Energien der Zerfallsphotonen:

$$\mathrm{d}W(E) = \frac{|\mathrm{d}E|}{E_{\max} - E_{\min}}.$$

Dabei bedeuten $E_{\min} = E'\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$ die minimale Energie eines Zerfalls-γ-Quants (bei $\vartheta = \pi$) und $E_{\max} = E'\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$ die maximale Energie (bei $\vartheta = 0$). Daraus folgt, daß das Spektrum der Zerfalls-γ-Quanten im Laborsystem Rechteckform besitzt, d.h. beliebige Energiewerte im Intervall von $E_{\min}$ bis $E_{\max}$ gleichwahrscheinlich sind.

559.

$$m = \frac{2\sqrt{E_1 E_2}}{c^2}.$$

560.

$$v = \frac{c\sqrt{E^2 - m_1^2 c^4}}{E + m_2\,c^2}.$$

561. Auf Grund des Viererimpulserhaltungssatzes ist

$$p_{1i}^{(0)} + p_{2i}^{(0)} = p_{1i} + p_{2i}. \tag{1}$$

Um den Streuwinkel des ersten Teilchens bestimmen zu können, bringen wir p_{1i} auf die linke Seite und quadrieren die erhaltene Gleichung:

$$p_{1i}^{(0)2} + p_{2i}^{(0)2} + p_{1i}^2 + 2p_{1i}^{(0)} p_{2i}^{(0)} - 2p_{1i}^{(0)} p_{1i} - 2p_{2i}^{(0)} p_{1i} = p_{2i}^2. \qquad (2)$$

Gemäß (11.7) ist

$$p_{1i}^{(0)2} = p_{1i}^2 = -m_1^2 c^2, \qquad p_{2i}^{(0)2} = p_{2i}^2 = -m_2^2 c^2.$$

Für die Skalarprodukte gilt ($\mathfrak{p}_2^{(0)} = 0$):

$$p_{1i}^{(0)} p_{2i}^{(0)} = \mathfrak{p}_1^{(0)} \mathfrak{p}_2^{(0)} - \frac{1}{c^2} E_1^{(0)} E_2^{(0)} = -E_0 m_2, \qquad p_{2i}^{(0)} p_{1i} = -m_2 E_1,$$

$$p_{1i}^{(0)} p_{1i} = \mathfrak{p}_1^{(0)} \mathfrak{p}_1 - \frac{1}{c^2} E_1^{(0)} E_1 = p_0 p_1 \cos\vartheta_1 - \frac{E_0 E_1}{c^2},$$

wobei $p_0 = \sqrt{E_0^2 - m_1^2 c^4}/c^2$ ist. Setzt man dies in (2) ein, so ergibt sich

$$\cos\vartheta_1 = \frac{E_1(E_0 + m_2 c^2) - E_0 m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{c^2 p_0 p_1}.$$

Analog folgt

$$\cos\vartheta_2 = \frac{(E_0 + m_2 c^2)(E_2 - m_2 c^2)}{c^2 p_0 p_2}.$$

562. Man erhält

$$E_1 = m_1 c^2 \frac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(1 + \gamma_0 \frac{m_2}{m_1}\right) \pm \cos\vartheta_1 (\gamma_0^2 - 1) \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \sin^2\vartheta_1}}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - (\gamma_0^2 - 1)\cos^2\vartheta_1}, \qquad (1)$$

$$E_2 = \frac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 + (\gamma_0^2 - 1)\cos^2\vartheta_2}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - (\gamma_0^2 - 1)\cos^2\vartheta_2} m_2 c^2 \qquad (2)$$

mit $\gamma_0 = E_0/m_1 c^2$.

Aus diesen Formeln folgt, daß bei $m_1 > m_2$ nur Streuung um einen Winkel $\vartheta_1 \leqq \arcsin\sqrt{m_2/m_1}$ möglich ist [der Radikand in (1) muß positiv sein]. Dabei entsprechen jedem Winkel ϑ_1 zwei Energien E_1.

Bei $m_1 = m_2$ ist der Streuwinkel $\vartheta_1 \leqq \pi/2$, und zu jedem Wert von ϑ_1 gehört nur eine Energie, die dem positiven Vorzeichen in (1) entspricht. Dem negativen Vorzeichen würde unabhängig vom Streuwinkel die Energie $E_1 = m_1 c^2$ entsprechen, was offenbar in Wirklichkeit nicht zutreffen kann. Aus einem ähnlichen Grund wurde im Zähler der Formel (2) für E_2 nur das positive Vorzeichen geschrieben.

Bei $m_1 < m_2$ ist eine Streuung um einen beliebigen Winkel möglich, und jedem Wert von ϑ_1 entspricht eindeutig eine Energie E_1. In (1) ist für $0 < \vartheta_1 < \pi/2$ das positive und für $\pi/2 < \vartheta_1 < \pi$ das negative Vorzeichen zu

nehmen. Bei dieser Wahl der Vorzeichen entspricht der Streuung des ankommenden Teilchens um den größeren Winkel der größere Energieverlust, wie es der Fall sein muß.

563.

$$T_1 = \frac{T_0 \cos^2 \vartheta_1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{T_0}{m c^2}\right) \sin^2 \vartheta_1}.$$

564. Man erhält

$$T_1 = T_0 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 2 \sin^2 \vartheta_1 \pm 2 \cos \vartheta_1 \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2 \vartheta_1}\,\right],$$

$$T_2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_0 \cos^2 \vartheta_2 .$$

Die Regel für die Vorzeichenwahl wurde in der Aufgabe 562 formuliert.

565. Der Winkel $\chi = \vartheta_1 + \vartheta_2$, unter dem die Teilchen auseinanderfliegen, ergibt sich aus der Gleichung

$$\tan \chi = \frac{(v_1' + v_2') \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \vartheta'}{\frac{V^2}{c^2} v_1' \sin^2 \vartheta' + (V - v_1')(1 - \cos \vartheta')}$$

(s. Aufgabe 505).

Bei $m_1 = m_2$ gilt $v_1' = v_2' = V$ und

$$\tan \chi = \frac{2 c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V^2 \sin \vartheta'}.$$

In diesem Fall ist $\chi < 90°$. Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt $\chi \to 90°$.

566. Geht man analog wie bei der Lösung der Aufgabe 561 vor, so erhält man

$$\omega = \frac{\omega_0 \left(\frac{E_0}{c} - p_0 \cos \vartheta_0\right)}{\frac{E_0}{c} - p_0 \cos \vartheta_1 + \frac{\hbar \omega_0}{c}(1 - \cos \vartheta)}.$$

Dabei bedeuten ϑ den Winkel zwischen den Geschwindigkeiten des primären und des gestreuten Photons und ϑ_1 den Winkel zwischen den Richtungen des Elektrons vor der Streuung und des Photons nach der Streuung.

Ruht das Elektron vor dem Stoß, so wird

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar \omega_0}{m c^2}(1 - \cos \vartheta)}.$$

567. Die Anzahlen der gestreuten bzw. streuenden Teilchen je Volumeneinheit seien n_1 und n_2. Wir betrachten den Streuprozeß im System S. Die Gesamtzahl $\mathrm{d}N$ der Teilchen, die in der Zeit t durch die im Volumen V enthaltenen streuenden Teilchen in das Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ hineingestreut werden, ist auf Grund der Definition des Wirkungsquerschnitts durch die Formel $\mathrm{d}N = \mathrm{d}\sigma_{12} J_{12}\, n_2\, V\, t$ gegeben, wobei $J_{12} = n_1 v_1$ ist. Im S'-System kann man dieselbe Teilchenzahl $\mathrm{d}N$ in der Form $\mathrm{d}N = \mathrm{d}\sigma'_{12} J'_{12}\, n'_2\, V' t'$ schreiben, wobei $J'_{12} = n'_1 |\mathfrak{v}'_1 - \mathfrak{v}'_2|$ ist (in diesem System bedeutet $\mathrm{d}N$ die Zahl der Teilchen, die in den $\mathrm{d}\Omega$ entsprechenden Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega'$ gestreut werden). Es gilt also

$$\mathrm{d}\sigma_{12}\, n_1\, n_2\, v_1\, V\, t = \mathrm{d}\sigma'_{12}\, n'_1\, n'_2\, |\mathfrak{v}'_1 - \mathfrak{v}'_2|\, V' t'. \tag{1}$$

Wegen $n_i = \mathrm{inv}/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$ bilden die vier Größen $(n_i\, \mathfrak{v}_i,\, i\, n_i\, c)$ einen Vierervektor (er ist der Vierergeschwindigkeit des Teilchens proportional). Daraus folgt

$$n_1\, n_2 = n'_1\, n'_2 \left(1 - \frac{\mathfrak{v}'_1\, \mathfrak{v}'_2}{c^2}\right), \tag{2}$$

da das Skalarprodukt zweier Vierervektoren invariant ist. Berücksichtigt man (2) und die Invarianz des Vierervolumens ($V\,t = V' t'$), so erhält man schließlich

$$\mathrm{d}\sigma'_{12} = \mathrm{d}\sigma_{12} \frac{v_1 \left(1 - \dfrac{\mathfrak{v}'_1\, \mathfrak{v}'_2}{c^2}\right)}{|\mathfrak{v}'_1 - \mathfrak{v}'_2|}. \tag{3}$$

Im Spezialfall $\mathfrak{v}'_1 \,||\, \mathfrak{v}'_2$ wird

$$v_1 = \frac{\mathfrak{v}'_1 - \mathfrak{v}'_2}{1 - \dfrac{\mathfrak{v}'_1\, \mathfrak{v}'_2}{c^2}}$$

(s. Aufgabe 493), und aus (3) ergibt sich, daß der Wirkungsquerschnitt invariant ist:

$$\mathrm{d}\sigma_{12} = \mathrm{d}\sigma'_{12}. \tag{4}$$

Dieser Fall liegt z.B. bei der Transformation vom Labor- in das Massenmittelpunktsystem vor. Wir weisen noch auf folgendes hin: Wird der Strom durch $J_{12} = n_1 \tilde{v}$ definiert, wobei $\tilde{v} = v_1 (1 - \mathfrak{v}'_1\, \mathfrak{v}'_2/c^2)$ ist, so ist der Wirkungsquerschnitt gegenüber einer beliebigen LORENTZ-Transformation invariant (s. [2], § 28.3).

568.

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^2}\left[\sqrt{(p_1^2 + m_1^2 c^2)(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p_1\, p_2 \cos\vartheta\right].$$

569.

$$m_1^2 = m^2 + m_2^2 - \frac{2}{c^2}\left[\sqrt{(p^2 + m^2 c^2)(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p\, p_2 \cos\vartheta_2\right].$$

570.

$$m^2 = \frac{1}{c^2}(E^2 - c^2 p^2) = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2 m_1 m_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$V = \frac{p c^2}{E} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

571. Den Teilen 1 und 2 werden die kinetischen Energien

$$T_1 = E_1 - m_1 c^2 = (m_0 - m_1 - m_2)(m_0 - m_1 + m_2)\frac{c^2}{2m_0},$$

$$T_2 = E_2 - m_2 c^2 = (m_0 - m_1 - m_2)(m_0 + m_1 - m_2)\frac{c^2}{2m_0}$$

übertragen, wobei $T_1 + T_2 = \Delta E$ ist. Aus diesen Ausdrücken folgt, daß der größere Teil der Energie auf das leichtere Teilchenfragment entfällt.

572. Man erhält

a) $T_\alpha/T_K = 58{,}5$, wobei T_α und T_K die kinetischen Energien des α-Teilchens bzw. des Rückstoßkerns (Tochterkerns) bedeuten,

b) $T_\nu/T_\mu = 7{,}27$, wobei T_ν und T_μ die kinetischen Energien des Neutrinos bzw. des μ-Mesons bedeuten,

c) $T_\gamma/T_K = 2mc^2/\Delta E$, da $mc^2 \gg \Delta E$ und die Ruhmasse des Photons gleich Null ist (T_γ bedeutet die Energie des γ-Quants und m die Masse des zerfallenden Kerns).

573.

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}\left(1 - \frac{\Delta E}{2mc^2}\right).$$

574. Wir betrachten den Energie-Impuls-Vierervektor p_i des Teilchensystems. Er bleibt erhalten, d.h., die entsprechenden Komponenten vor und nach der Reaktion sind einander gleich. Bei der kinetischen Energie T_0, die der Reaktionsschwelle entspricht, befinden sich die entstehenden Teilchen im Massenmittelpunktsystem in Ruhe (im Laborsystem können die Teilchen beim Schwellenwert T_0 nicht ruhen, da das eine Verletzung des Impulssatzes bedeuten würde). Der Gesamtimpulsvierervektor des Systems hat vor der Reaktion im Laborsystem die Form

$$p_i^{(0)} = \left(\mathfrak{p}_0,\, i\frac{E_0}{c} + i m_1 c\right),$$

wobei E_0 die Gesamtenergie und $\mathfrak{p}_0$ den Gesamtimpuls an der Schwelle bedeuten.

Nach der Reaktion ist der Viererimpuls im Massenmittelpunktsystem $p_i' = (0, iMc)$. Wegen der Invarianz des Quadrates eines Vierervektors und des Viererimpulserhaltungssatzes gilt $p_i^{(0)2} = p_i'^2$. Diese Gleichung schreiben wir in der Form

$$-M^2 c^2 = p_0^2 - \frac{E_0}{c^2} - 2m_1 E - m_1^2 c^2.$$

Daraus folgt

$$T_0 = \frac{c^2}{2m_1}(M - m_1 - m)(M + m_1 + m).$$

575. Man erhält

a) $T_0 = 288$ MeV;

b) $T_0 = 160$ MeV;

c) $T_0 = 763$ MeV;

d) $T_0 = \frac{2m_p(m + 2m_p)c^2}{m}$,

wobei m_p die Masse des Protons bedeutet.

Im Spezialfall des Stoßes mit einem Proton ($m = m_p$) wird $T_0 = 6m_p c^2 = 5{,}63$ GeV.

Die Näherungsformel für die Schwellenenergie lautet

$$T_0 = \frac{2(A + 2)}{A} m_p c^2.$$

Für große A folgt daraus $T_0 \approx 2m_p c^2$.

576. Man erhält

$$T_0 \approx \left(1 + \frac{m}{M}\right)\Delta E.$$

Im Fall **a)** erhält man nach dieser Näherungsformel $\Delta E \approx T_0 \approx 2{,}18$ MeV ($m = 0$). Nach der exakten Formel (s. Aufgabe 574) erhält man einen um $|Q|^2/2Mc^2 \approx 0{,}0012$ MeV größeren Wert, wobei $Q = -(M - m_1 - m)c^2$ die Wärmetönung der Reaktion ist.

Im Fall **b)** ergibt die Näherungsformel $T_0 \approx 2|Q| \approx 7{,}96$ MeV. Der Unterschied zum Wert der exakten Formel beträgt 0,003 MeV.

577. Die Reaktionsgleichung ist

$$\gamma + (\text{Teilchen}) \to e^+ + e^- + (\text{Teilchen}).$$

Man kann die Schwelle nach der allgemeinen Formel (s. Aufgabe 574)

$$T_0 = \hbar\omega_0 = \frac{c^2}{2m_1}(m_1 + 2m - m_1)(m_1 + 2m + m_1) = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{m_1}\right)$$

bestimmen. Dabei bedeutet m die Masse des Elektrons (oder Positrons).

Ist kein Teilchen vorhanden, so gilt $m_1 \to 0$ und für die Schwellenenergie $T_0 \to \infty$, d.h., die Reaktion ist nicht möglich. Dasselbe Ergebnis erhält man auch, indem man zeigt, daß die Gleichung $k_i = p_{+i} + p_{-i}$, wobei k_i, p_{+i}, p_{-i} die Viererimpulse von Photon, Positron und Elektron bedeuten, nicht erfüllt werden kann.

580. Wenn ein Teilchen, das sich mit dem Viererimpuls p_{0i} bewegt, im Medium ein Photon mit dem Viererimpuls $k_i = (\hbar\,\omega\,n/c,\, i\,\hbar\,\omega/c)$ emittiert, so können Energie- und Impulssatz durch die Vierergleichung

$$p_{0i} = p_i + k_i$$

ausgedrückt werden, wobei p_i den Viererimpuls des Teilchens nach der Emission des Photons bedeutet. Bringt man k_i nach links und bildet auf beiden Seiten das Quadrat, so erhält man nach elementaren Umformungen

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta}\left[1 + \frac{\pi\Lambda}{n\lambda}(n^2-1)\sqrt{1-\beta^2}\right]. \qquad (1)$$

Dabei bedeuten $\Lambda = \hbar/m\,c$ die COMPTON-Wellenlänge des Teilchens, $\lambda = 2\pi c/\omega\,n$ die Wellenlänge des Photons und $\beta = v/c$. Der zweite Term, der die Quantenkorrektionen enthält (Λ ist proportional zu $\hbar$) und größenordnungsmäßig gleich Λ/λ ist, ist gewöhnlich sehr klein. Vernachlässigt man ihn, so reduziert sich der Ausdruck (1) auf die klassische Bedingung der TSCHERENKOW-Strahlung,

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta}.$$

582. Wir bezeichnen mit p_{0i} und p_i die Viererimpulse des Teilchens vor bzw. nach der Emission und mit k_i den „Viererimpuls" des Photons und schreiben den Energie- und Impulssatz in der Form

$$p_{0i} - k_i = p_i.$$

Quadriert man beide Seiten dieser Gleichung und vernachlässigt den Term mit $\hbar^2$, so erhält man

$$(m^2 - m_0^2)\,c^2 - 2\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{k} + \frac{2E_0\,k}{c} = 0,$$

wobei m_0 die Masse des angeregten Teilchens und m die Masse des Teilchens im Grundzustand bedeuten.

Mit Hilfe der Umformung

$$c^2(m_0^2 - m^2) = c^2(m_0 - m)(m_0 + m) \approx 2\hbar\,\omega_0\,m$$

ergibt sich

$$n(\omega)\,\beta\cos\vartheta = 1 - \frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (1)$$

wobei $\beta = v/c$ ist. Für $\omega_0 \to 0$ geht (1) in die Bedingung

$$n(\omega)\,\beta\cos\vartheta = 1$$

für die Entstehung der TSCHERENKOW-Strahlung über. Die TSCHERENKOW-Strahlung ist also nicht mit einer Änderung des inneren Zustandes des Teilchens verbunden.

Für $\omega_0 \neq 0$ schreiben wir (1) in der Form

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}}{1 - n(\omega)\,\beta\cos\vartheta}. \tag{2}$$

Gleichung (2) beschreibt den DOPPLER-Effekt in einem brechenden Medium (s. Aufgabe 516). Sie gilt für $n(\omega)\,\beta\cos\vartheta < 1$ und unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung für den DOPPLER-Effekt im Vakuum nur durch die Größe $n(\omega)$ im Nenner. Bei $\beta \ll 1$ entstehen keine qualitativ neuen Erscheinungen; bei $\beta \approx 1$ und bei Vorhandensein einer Dispersion im Medium wird die Erscheinung jedoch komplizierter.

Im allgemeinen ist (2) eine nichtlineare Gleichung in ω (n ist eine Funktion von ω!) und kann mehrere Lösungen besitzen. Dabei werden an Stelle einer verschobenen Linie beim gewöhnlichen DOPPLER-Effekt im Laborsystem mehrere Linien beobachtet (zusammengesetzter DOPPLER-Effekt).

583. Geht man analog vor wie bei der Lösung der Aufgabe 582, so erhält man folgende Ergebnisse:

Eine Strahlung der Frequenz ω, die von einer Anregung des Teilchens begleitet wird, kann entstehen, wenn die Geschwindigkeit $v = \beta c$ des Teilchens größer als der Schwellenwert $c/n(\omega)\cos\vartheta$ wird (ϑ ist der Winkel zwischen der Geschwindigkeit des Teilchens und dem Impuls des Photons). Die dazu erforderliche Energie wird der kinetischen Energie des Teilchens entzogen. Eine Strahlung dieses Typs wird bei festem ω nur in einem bestimmten Intervall spitzer Winkel ϑ innerhalb des TSCHERENKOW-Kegels beobachtet, dessen Oberfläche durch die Gleichung $n\beta\cos\vartheta = 1$ bestimmt ist. Die beobachtbare Frequenz ω ist mit dem Winkel ϑ und den Größen β, $n(\omega)$ durch die Beziehung

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{n(\omega)\,\beta\cos\vartheta - 1} \qquad [n(\omega)\,\beta\cos\vartheta > 1]$$

verknüpft, die wie im Falle der Aufgabe 582 eine Bestimmungsgleichung für ω darstellt, die im allgemeinen mehrere Lösungen hat (zusammengesetzter DOPPLERscher Überlichteffekt).

584.

$$F = \frac{I}{c\,e}\sqrt{T(T+2mc^2)}, \qquad W = \frac{I}{e}T.$$

585. Es ergibt sich

$$p = \frac{2m\,v^2 N}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}.$$

Der Druck ist im Ruhsystem des Körpers und im Ruhsystem des Gases gleich groß. Dies kann man entweder durch direkte Berechnung des Druckes in beiden Systemen oder durch die Anwendung einer LORENTZ-Transformation für die Viererkraft [s. (11.14)] zeigen.

11.2. Bewegung geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld

586. Man erhält

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}+\frac{m\,v\,\mathfrak{v}}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}=\mathfrak{F};$$

a) $$\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\mathfrak{F} \quad \text{für} \quad \mathfrak{v}\,||\,\mathfrak{F};$$

b) $$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\mathfrak{F} \quad \text{für} \quad \mathfrak{v}\perp\mathfrak{F};$$

c) $$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\mathfrak{F}.$$

Die Größen $m/\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}$ und $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ bezeichnet man manchmal als longitudinale bzw. transversale Masse.

587. Es ergibt sich

$$\mathfrak{F}=\frac{1}{\gamma}\mathfrak{F}'+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{F}')\,\mathfrak{v}}{v^2},$$

$$\mathfrak{F}'=\gamma\,\mathfrak{F}-(\gamma-1)\frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{v}}{v^2}$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

588.

$$F=\gamma^2\frac{m\,v^2}{R}.$$

590. Es ergibt sich

$$\psi(\alpha)=-\frac{2\varkappa(1-\beta^2)}{\sqrt{(1-\beta^2)\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}\ln r,$$

wobei $\beta = v/c$ ist und r den Abstand zwischen Aufpunkt und Leiter bedeutet.

591. Man erhält

$$F=\frac{2e\varkappa}{\gamma\,r}.$$

Man kann die Aufgabe auf verschiedenen Wegen lösen:

a) durch unmittelbare Berechnung der elektromagnetischen Kraft, die seitens einer linearen Ladung und eines Stromes an einer bewegten Punktladung angreift (man muß die LORENTZ-Kontraktion berücksichtigen!),

b) durch Bestimmung der Kraft im magnetfeldfreien Bezugssystem und Anwendung der Transformationsgleichungen für die Viererkraft und

c) durch Benutzung des Konvektionspotentials ψ, das in der Aufgabe 590 berechnet wurde, und Anwendung der Beziehung $\mathfrak{F} = -e\,\mathrm{grad}\,\psi$.

592. Man erhält
$$F = e\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{2I_r}{v\,r}.$$
Dabei bedeuten r den Abstand zwischen Elektron und Strahlachse,
$$I_r = \frac{2\pi v}{\sqrt{1-\beta^2}} \int\limits_0^r \varrho(r)\, r\, \mathrm{d}r$$
den Strom durch einen Kreis mit dem Radius r und
$$v = \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{eV}{2mc^2}\right)\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$
die Geschwindigkeit der Elektronen (s. Aufgabe 591).

An einem Oberflächenelektron greift die Kraft
$$F = e\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{2I}{v\,a}$$
an, wobei a den Radius des Strahls bedeutet.

593. Die Beschleunigung eines äußeren Elektrons ist senkrecht zur Bündelachse und zur Geschwindigkeit des Elektrons gerichtet, so daß im Laborsystem
$$\dot{v}_n = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{m} F = \frac{2eI}{m\,a\,v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$
gilt (s. die Lösungen der Aufgaben 586 und 592).

Die Verbreiterung des Bündels ergibt sich zu
$$\Delta a = \frac{\dot{v}_n t^2}{2} = \frac{\dot{v}_n L^2}{2v^2}.$$
Wegen $\Delta a \ll L$ ist $\dot{v}_n L/v \ll v$ oder $\dot{v}_n t \ll v < c$. Die Anwendung der nichtrelativistischen Formel zur Berechnung von Δa ist also gerechtfertigt.

Man erhält denselben Wert von Δa, wenn man die Verbreiterung des Bündels in dem Bezugssystem betrachtet, das sich mit den Elektronen des Bündels bewegt; in diesem System greift an den Elektronen nur eine elektrische Kraft an.

594. Wir wählen die x-Achse parallel zu $e\mathfrak{E}$. Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung in vierdimensionaler Form
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{|e|E}{mc}\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\tau^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2(ct)}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{|e|E}{mc}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}.$$
Integriert man dieses Gleichungssystem mit den Anfangsbedingungen
$$x = y = z = ct = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{0x}}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{0y}}{m},$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = 0, \quad c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{E_0}{mc} \quad \text{für} \quad \tau = 0,$$

wobei $E_0 = \sqrt{c^2 p_0^2 + m^2 c^4}$ ist, so erhält man die Bahngleichungen des Teilchens im vierdimensionalen Raum:

$$x = \frac{E_0}{|e|E}\left(\cosh\frac{|e|E\tau}{mc} - 1\right) + \frac{c\,p_{0x}}{|e|E}\sinh\frac{|e|E\tau}{mc},$$

$$y = \frac{p_{0y}\tau}{m}, \quad z = 0,$$

$$c\,t = \frac{E_0}{|e|E}\sinh\frac{|e|E\tau}{mc} + \frac{c\,p_{0x}}{|e|E}\left(\cosh\frac{|e|E\tau}{mc} - 1\right).$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\tau = \frac{mc}{|e|E}\ln\frac{p_{0x} + |e|Et + \sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \frac{E_0}{c}}.$$

Benutzt man diese Beziehung und eliminiert sinh und cosh aus der ersten und letzten Gleichung, so erhält man das Bewegungsgesetz in dreidimensionaler Form:

$$x(t) = \frac{c}{|e|E}\left[\sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2} - \frac{E_0}{c}\right],$$

$$y(t) = \frac{c\,p_{0y}}{|e|E}\ln\frac{p_{0x} + |e|Et + \sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \frac{E_0}{c}},$$

$$z(t) = 0.$$

Für $p_0 \ll mc$ und $t \ll mc/|e|E$ ist die Bewegung nichtrelativistisch. Die Ausdrücke für x, y und z gehen dabei in die üblichen nichtrelativistischen Formeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung über:

$$x(t) = \frac{p_{0x}}{m}t + \frac{|e|E}{2m}t^2,$$

$$y(t) = \frac{p_{0y}}{m}t.$$

Nach einer hinreichend langen Zeit nach dem Beginn der Bewegung ($t \gg mc/|e|E$) wird die Geschwindigkeit des Teilchens nahezu gleich c (selbst wenn sie zu Beginn der Bewegung klein war). Dabei wird

$$x(t) = c\,t - \frac{mc^2}{|e|E},$$

$$y(t) = \frac{c\,p_{0y}}{|e|E}\ln\frac{2|e|Et}{mc},$$

und die Bewegung wird gleichförmig. Der Verlauf von $x(t)$ und $y(t)$ ist in Abb. 81a bzw. 81b dargestellt. Die Bewegung, die sich bei $p_{0y} = 0$ ergibt (Abb. 81a), bezeichnet man als hyperbolische Bewegung.

595. Die Teilchenbahn wird durch die Gleichung

$$x = \frac{E_0}{|e|E}\left(\cosh \frac{|e|E}{c\,p_{0y}}\,y - 1\right) + \frac{c\,p_{0x}}{|e|E}\sinh \frac{|e|E}{c\,p_{0y}}\,y$$

bestimmt.

Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt $E_0 = m c^2$, $p_0 \ll m c$ und $|e|E y/c\,p_{0y} \ll 1$. Die letzte Beziehung ergibt sich daraus, daß der vom Teilchen aufgenommene Impuls $|e|E\tau$ im nichtrelativistischen Fall klein gegen $m c$ sein muß. Es ist dann

$$x = \frac{m|e|E\,y^2}{2p_{0y}^2} + \frac{p_{0x}}{p_{0y}}\,y.$$

596.

$$l = \frac{E - m c^2}{e|\mathfrak{E}|}.$$

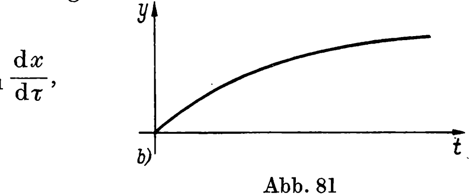
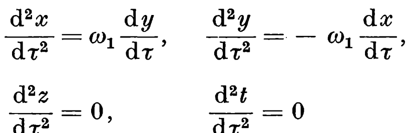


Abb. 81

597. Wir wählen die z-Achse parallel zu $\mathfrak{H}$ und gehen von den Bewegungsgleichungen in vierdimensionaler Form[1])



$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \omega_1 \frac{dy}{d\tau}, \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\,\omega_1 \frac{dx}{d\tau},$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

aus, wobei $\omega_1 = eH/m c$ ist.

Die ersten beiden dieser Gleichungen schreibt man am besten in der Form

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + i\,\omega_1 \frac{du}{d\tau} = 0$$

mit $u = x + i\,y$. Aus der letzten Gleichung erhält man

$$c\,t = \frac{E_0}{m\,c}\,\tau, \qquad E_0 = c\sqrt{p_0^2 + m^2 c^2}, \qquad E = m c^2 \frac{dt}{d\tau} = E_0.$$

Die Energie des Teilchens hängt nicht von der Zeit ab, da die Kräfte des Magnetfeldes keine Arbeit leisten. Wenn man die Gleichungen für u und z integriert, Real- und Imaginärteil von u trennt und die Eigenzeit τ durch t

[1]) Man kann auch von der dreidimensionalen Gleichung $d\mathfrak{p}/dt = e\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}/c$ ausgehen, in diese $\mathfrak{p} = E\,\mathfrak{v}/c^2$ einsetzen und $E = \text{const}$ benutzen (das Magnetfeld leistet keine Arbeit am Teilchen).

ausdrückt, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= R_1 \cos(\omega_2 t + \alpha) + \frac{c\, p_{0y}}{eH} + x_0, \\ y &= -\, R_1 \sin(\omega_2 t + \alpha) - \frac{c\, p_{0x}}{eH} + y_0, \\ z &= v_{0z}\, t. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Aus (1) folgt, daß sich das Teilchen im Magnetfeld auf einer Schraubenlinie bewegt, die auf die Kraftlinien des Magnetfeldes aufgewickelt ist. Der Radius dieser Linie ist $R = |R_1|$ mit $R_1 = p_{0\perp}\, c/eH$, $p_{0\perp} = \sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}$. Die Umlaufsfrequenz ist $\omega = |\omega_2|$, wobei $\omega_2 = eH\, c/E$ ist (das Vorzeichen der Ladung kann negativ sein). Die Ganghöhe der Schraubenlinie ist

$$\frac{2\pi |v_{0z}|}{\omega} = \frac{2\pi E\, |v_{0z}|}{|e| H\, c},$$

wobei $v_{0z} = p_{0z}\, c^2/E$ ist.

Es gilt offenbar $R = v_{0\perp}/\omega$, wobei $v_{0\perp} = p_{0\perp}\, c^2/E$ die zum Feld senkrechte Komponente der Teilchengeschwindigkeit ist. Bei kleiner Geschwindigkeit des Teilchens gilt $E = m\, c^2$ und

$$R = \frac{m\, c\, v_{0\perp}}{|e| H}, \qquad \omega = \frac{|e| H}{m\, c}.$$

Der Winkel α wird durch die Gleichungen

$$\sin\alpha = -\frac{p_{0x}}{p_{0\perp}}, \qquad \cos\alpha = -\frac{p_{0y}}{p_{0\perp}}$$

bestimmt.

598. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin\omega t + \frac{cE_y}{H}\, t, \\ y &= a(\cos\omega t - 1), \\ z &= \frac{eE_z}{2m}\, t^2 + v_{0z}\, t \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

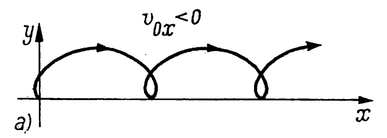
mit

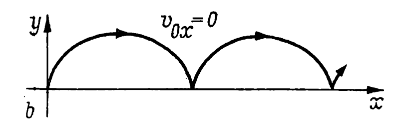
$$a = \frac{v_{0x} - \dfrac{cE_y}{H}}{\omega}.$$

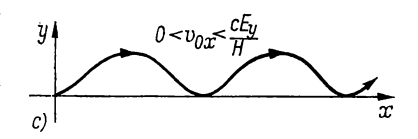
In Richtung der z-Achse erfolgt unter dem Einfluß der z-Komponente des elektrischen Feldes eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Bewegung in der $x\,y$-Ebene ist eine Rotation der Ladung im homogenen Magnetfeld auf einem Kreis mit dem Radius a, dessen Mittelpunkt sich gleichförmig in der zur $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$-Ebene senkrechten Richtung bewegt („driftet"). Die Driftgeschwindigkeit ist

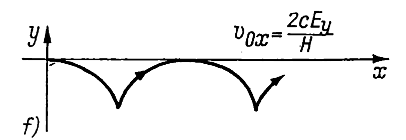
$$v_{\mathrm{dr}} = \frac{cE_y}{H}.$$

Die möglichen Projektionen der Teilchenbahnen auf eine Ebene sind in Abb. 82 dargestellt. Die Bahnen a, c, e, g sind Trochoiden allgemeiner Form, die Bahnen b, f Zykloiden. Die Bewegung ist nichtrelativistisch bei $v_0 \ll c$, $E_y/H \ll 1$, wenn die Zeit t nicht zu groß ist:









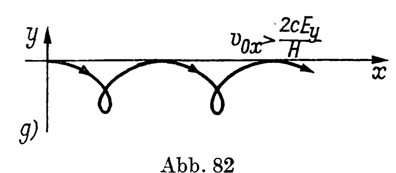


Abb. 82

$$t \ll \frac{m\,c}{e E_z} = \frac{H}{\omega E_z}.$$

599. Man erhält

$$x = \frac{p_{0x} c}{eH} \sin \varkappa H \tau + \frac{p_{0y}\, c}{eH} (\cos \varkappa H \tau - 1),$$

$$y = \frac{p_{0x} c}{eH} (\cos \varkappa H \tau - 1) + \frac{p_{0y}\, c}{eH} \sin \varkappa H \tau,$$

$$z = \frac{E_0}{eH} (\cosh \varkappa E \tau - 1) + \frac{p_{0z} c}{eH} \sinh \varkappa E \tau,$$

$$c\,t = \frac{p_{0z} c}{eE} (\cosh \varkappa E \tau - 1) + \frac{E_0}{eE} \sinh \varkappa E \tau$$

mit $\varkappa = e/m\,c$ und $E = |\mathfrak{E}|$.

600.

a) Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ sei der y- und das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ der z-Achse parallel (im System S). Im Anfangszeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Punkt $x = y = z = 0$ und habe den Impuls $\mathfrak{p}_0$. Die Bewegung in den Fällen $E > H$ und $H > E$ ist verschieden. Wie aus der Form der Invarianten des Feldes, $\mathfrak{E}\,\mathfrak{H} = 0$, $E^2 - H^2 > 0$, folgt, existiert im ersten Fall ein Bezugssystem S', in dem kein Magnetfeld vorhanden ist. Die Lorentz-Transformation für die Felder zeigt, daß sich das System S' dabei gegenüber S parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit $V = cH/E$ bewegen muß (s. Aufgabe 530). Die uns interessierenden Bewegungsgleichungen im System S ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen des Teilchens im homogenen elektrischen Feld $\mathfrak{E}'$ mit Hilfe der Lorentz-Transformationen

$$x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \ldots$$

Dabei müssen $E' = |\mathfrak{E}'|$, p'_{0x}, p'_{0y}, p'_{0z} durch die entsprechenden ungestrichenen Größen ausgedrückt werden. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{E(c p_{0x} E - E_0 H)}{m c (E^2 - H^2)} \tau + \frac{H(E_0 E - c p_{0x} H)}{e (E^2 - H^2)^{3/2}} \sinh \varkappa \sqrt{E^2 - H^2}\, \tau + \\
&\qquad + \frac{c p_{0y} H}{e (E^2 - H^2)} (\cosh \varkappa \sqrt{E^2 - H^2}\, \tau - 1); \\
y &= \frac{E_0 E - c p_{0x} H}{e (E^2 - H^2)} (\cosh \varkappa \sqrt{E^2 - H^2}\, \tau - 1) + \\
&\qquad + \frac{p_{0y} c}{e \sqrt{E^2 - H^2}} \sinh \varkappa \sqrt{E^2 - H^2}\, \tau; \\
z &= \frac{p_{0z}}{m} \tau; \\
c t &= \frac{H(c p_{0x} E - E_0 H)}{m c (E^2 - H^2)} \tau + \frac{E(E_0 E - c p_{0x} H)}{e (E^2 - H^2)^{3/2}} \sinh \varkappa \sqrt{E^2 - H^2}\, \tau + \\
&\qquad + \frac{c p_{0y} E}{e (E^2 - H^2)} (\cosh \varkappa \sqrt{E^2 - H^2}\, \tau - 1)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

mit $\varkappa = e/m c$. Bei $H > E$ führt die Transformation vom Bezugssystem, in dem nur das Magnetfeld vorhanden ist, zu analogen Ergebnissen, die sich von (1) nur dadurch unterscheiden, daß E durch H zu ersetzen ist. Dabei sind noch die Beziehungen $\sinh i\alpha = i \sin\alpha$, $\cosh i\alpha = \cos\alpha$ zu berücksichtigen. Den Fall $E = H$ erhält man aus den angegebenen Formeln durch den Grenzübergang $E \to H$. Es ergibt sich

$$x = \frac{\varkappa^2 H^2}{6m} \left(\frac{E_0}{c} - p_{0x} \right) \tau^3 + \frac{c p_{0y} \varkappa^2 H}{2e} \tau^2 + \frac{p_{0x}}{m} \tau, \ldots$$

b) Die Lösung erfolgt hier analog wie bei den Aufgaben 594 und 597.

601. Man erhält

$$T = m c^2 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} - 1 \right).$$

Daraus folgt z.B. für den in der Aufgabe 599 betrachteten Fall

$$T = E_0 \cosh \varkappa E \tau + c p_{0z} \sinh \varkappa E \tau - m c^2.$$

602. Ausgehend vom Ergebnis der Aufgabe 530, erhält man durch Berechnung von V/c bis auf Terme erster Ordnung in E/H genau $V/c = E_y/H$. Der Lösungsweg ist dem der Aufgabe 600 ähnlich. In allen Rechnungen können die kleinen Terme zweiter und höherer Ordnung in E_y/H, E_z/H und v_0/c ver-

nachlässigt werden. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin\omega t + \frac{v_{0y}}{\omega}(\cos\omega t - 1) + c\frac{E_y}{H}t, \\ y &= a(\cos\omega t - 1) + \frac{v_{0y}}{\omega}\sin\omega t, \\ z &= \frac{eE_z t^2}{2m} + v_{0z} t \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

mit

$$a = \frac{v_{0x} - \dfrac{cE_y}{H}}{\omega}, \qquad \omega = \frac{eH}{mc}.$$

Im Anfangszeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Punkt $x = y = z = 0$. Die Gleichungen (1) enthalten insbesondere das Ergebnis der Aufgabe 598.

603. Wir legen die x-Achse in die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle. Dann wird das Wellenfeld vollständig durch zwei Funktionen von t', z.B. $E_y(t')$ und $E_z(t')$, charakterisiert:

$$E = [0, E_y(t'), E_z(t')], \qquad H = [0, -E_z(t'), E_y(t')].$$

Aus den Gleichungen (11.15) erhält man zunächst $t' = \tau$. Damit ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen des Teilchens in Parameterform:

$$x(\tau) = \frac{1}{2m^2 c}\int_0^\tau p_\perp^2\,\mathrm{d}\tau, \qquad y(\tau) = \frac{1}{m}\int_0^\tau p_y\,\mathrm{d}\tau,$$

$$z(\tau) = \frac{1}{m}\int_0^\tau p_z\,\mathrm{d}\tau, \qquad t(\tau) = \tau + \frac{1}{2m^2 c^2}\int_0^\tau p_\perp^2\,\mathrm{d}\tau.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{p}_\perp = e\int_0^\tau \mathfrak{E}(t')\,\mathrm{d}t' = \mathfrak{e}_y p_y + \mathfrak{e}_z p_z$$

die Impulskomponente des Teilchens in der $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$-Ebene.

604. Die Koordinaten des Teilchens sind

$$x = x_0\cos\omega t, \qquad y = y_0\cosh\omega t, \qquad z = v t,$$

wobei $\omega^2 = 2e\,k/m$ ist.

Aus den erhaltenen Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ ersieht man, daß mit Hilfe einer solchen Linse ein Bündel geladener Teilchen gebildet werden kann, das die Form eines ebenen Bandes hat.

605. Man erhält die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,\dot r}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m\,r\,\dot\alpha^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+eE_r+\frac{e}{c}(-H_\alpha\,\dot z+H_z\,r\,\dot\alpha),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,r^2\,\dot\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=e\left[E_\alpha+\frac{1}{c}(H_r\,\dot z-H_z\,\dot r)\right]r,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,\dot z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=e\left[E_z+\frac{1}{c}(H_\alpha\,\dot r-H_r\,r\,\dot\alpha)\right].$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen haben die Form der gewöhnlichen NEWTONschen Bewegungsgleichungen (jedoch mit der veränderlichen Masse $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$). Der Term $m\,r\,\dot\alpha^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ auf der rechten Seite der ersten Gleichung hängt nicht von der Form der elektromagnetischen Kräfte ab (Zentrifugalkraft). Die zweite Gleichung drückt die zeitliche Ableitung der z-Komponente des Drehimpulses des Teilchens durch die z-Komponente des Drehmoments der LORENTZ-Kraft aus.

606. Bei $H=0$ sind die Elektronenbahnen geradlinig. Mit wachsendem Magnetfeld werden die Bahnen in der auf der Achse senkrecht stehenden Ebene immer mehr gekrümmt. Wir führen die Zylinderkoordinaten r, α, z ein und legen die z-Achse in die Zylinderachse. Die Elektronen erreichen die Anode nicht mehr, wenn ihre Geschwindigkeit bei $r=b$ der Anodenoberfläche parallel ist, d.h. bei $\dot r|_{r=b}=0$. Dabei ist $\dot\alpha|_{r=b}=v_{\max}/b$. Die zweite der in der Lösung der Aufgabe 605 angegebenen Gleichungen hat im vorliegenden Fall die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,r^2\,\dot\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=-\frac{e}{c}H(r)\,r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Durch Integration von (1) längs der Teilchenbahn von $r=a$ bis $r=b$ ergibt sich

$$\left[\frac{m\,r^2\,\dot\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]_{r=a}^{r=b}=-\frac{e}{2\pi c}\int_a^b 2\pi H\,r\,\mathrm{d}r=-\frac{e\Phi}{2\pi c}$$

und daraus

$$\Phi_{\mathrm{kr}}=\frac{2\pi c\,b}{|e|}p_{\max}=2\pi c\,b\sqrt{\frac{2mV}{|e|}\left(1+\frac{|e|V}{2mc^2}\right)}, \tag{2}$$

wenn man das Ergebnis der Aufgabe 546 und die Beziehung $T_{\max}=|e|V$ benutzt.

Bei kleiner Potentialdifferenz ist $|e|\,V \ll m\,c^2$ (das ist äquivalent $v \ll c$), und (2) vereinfacht sich zu

$$\Phi_{\mathrm{kr}} = 2\pi\, c\, b \sqrt{\frac{2 m V}{|e|}}\,. \tag{3}$$

607. Die Potentialdifferenz V muß größer als

$$V_{\mathrm{kr}} = \sqrt{\frac{4 I^2}{c^2} \ln^2 \frac{b}{a} + \frac{m^2 c^4}{e^2}} - \frac{m\,c^2}{|e|}$$

sein.

Bei $|e|\,V \ll m\,c^2$ (nichtrelativistische Elektronen) ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung

$$V_{\mathrm{kr}} = \frac{2 I^2 |e|}{m\,c^4} \ln^2 \frac{b}{a}\,.$$

608. Man erhält

$$b = a\, \mathrm{e}^{p_0 c^2 / I |e|}$$

mit $p_0 = m\, v_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$.

610. Wir benutzen Zylinderkoordinaten r, α, wobei wir den Koordinatenursprung in die Ladung $Z\,e$ und die Polarachse in die Richtung des Drehimpulses des Teilchens legen. Dann geht die Bewegung in der Ebene $z = 0$ vor sich, und r bedeutet den Abstand zwischen den Ladungen $-e$ und $Z\,e$. Die ersten beiden Gleichungen der Lösung der Aufgabe 605 lauten hier

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m \dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) &= \frac{m\, r\, \dot{\alpha}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{Z\, e^2}{r^2}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\, r^2\, \dot{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (1) folgt, daß der Drehimpuls ein Integral der Bewegung ist:

$$\frac{m\, r^2\, \dot{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = L = \text{const.} \tag{2}$$

Ein weiteres Integral der Bewegung ist die Gesamtenergie des Systems:

$$\frac{m\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{Z\, e^2}{r} = E = \text{const.} \tag{3}$$

Gleichung (3) zeigt, daß zwei Haupttypen von Bahnen möglich sind. Bei großen Werten von r ist die Gesamtenergie $E = m\, c^2 + T$ (T ist die kinetische Energie), da die potentielle Energie $Z\, e^2/r$ für $r \to \infty$ gegen Null strebt. Wegen

$T \geqq 0$ kann sich das Teilchen bei $E < m\,c^2$ nicht weit vom anziehenden Zentrum entfernen, und seine Bahn verläuft in einem begrenzten Gebiet (gebundene Bewegung). Bei $E > m\,c^2$ enthalten die Bahnkurven Äste, die ins Unendliche laufen (ungebundene Bewegung).

Wir suchen die Differentialgleichung für die Teilchenbahnen. Aus (2) folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{L\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{m\,r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{4}$$

Setzt man (3) und (4) in die erste der Gleichungen (1) ein, so erhält man die Differentialgleichung der Teilchenbahn:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\left(\frac{1}{r}\right) + (1-\varrho^2)\,\frac{1}{r} = \frac{Z\,e^2 E}{L^2\,c^2} \tag{5}$$

mit $\varrho = Z\,e^2/L\,c$.

Die Integration dieser Gleichung ergibt für $\varrho \neq 1$

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\sqrt{1-\varrho^2}\,\alpha}, \qquad p = \frac{L^2\,c^2 - Z^2\,e^4}{Z\,e^2 E}, \tag{6}$$

wobei ε eine Integrationskonstante ist. Die zweite Integrationskonstante kann man durch geeignete Wahl des Anfangspunktes für den Winkel α eliminieren und ε durch E und L ausdrücken. Die Bahnen sind bezüglich der x-Achse symmetrisch ($\alpha = 0$).

Wir betrachten den Fall $\varrho < 1$ genauer. Wie aus (6) folgt, kommt das Teilchen in diesem Fall der Punktladung nicht näher als auf den Abstand

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon},$$

wenn man $\varepsilon > 0$ annimmt. In (6) ist der Anfangspunkt des Winkels α so gewählt, daß $r = r_{\min}$ für $\alpha = 0$ ist. Das Teilchen kann mehrmals im Abstand $r_{\min}$ an der Punktladung vorbeifliegen. In allen diesen Punkten gilt $\dot r = 0$ und ist die Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor $\mathfrak{r}$ gerichtet. Daher folgt $L = m\,v\,r_{\min}/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Eliminiert man hieraus und aus der Beziehung (3) für $r_{\min}$ die Größe v und benutzt den Ausdruck für $r_{\min}$ als Funktion von ε, so erhält man

$$\varepsilon = \frac{1}{\varrho}\sqrt{1-\frac{m^2\,c^4}{E^2}(1-\varrho^2)}\,. \tag{7}$$

Aus (7) folgt, daß der Parameter ε für $E < m\,c^2$ kleiner als 1 ist ($\varrho < 1$). Die Bewegung ist gebunden und die Bahn „elliptisch“ (Abb. 83). Die Bahn hat im allgemeinen die Gestalt einer nicht geschlossenen Rosette zwischen den Kreisen mit den Radien $p/(1+\varepsilon)$ und $p/(1-\varepsilon)$. Man kann sie durch Drehung (Präzession) einer nichtrelativistischen Bahn in deren Ebene erhalten. Bei einer Änderung von r vom Minimalwert $r_{\min} = p/(1+\varepsilon)$ (Perihel) bis zum Maximalwert $r_{\max} = p/(1-\varepsilon)$ (Aphel) und zurück bis zum Minimalwert ändert sich der Winkel α um $2\pi/\sqrt{1-\varrho^2}$. Während einer Periode der Änderung

von r dreht sich das Perihel der Bahn also um den Winkel

$$2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}-1\right).$$

Ist $\sqrt{1-\varrho^2}$ eine rationale Zahl, so schließt sich die Bahn nach einer gewissen Zahl von Umläufen.

Bei $E > m\,c^2$ ist $\varepsilon > 1$. Die Bewegung ist ungebunden und die Bahn „hyperbolisch" (Abb. 84). Sie hat zwei Äste, die bei $\alpha = \pm\,\alpha_0$ mit

$$\alpha_0 = \frac{\arccos(-1/\varepsilon)}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

ins Unendliche gehen. Ein Teilchen, das sich der Ladung $Z\,e$ auf einem der Äste nähert, kann die Ladung mehrmals umkreisen, bevor es sich auf dem anderen Ast wieder ins Unendliche entfernt.

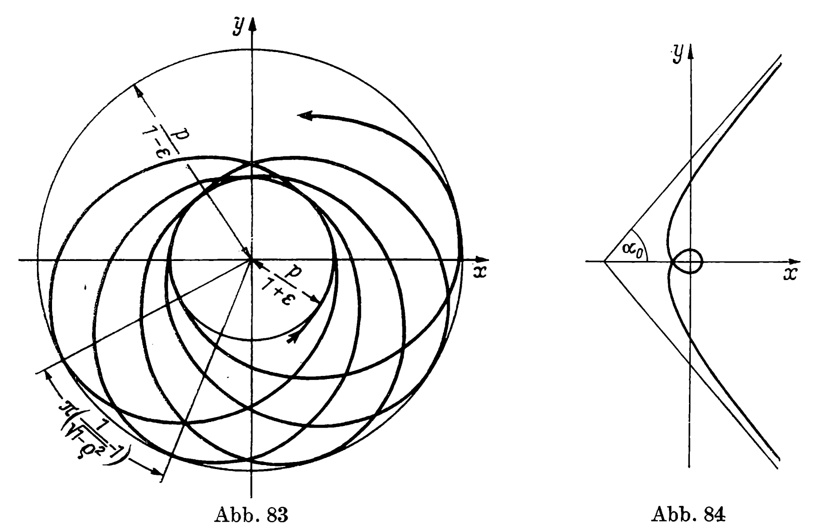


Abb. 83 Abb. 84

Dem Fall $E = m\,c^2$ entspricht $\varepsilon = 1$. Die Bewegung ist in diesem Fall ebenfalls ungebunden, jedoch ist die Bahn „parabolisch".

Bei $\varrho \ll 1$ gehen die betrachteten Bahnen in die übliche Ellipse ($\varepsilon < 1$), Hyperbel ($\varepsilon > 1$) bzw. Parabel ($\varepsilon = 1$) des nichtrelativistischen Kepler-Problems über. Das ist selbstverständlich, da bei $v/c \ll 1$ die Bedingung $\varrho \ll 1$ erfüllt ist.[1])

[1]) Man kann eine solche Abschätzung von ϱ im nichtrelativistischen Fall durchführen:

$$\varrho = \frac{Z\,e^2}{L\,c} \sim \frac{Z\,e^2}{r\,m\,v\,c} \sim \frac{|U|}{m\,v\,c}.$$

Auf Grund des Virialsatzes gilt $|U| = 2\,T \approx m\,v^2$, so daß $\varrho \sim v/c \ll 1$ ist.

611. Die Lösung der Gleichung (5) der vorigen Aufgabe schreibt man im Falle $\varrho > 1$ am besten in der Form

$$r = \frac{p_1}{-1 + \varepsilon_1 \cosh \sqrt{\varrho^2 - 1}\,\alpha} \tag{1}$$

mit

$$p_1 = \frac{-L^2 c^2 + Z^2 e^4}{Z e^2 E}, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{m^2 c^4}{E^2}\left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right)}. \tag{2}$$

Die durch (1) beschriebenen Bahnen sind spiralförmig und umlaufen den Koordinatenursprung bei $\alpha \to \pm\infty$. Das Teilchen trifft auf das Kraftzentrum auf (im nichtrelativistischen Fall ist ein Auftreffen auf das Kraftzentrum nur bei $L = 0$, $\varrho \to \infty$ möglich). Für $E > m c^2$ ist der Parameter ε_1 kleiner als 1, und die Bahn besitzt zwei Äste, die bei $\alpha = \pm \alpha_0$ ins Unendliche gehen, wobei

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 1}} \operatorname{ar cosh} \frac{1}{\varepsilon_1}$$

ist (Abb. 85). Für $E < m c^2$ ist der Parameter ε_1 größer als 1, und die Bahn hat die in Abb. 86 dargestellte Form.

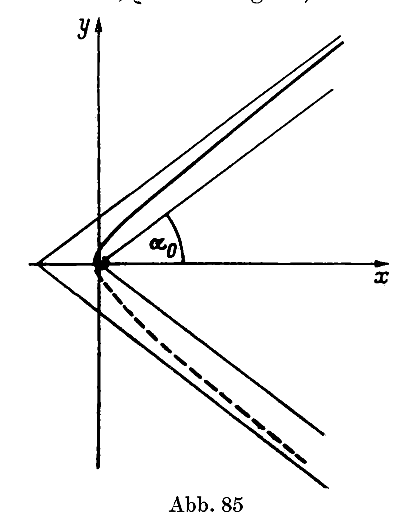


Abb. 85

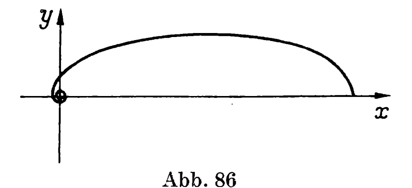


Abb. 86

Im Falle $\varrho = 1$ ist die Lösung der Form (1) nicht anwendbar, und die Bahngleichung muß neu integriert werden. Man erhält

$$r = \frac{2 Z e^2 E}{E^2(\alpha^2 - 1) + m^2 c^4}. \tag{3}$$

Die Bahn ist ebenfalls eine Spirale, die bei $\alpha \to \pm\infty$ das Kraftzentrum umkreist, jedoch langsamer als im Falle $\varrho > 1$. Der Bahnverlauf ist derselbe wie in den in den Abbildungen 85 und 86 diskutierten Fällen.

612. Im Falle $Z e^2/L c < 1$ gilt

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{Z^2 e^4}{L^2 c^2}}}$$

mit

$$p = \frac{Z^2 e^4 - L^2 c^2}{Z e^2 E}, \qquad \varepsilon = \frac{c}{Z e^2 E} \sqrt{L^2 E^2 - m^2 c^2 (L^2 c^2 - Z^2 e^4)} > 1 .$$

Der Bahnverlauf ist hyperbelähnlich (Abb. 87). Die beiden Äste gehen bei $\alpha = \pm \alpha_0$ ins Unendliche, wobei

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Z^2 e^4}{L^2 c^2}}} \arccos \frac{1}{\varepsilon}$$

ist. Bei $Z e^2/L c \ll 1$ bewegt sich das Teilchen auf einer Hyperbel. Dieser Fall entspricht der nichtrelativistischen Bewegung mit $v \ll c$ (s. die Anmerkung auf S. 395).

Im Falle $Z e^2/L c > 1$ gilt

$$r = - \frac{p}{1 - \varepsilon \cosh \alpha \sqrt{\frac{Z^2 e^4}{L^2 c^2} - 1}},$$

wobei $\varepsilon < 1$ ist. Die Bahn verläuft ähnlich wie im ersten Fall. Ihre beiden Äste gehen für

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{Z^2 e^4}{L^2 c^2} - 1}} \operatorname{ar\,cosh} \frac{1}{\varepsilon}$$

ins Unendliche.

Im Fall $Z e^2/L c = 1$ gilt

$$r = \frac{2 Z e^2 E}{E^2 (1 - \alpha^2) - m^2 c^4} .$$

Die Äste der Bahn gehen für $\alpha = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}/E$ ins Unendliche.

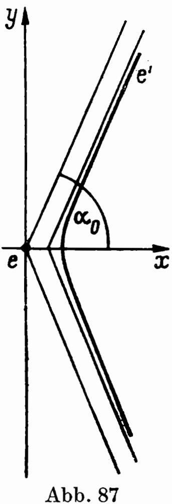


Abb. 87

614. Im Falle $e e' < 0$ (Anziehung) erhält man

$$r = \frac{a |\varepsilon^2 - 1|}{1 + \varepsilon \cos \alpha},$$

wobei

$$a = \left| \frac{e e'}{2E} \right|, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{\mu e^2 e'^2}}, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

ist und $L = \mu r^2 \dot{\alpha}$ den Drehimpuls, $E = e e'/r + \mu v^2/2$ die Gesamtenergie des Teilchens und r, α Polarkoordinaten bedeuten. Die Teilchenbahn ist ein Kegelschnitt, und zwar bei $E < 0$ eine Ellipse ($\varepsilon < 1$), bei $E > 0$ eine Hyperbel, in deren innerem Brennpunkt sich die Ladung e' befindet ($\varepsilon > 1$), und bei $E = 0$ eine Parabel ($\varepsilon = 1$).

Im Falle $e\,e' > 0$ (Abstoßung) erhält man

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{-1 + \varepsilon \cos\alpha}.$$

Dabei gilt $E \geqq 0$ und $\varepsilon \geqq 1$. Die Teilchenbahn ist bei $E > 0$ ($\varepsilon > 1$) eine Hyperbel, in deren äußerem Brennpunkt sich die Ladung e' befindet, und bei $E = 0$ ($\varepsilon = 1$) eine Parabel.

615. Der differentielle Streuquerschnitt kann mit Hilfe der Beziehung

$$\sigma(\Theta) = \frac{s\,\mathrm{d}s}{\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta} \tag{1}$$

berechnet werden, wobei Θ den Streuwinkel des Teilchens bedeutet, der einem vorgegebenen Wert des Stoßparameters s entspricht. Die Relation zwischen s und Θ kann aus der Gleichung der Teilchenbahn bestimmt werden (s. Aufgabe 614). Im Falle der Anziehung ($e\,e' < 0$) ist $\cos\alpha > -1/\varepsilon$. Der Winkel α ändert sich von $-\alpha_0$ bis α_0, wenn das Teilchen die ganze Bahn durchläuft, wobei $\cos\alpha_0 = -1/\varepsilon$ ist (Abb. 88). Der Streuwinkel Θ ergänzt den Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel zu π. Aus Abb. 88 liest man

$$\frac{\Theta}{2} = -\frac{\pi}{2} + \alpha_0$$

ab, so daß

$$\cot^2\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{\Theta}{2}} - 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha_0} - 1 = \varepsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2}{m\,e^2\,e'^2},$$

gilt. Der Drehimpuls hängt mit dem Stoßparameter s durch die Beziehung

$$L = m\,v_0\,s$$

zusammen. Es gilt also

$$s^2 = \frac{e^2\,e'^2}{m^2\,v_0^4}\cot^2\frac{\Theta}{2}.$$

Abb. 88

Durch Differentiation und Einsetzen in (1) ergibt sich

$$\sigma(\Theta) = \left(\frac{e\,e'}{2m\,v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}.$$

Das ist die bekannte RUTHERFORDsche Streuformel. Dasselbe Resultat ergibt sich bei $e\,e' > 0$.

616. Im Falle $e\,e' < 0$ (Anziehung) erhält man

$$\Theta = \left(\frac{2cL}{\sqrt{c^2L^2 - Z^2e^4}} - 1\right)\pi - \frac{2cL}{\sqrt{c^2L^2 - Z^2e^4}}\arctan\frac{v_0\sqrt{c^2L^2 - Z^2e^4}}{cZe^2},$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit der Ladung bei $r \to \infty$ bedeutet, im Falle $e e' > 0$ (Abstoßung) ist

$$\Theta = \pi - \frac{2cL}{\sqrt{c^2L^2 - Z^2 e^4}} \arctan \frac{v_0 \sqrt{c^2L^2 - Z^2 e^4}}{cZ e^2}.$$

617. Dem kleineren Streuwinkel entspricht der größere Stoßparameter s. Setzen wir $L = p_0 s$, wobei p_0 den Impuls des Teilchens für $r \to \infty$ bedeutet, so können wir deshalb die uns interessierende Abhängigkeit des Streuwinkels Θ von s durch den Grenzübergang $s \to \infty$ (natürlich mit $L > |e e'|/c$) in den allgemeinen Gleichungen der vorigen Aufgabe erhalten. Der Grenzübergang liefert in den beiden Fällen $e e' < 0$ und $e e' > 0$ dasselbe Ergebnis:

$$\Theta = \pi - 2 \arctan \frac{v_0 p_0 s}{|e e'|} = \frac{2Z e^2}{v_0 p_0 s} \ll 1.$$

Daraus folgt $s = 2|e e'|/v_0 p_0 \Theta$ und

$$\sigma(\Theta) = \frac{s \, \mathrm{d}s}{\Theta \, \mathrm{d}\Theta} = 4 \left(\frac{e e'}{v_0 p_0}\right)^2 \frac{1}{\Theta^4}.$$

618.

$$x = v t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2m a^3}{k}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \frac{m a^3}{e^2}}.$$

619. Das beschleunigende elektrische Feld ist

$$E_\alpha = \frac{1}{2 \pi r c} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

wobei r den Radius der Elektronenbahn, Φ den magnetischen Fluß durch die Bahn und α den Azimutwinkel des Elektrons bedeuten.

Bei der Verschiebung des Elektrons auf der Bahn um $r \, \mathrm{d}\alpha$ leistet das Feld E_α die Arbeit

$$\delta A = E_\alpha r \, \mathrm{d}\alpha. \tag{1}$$

Die Beschleunigung des Elektrons erfolgt auf der Bahn mit dem konstanten Radius

$$r = \frac{c p}{e H_0}$$

(s. Aufgabe 597), wobei H_0 das Magnetfeld auf der Bahn bezeichnet, das auf der Bahnebene senkrecht steht und mit der Zeit anwächst. Aus der Bedingung $\mathrm{d}r = 0$ ergibt sich

$$\mathrm{d}p = \frac{p}{H_0} \mathrm{d}H_0. \tag{2}$$

Die Energie $E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$ des Elektrons vergrößert sich um

$$\mathrm{d}E = \frac{c^2 p \, \mathrm{d}p}{E} = \frac{c^2 p^2 \, \mathrm{d}H_0}{E H_0}, \tag{3}$$

wobei die letzte Gleichung wegen (2) gilt. Offenbar ist

$$\delta A = \mathrm{d}E. \tag{4}$$

Setzt man (1) und (3) in (4) ein und benutzt die Gleichung

$$\frac{c^2 p}{E} = v = r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t},$$

so erhält man durch Integration

$$\Phi = 2\Phi_0, \tag{5}$$

wobei $\Phi_0 = \pi r^2 H_0$ ist. Gleichung (5) ist die sogenannte 1:2-Bedingung des Betatrons.

620. Die Wechselwirkungsenergie U zweier geladener Teilchen wird durch die Gleichung (11.19) bestimmt, in die die Ladung e_1 eines der Teilchen und die retardierten Potentiale φ_2, $\mathfrak{A}_2$ des Feldes des anderen Teilchens einzusetzen sind. Benutzt man die in der Aufgabe 658 angegebenen Entwicklungen, so erhält man

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{R} + \frac{e_2}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{e_2\,\mathfrak{v}_2}{cR}, \tag{1}$$

wobei R den Abstand zwischen den Teilchen bezeichnet. Wir wählen die Eichfunktion χ in der Form

$$\chi = \frac{e_2}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}$$

und führen eine Eichtransformation der Potentiale durch. Die neuen Potentiale haben die Form

$$\varphi_2' = \varphi_2 - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{e_2}{R},$$

$$\mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2 + \operatorname{grad}\chi = \frac{e_2[\mathfrak{v}_2 + (\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}_2)\,\mathfrak{n}]}{2cR},$$

wobei $\mathfrak{n} = \mathfrak{R}/R$ ist. Daraus ergibt sich für die Wechselwirkungsenergie die BREITsche Formel

$$U = e_1\varphi_2 - \frac{e_1}{c}(\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{A}_2) = \frac{e_1 e_2}{R}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}[\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 + (\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{n})\,(\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{n})]\right\},$$

die näherungsweise die Tatsache berücksichtigt, daß die Kraft, die an einem der beiden wechselwirkenden geladenen Teilchen mit dem gegenseitigen Abstand R angreift, durch Lage und Bewegungszustand der anderen Ladung in der Vergangenheit bestimmt wird. Energie und Impuls werden von den Ladungen auf das Feld übertragen und innerhalb der Zeit R/c von Ladung zu Ladung durch das Feld transportiert. Teilchen und Feld bilden ein einheitliches System. Daher ist es unmöglich, die Bewegung eines Systems miteinander wechselwirkender Teilchen exakt zu beschreiben, ohne die Freiheitsgrade des Feldes heranzuziehen.

621.

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_1^4}{8c^2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^4}{8c^2} + \frac{e_1 e_2}{R} - \frac{e_1 e_2}{2c^2 R} [\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 + (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{n})(\mathfrak{v}_2 \mathfrak{n})].$$

622. Das magnetische Moment des Teilchens präzediert mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = -\varkappa\, \mathfrak{H}$ um die Magnetfeldrichtung.

623. Das Teilchen hat im Laborsystem das elektrische Dipolmoment $\mathfrak{p} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{m}/c$, so daß im elektrischen Feld

$$\mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{r}}{r} \frac{d\varphi}{dt}$$

das Drehmoment $\mathfrak{N} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}$ auf das Teilchen wirkt. Vernachlässigt man, daß das Dipolmoment $\mathfrak{p}$ in das elektrische Feld hineingezogen wird, so kann man in $\mathfrak{N}$ das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ durch $\dot{\mathfrak{v}}\, m/e$ ersetzen. Der Mittelwert des Drehmomentes ist

$$\overline{\mathfrak{N}} = \frac{m}{e} \overline{\mathfrak{p} \times \dot{\mathfrak{v}}} = \frac{m}{e\,c} \overline{(\mathfrak{v} \times \mathfrak{m}) \times \dot{\mathfrak{v}}}. \tag{1}$$

Differenziert man das Produkt $(\mathfrak{v} \times \mathfrak{m}) \times \mathfrak{v}$ nach der Zeit und benutzt, daß der Mittelwert einer zeitlich abgeleiteten periodischen Funktion Null und der Term mit $\dot{\mathfrak{m}} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}\, e/2m\,c$ um die Größe v^2/c^2 kleiner als die Terme mit $\dot{\mathfrak{v}}$ ist, so erhält man

$$\overline{(\mathfrak{v} \times \mathfrak{m}) \times \dot{\mathfrak{v}}} + \overline{(\dot{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{m}) \times \mathfrak{v}} = 0.$$

Mit Hilfe der Identität

$$(\mathfrak{v} \times \mathfrak{m}) \times \dot{\mathfrak{v}} + (\mathfrak{m} \times \dot{\mathfrak{v}}) \times \mathfrak{v} + (\dot{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{v}) \times \mathfrak{m} = 0$$

ergibt sich daraus das mittlere Drehmoment

$$\overline{\mathfrak{N}} = \frac{1}{2} \mathfrak{m} \times \overline{\mathfrak{H}'}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{H}' = -\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}/c$ die magnetische Feldstärke im momentanen Ruhsystem des Elektrons ist.

Man kann das Feld $\mathfrak{H}'$ durch den Drehimpuls $\mathfrak{l}$ ausdrücken, der durch die Bahnbewegung des Teilchens um das Kraftzentrum entsteht:

$$\mathfrak{H}' = -\frac{1}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{E} = \frac{1}{m\,c\,r} \frac{d\varphi}{dr} m\, \mathfrak{v} \times \mathfrak{r} = \frac{1}{m\,c\,r} \frac{d\varphi}{dr} \mathfrak{l}. \tag{3}$$

Die Wechselwirkung des magnetischen Momentes des Teilchens mit dem Feld, die zur Entstehung des mittleren Drehmomentes (2) führt, kann durch die potentielle Energie

$$U = -\frac{1}{2} \mathfrak{m}\, \overline{\mathfrak{H}'} = -\frac{e}{2m^2 c^2} \overline{\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}}\, \mathfrak{l}\, \mathfrak{s} \tag{4}$$

beschrieben werden.

Wir weisen darauf hin, daß sich bei der quantenmechanischen Beschreibung des Atoms der gleiche Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie zwischen dem Spin eines Elektrons und seiner Bahnbewegung ergibt.

624. Die Bewegung des Drehimpulses $\mathfrak{s}$ wird durch die Gleichung

$$\overline{\frac{d\mathfrak{s}}{dt}} = \frac{e}{2m^2c^2}\overline{\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}}\,\mathfrak{s}\times\mathfrak{j} \tag{1}$$

beschrieben, wobei $\mathfrak{j} = \mathfrak{l} + \mathfrak{s}$ den Gesamtdrehimpuls bedeutet. Aus (1) folgt, daß der Drehimpuls $\mathfrak{s}$ im Mittel mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{e}{2m^2c^2}\overline{\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}}\,\mathfrak{j}$$

um die Richtung von $\mathfrak{j}$ präzediert.

625. Die Reflexion erfolgt bei antiparalleler Orientierung des magnetischen Momentes und des Feldes, wenn der Neigungswinkel α so klein ist, daß $\sin\alpha \leqq \sqrt{|\mathfrak{m}_0|\,H/E_0}$ ist.

626. Die Bewegung des Neutrons in Richtung des Leiters ist gleichförmig. Die Bewegung in der zum Leiter senkrechten Ebene erfolgt im Potentialfeld $U = \pm 2|\mathfrak{m}_0|\,I/c\,r$. Die Projektion der Neutronenbahn auf diese Ebene hat also dieselbe Form wie die Bahn der Relativbewegung zweier Ladungen e und e', die nach dem COULOMBschen Gesetz miteinander wechselwirken (s. Aufgabe 614). Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe muß man $e\,e'$ durch $\pm 2|\mathfrak{m}_0|\,I/c$ ersetzen und unter

$$E = \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m\,r^2} + U(r)$$

die Energie der transversalen Bewegung verstehen ($L = m\,r^2\,\dot{\alpha}$ ist der Drehimpuls). Insbesondere führen die Neutronen bei $E < 0$ eine gebundene Bewegung um den Leiter aus.

627.

$$l(\alpha) = \frac{|\mathfrak{m}_0|\,I}{c\,m\,v_0^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

12. EMISSION ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

12.1. HERTZscher Vektor und Entwicklung nach Multipolen

630.

$$\Delta\varphi = -4\pi\varrho,$$

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}.$$

632. Die Drehimpulsdichte ist

$$\mathfrak{R} = \frac{(\mathfrak{n}\times\ddot{\mathfrak{p}})(\mathfrak{n}\,\dot{\mathfrak{p}})}{2\pi c^3 r^2}.$$

Bei der Berechnung der Größe $-\mathrm{d}\mathfrak{L}/\mathrm{d}t = \int \mathfrak{R}\, r^2\,\mathrm{d}\Omega$ benutzt man die Formel $\overline{n_i n_k} = {}^1/_3\,\delta_{ik}$ (s. Kap. 1). Man erhält

$$-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{L}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3c^2}\,\dot{\mathfrak{p}}\times\ddot{\mathfrak{p}}\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

633. Die magnetischen Kraftlinien haben die Form von Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf der z-Achse stehen und deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen. Die elektrischen Kraftlinien werden durch die Gleichungen

$$C_1 = \sin^2\vartheta\left[\frac{1}{r}\cos(kr-\omega t) + k\sin(kr-\omega t)\right], \qquad C_2 = \alpha$$

beschrieben, wobei C_1 und C_2 Konstanten bedeuten.

634. Man erhält

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\operatorname{rot}\mathfrak{Z}}{\partial t} =$$

$$= e\,a\left[\mathfrak{e}_\vartheta\left(-i\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{\omega}{c\,r^2}\right) + \mathfrak{e}_\alpha\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + i\frac{\omega}{c\,r^2}\right)\cos\vartheta\right]\mathrm{e}^{i(kr-\omega t+\alpha)},$$

$$\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{Z} = e\,a\left[\mathfrak{e}_r\left(-\frac{i\omega}{c\,r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\cdot 2\sin\vartheta + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{e}_\vartheta\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + i\frac{\omega}{c\,r^2} - \frac{1}{r^3}\right)\cos\vartheta + \mathfrak{e}_\alpha\left(i\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{\omega}{c\,r^2} - \frac{i}{r^3}\right)\right]\mathrm{e}^{i(kr-\omega t+\alpha)}.$$

In der Wellenzone $r \gg \lambda = 2\pi c/\omega$ vereinfachen sich die Ausdrücke für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zu

$$\mathfrak{H} = e\,a\frac{\omega^2}{c^2 r}(-i\,\mathfrak{e}_\vartheta + \mathfrak{e}_\alpha\cos\vartheta)\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t+\alpha)},$$

$$\mathfrak{E} = e\,a\frac{\omega^2}{c^2 r}(\mathfrak{e}_\vartheta\cos\vartheta + i\,\mathfrak{e}_\alpha)\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t+\alpha)} = \mathfrak{H}\times\mathfrak{n}.$$

Bei Emission in die obere Halbkugel ($\cos\vartheta > 0$) ergibt sich eine elliptisch und insbesondere bei $\vartheta = 0$ eine zirkular linkspolarisierte Welle. Bei Emission in die untere Halbkugel ($\cos\vartheta < 0$) liegt elliptische Rechtspolarisation vor, die bei $\vartheta = \pi$ in zirkulare Rechtspolarisation übergeht. Wellen, die in der Äquatorebene emittiert werden, sind linear polarisiert. Winkelverteilung und Gesamtintensität der Strahlung sind

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{n}\,r^2 = \frac{e^2\omega^4 a^2}{8\pi c^3}(1+\cos^2\vartheta),$$

$$\bar{I} = \frac{2\omega^4 e^2 a^2}{3c^3}.$$

Der betrachtete Fall liegt z.B. bei der Bewegung einer Ladung im homogenen Magnetfeld vor.

635. Es gilt

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} = 0, \quad \dot{\mathfrak{Q}} \neq 0,$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}\times\mathfrak{n} =$$

$$= -\frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r}\sin\vartheta[\mathfrak{e}_\vartheta\cos(2\omega t' - 2\alpha) + \mathfrak{e}_\alpha\cos\vartheta\sin(2\omega t' - 2\alpha)].$$

Die Schwingungsfrequenz der Ladungs- und Stromverteilung und folglich die Feldfrequenz sind doppelt so groß wie die Umlaufsfrequenz ω jeder der Ladungen auf der Bahn. Die Polarisation der Strahlung ist elliptisch, nähert sich bei $\vartheta \to 0, \pi$ der zirkularen Polarisation und geht bei $\vartheta = \pi/2$ in die lineare Polarisation über. Es wird

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{2e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}\sin^2\vartheta(1+\cos^2\vartheta),$$

$$\bar{I} = \frac{32}{5}\,\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}.$$

Wird eine der Ladungen entfernt, so wächst die Strahlungsintensität größenordnungsmäßig um den Faktor $(\lambda/a)^2$, also sehr stark, da $a/\lambda \ll 1$ ist.

636. Ist der Winkel zwischen den Radiusvektoren der Ladungen gleich $\pi - \varphi$, so muß

$$\varphi = \sqrt{\frac{12}{5}}\,\frac{a\omega}{c}$$

gelten.

637. Wir legen die x-Achse in die Richtung der Amplitude des Momentes des in der Phase verzögerten Oszillators und wählen die xy-Ebene so, daß die Momente beider Oszillatoren in ihr liegen. Bezeichnet man die Polarwinkel

des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$, der die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt, mit ϑ, α, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}(\mathfrak{r}, t) &= \mathfrak{H}\, e^{-i\omega t'} = \frac{\omega^2 p}{c^2 r}\{\mathfrak{e}_\vartheta[\sin\alpha + i\sin(\alpha-\varphi)] + \\ &\quad + \mathfrak{e}_\alpha[\cos\alpha + i\cos(\alpha-\varphi)]\cos\vartheta\} e^{-i\omega t'}, \\ \frac{\overline{dI}}{d\Omega} &= \frac{p^2\omega^4}{8\pi c^3}\{2 - [\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha-\varphi)]\sin^2\vartheta\}, \\ \bar{I} &= \frac{2p^2\omega^4}{3c^3}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Strahlung ist in den Richtungen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, die auf den Momenten beider Oszillatoren senkrecht stehen, maximal und ungleichförmig über das Azimut verteilt. Das wird in Abb. 89 für den Fall $\varphi = 45°$ durch

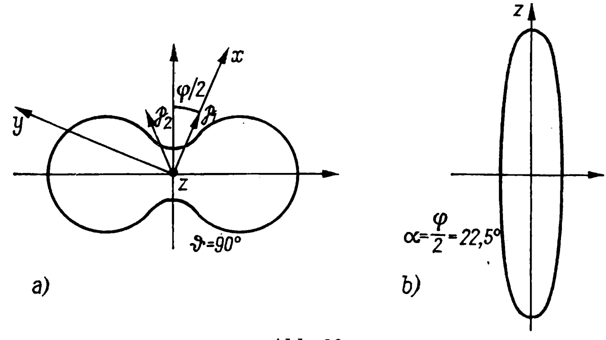


Abb. 89

Polardiagramme illustriert. Abb. 89*a* zeigt die Winkelverteilung in der Ebene $\vartheta = 90°$ und Abb. 89*b* die Winkelverteilung in der Ebene $\alpha = \varphi/2 = 22{,}5°$.

Verschiebt man den Anfangspunkt der Phase um γ, so erhält man die neue Feldamplitude

$$\mathfrak{H}\, e^{-i\gamma} = \mathfrak{H}_1 - i\,\mathfrak{H}_2.$$

Fordert man $\mathfrak{H}_1\,\mathfrak{H}_2 = 0$, so ergibt sich

$$\tan 2\gamma = 2\frac{\sin\alpha\sin(\alpha-\varphi) + \cos\alpha\cos(\alpha-\varphi)\cos^2\vartheta}{\sin^2\alpha - \sin^2(\alpha-\varphi) + [\cos^2\alpha - \cos^2(\alpha-\varphi)]\cos^2\vartheta}. \quad (2)$$

Berechnet man $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ mit Hilfe von (2), so erhält man $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ in Abhängigkeit von ϑ, α, φ.

Wir betrachten einige Spezialfälle. Bei $\vartheta = 90°$ ist die Polarisation linear; die Polarisationsebene steht auf der xy-Ebene senkrecht. Bei $\vartheta = 0, \pi$ ist die Polarisation elliptisch und das Verhältnis der Halbachsen der Ellipse gleich $\tan(\varphi/2)$; insbesondere ist die Polarisation bei $\varphi = \pi/2$ und $\vartheta = 0, \pi$ zirkular.

Man kann außerdem leicht die Fälle $\alpha = \varphi/2$, $\varphi/2 \pm \pi/2$ und $\varphi/2 + \pi$ untersuchen. In allen diesen Fällen ist die Polarisation im allgemeinen elliptisch. Bei $\alpha = \varphi/2$ und $\alpha = \varphi/2 + \pi$ wird die Polarisation in den Richtungen, die durch die Bedingung $\tan(\varphi/2) = |\cos\vartheta|$ bestimmt werden, zirkular. Für $\alpha = \varphi/2 \pm \pi/2$ werden die Richtungen der zirkularen Polarisation durch die Gleichung $\cot(\varphi/2) = |\cos\vartheta|$ bestimmt.

639. Man erhält

$$\overline{\mathfrak{S}} = \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3 r^2}(1 + \cos^2\vartheta)\, \mathfrak{e}_r + \frac{e^2 a^2 \omega^3}{4\pi c^2 r^3} \sin\vartheta\, \mathfrak{e}_\alpha,$$

$$\mathfrak{N} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2 a^2 \omega^3}{c^3}\, \mathfrak{e}_z.$$

Die letzte Gleichung folgt entweder unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der in der Zeiteinheit vom emittierenden System abgegebene Drehimpuls

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{L}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3c^3}\,\dot{\mathfrak{p}} \times \ddot{\mathfrak{p}}$$

(s. Aufgabe 632) gleich dem am Schirm angreifenden Drehmoment $\mathfrak{N}$ ist, oder aber unmittelbar mit Hilfe der Beziehung

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{c} \int\limits_{r \gg a} \mathfrak{r} \times \overline{\mathfrak{S}}\, r^2\, \mathrm{d}\Omega.$$

640. Man findet

$$\mathfrak{H} = \frac{|\dot{\mathfrak{m}}|\, \omega^2 \sin\varphi}{c^2 r}(\mathfrak{e}_\vartheta \cos\vartheta + i\, \mathfrak{e}_\alpha)\, \mathrm{e}^{i(kr - \omega t + \alpha)},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{|\mathfrak{m}|\, \omega^2 \sin\varphi}{c^2 r}(-\mathfrak{e}_\alpha \cos\vartheta + i\, \mathfrak{e}_\vartheta)\, \mathrm{e}^{i(kr - \omega t + \alpha)}$$

mit $\mathfrak{m} = {}^4/_3\pi a^3 \mathfrak{M}$ sowie

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{\mathfrak{m}^2 \omega^4 \sin^2\varphi}{8\pi c^3}(1 + \cos^2\vartheta),$$

$$\overline{I} = \frac{2\mathfrak{m}^2 \omega^4 \sin^2\varphi}{3c^3}.$$

641.

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{9}{800\pi}\,\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta,$$

$$\overline{I} = \frac{3}{500}\,\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}.$$

642.

$$\mathfrak{E} = \frac{q\,\mathfrak{r}}{r^3}, \qquad \mathfrak{H} = 0.$$

643. Entwickelt man den HERTZschen Vektor $\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t)$ nach monochromatischen Komponenten und benutzt die Entwicklung (A III.20), so erhält man

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\mathfrak{p}(t')}{r} \tag{1}$$

mit $t' = t - r/c$ und

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{r}, t) = \frac{1}{2r^2}\,\mathfrak{Q}(t') + \frac{1}{2rc}\,\dot{\mathfrak{Q}}(t'), \tag{2}$$

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\mathfrak{m}(t') \times \mathfrak{n}}{r} + \frac{c}{r^2}\left[\int \mathfrak{m}(t')\,\mathrm{d}t'\right] \times \mathfrak{n}. \tag{3}$$

Diese Gleichungen gelten für $r \gg a$, wobei a die Ausdehnung des Systems bezeichnet. Die willkürlich wählbare Konstante, die bei der Berechnung des Integrals in (3) auftritt, hat keinen Einfluß auf die Feldstärken.

644. Das Feld des magnetischen Dipols ist

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{r}, t) = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{n} \times \ddot{\mathfrak{m}}(t')}{c^2 r} + \frac{\mathfrak{n} \times \dot{\mathfrak{m}}(t')}{c r^2},$$

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{r}, t) = \operatorname{rot}\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}} = \frac{3\mathfrak{n}(\mathfrak{m}\mathfrak{n}) - \mathfrak{m}}{r^3} + \frac{3\mathfrak{n}(\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{n}) - \dot{\mathfrak{m}}}{c r^2} + \frac{\mathfrak{n} \times (\mathfrak{n} \times \ddot{\mathfrak{m}})}{c^2 r}.$$

Das Feld des elektrischen Dipols ergibt sich mit Hilfe der Substitutionen $\mathfrak{m} \to \mathfrak{p}$, $\mathfrak{H}_{\mathfrak{m}} \to \mathfrak{E}_{\mathrm{e}}$, $\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}} \to -\mathfrak{H}_{\mathrm{e}}$ aus dem Feld des magnetischen Dipols.

645. Die Dipolmomente des Systems sind Null, und das elektrische Quadrupolmoment hat nur die von Null verschiedene Komponente Q_{zz} (wenn die z-Achse in der Richtung von $\mathfrak{p}_0$ liegt).

Der Vektor $\mathfrak{Q}$ ist daher der z-Achse parallel, und bei entsprechender Wahl des Anfangszeitpunktes wird

$$\mathfrak{Q}(t') = Q_0 \cos\vartheta \cos\omega t'\, \mathrm{e}_z,$$

wobei $Q_0 = 2p_0 a$ ist.

Es ist zweckmäßig, die Rechnungen in komplexer Form durchzuführen. Dabei wird die Gleichung (2) der Lösung zur Aufgabe 643 benutzt und $\mathfrak{Z}$ auf die Achsen des Kugelkoordinatensystems projiziert. Durch Abtrennung des Realteils erhält man

$$H_\alpha = \frac{Q_0 \sin 2\vartheta}{4}\left[\left(\frac{k^3}{r} - \frac{3k}{r^3}\right)\sin(\omega t - kr) - \frac{3k^2}{r^2}\cos(\omega t - kr)\right],$$

$$E_r = \frac{Q_0(3\cos^2\vartheta - 1)}{2}\left[\left(\frac{3}{r^4} - \frac{k^2}{r^2}\right)\cos(\omega t - kr) - \frac{3k}{r^3}\sin(\omega t - kr)\right],$$

$$E_\vartheta = \frac{Q_0 \sin 2\vartheta}{4}\left[\left(\frac{6}{r^4} - \frac{3k^2}{r^2}\right)\cos(\omega t - kr) + \left(\frac{k^3}{r} - \frac{6k}{r^3}\right)\sin(\omega t - kr)\right],$$

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{Q_0^2\,\omega^6}{32\pi c^5}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta, \quad \bar{I} = \frac{Q_0^2\,\omega^6}{60 c^5},$$

wobei $Q_0 = 2p_0 a$ ist.

646. Wir wählen das in Abb. 90 dargestellte Koordinatensystem. Die Stromverteilung in der Antenne wird durch die Gleichung

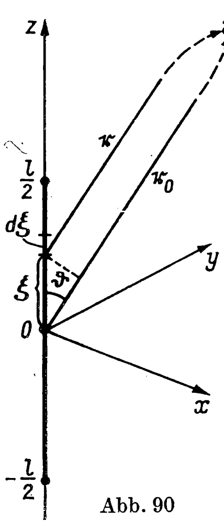


Abb. 90

$$J = J_0 \sin k\left(\xi + \frac{l}{2}\right) e^{-i\omega t}$$

ausgedrückt, wobei $k = \omega/c = m\,\pi/l$ ist.

Das elektrische Dipolmoment je Längeneinheit der Antenne ist nach (12.9) $P = i\,J/\omega$. Das Element $d\xi$ der Antenne kann als elektrischer Dipoloszillator mit dem Moment $dp = P\,d\xi$ betrachtet werden. Da die Ungleichung $d\xi \ll \lambda$ gilt, kann das im Punkt A vom Element $d\xi$ erzeugte Magnetfeld mit Hilfe der Gleichungen (12.17) und (12.20) berechnet werden:

$$d\mathfrak{H}_0(\mathfrak{r}_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2 r} \mathfrak{e}_\alpha \sin\vartheta\, P\left(t - \frac{r}{c}\right) d\xi.$$

Dabei ist $r = r_0 - \xi\cos\vartheta$. Da uns nur das Feld in der Wellenzone interessiert, kann die Größe $\sin\vartheta/r$, die sich im Gebiet $r \gg l$ schwach ändert, vor das Integralzeichen gezogen werden. Damit wird

$$H_r = H_\vartheta = 0,$$

$$H_\alpha = -\frac{i\,\omega\sin\vartheta}{c^2 r_0} J_0\, e^{i(k r_0 - \omega t)} \int\limits_{-l/2}^{l/2} e^{i k \xi \cos\vartheta} \sin m\,\pi\left(\frac{\xi}{l} + \frac{1}{2}\right) d\xi.$$

Die Integration ergibt mit Hilfe der Beziehung

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{c}{4\pi} \overline{H_\alpha^2}\, r_0^2$$

die Winkelverteilung

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \begin{cases} \dfrac{J_0^2}{2\pi c} \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{m\,\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta} & \text{für ungerade } m, \\[2ex] \dfrac{J_0^2}{2\pi c} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta} & \text{für gerade } m. \end{cases}$$

Den Charakter dieser Winkelverteilung kann man aus den in Abb. 91 dargestellten Polardiagrammen ersehen. Die gestrichelten Linien zeigen die Stromverteilung über der Antennenlänge, die ausgezogenen die Winkelverteilung der Strahlungsintensität.

647.
$$\bar{I} = \frac{J_0^2}{2c}\left[\ln(2\pi\,m) + C - \mathrm{Ci}(2\pi\,m)\right],$$

$$R = 2\frac{\bar{I}}{J_0^2} = \frac{1}{c}\left[\ln(2\pi\,m) + C - \mathrm{Ci}(2\pi\,m)\right].$$

648. Man erhält

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2\vartheta \sin^2\left[\frac{k\,l}{2}(1-\cos\vartheta)\right]}{(1-\cos\vartheta)^2},$$

$$\bar{I} = \frac{J_0^2}{c}\left[C - 1 + \ln\frac{4\pi\,l}{\lambda} - \mathrm{Ci}\left(\frac{4\pi\,l}{\lambda}\right) + \frac{\sin(4\pi\,l/\lambda)}{4\pi\,l/\lambda}\right].$$

m=1 m=2 m=4

Abb. 91

Dabei bedeuten $\lambda = 2\pi/k$ die Länge der emittierten Welle und ϑ den Polarwinkel, der von der Koordinatenachse ξ aus gezählt wird.

Man überzeugt sich leicht davon, daß eine fortschreitende Welle intensiver emittiert als eine stehende mit denselben Parameterwerten l, λ und J_0.

649. Ist der Abstand r des Aufpunktes $A\,(r_0, \vartheta, \alpha)$ (Abb. 92) von der Schleife groß ($r \gg a$), so kann man annehmen, daß die Radiusvektoren $\mathfrak{r}$ aller Ringelemente $\mathrm{d}\mathfrak{l}$ parallel sind, wobei

$$r = r_0 - a\cos\varphi = r_0 - a\sin\vartheta\cos(\alpha' - \alpha)$$

ist (s. Aufgabe 1). Das Element $\mathrm{d}\mathfrak{l}$ hat das elektrische Dipolmoment

$$\mathrm{d}\mathfrak{p} = P\,\mathrm{d}\mathfrak{l} = \frac{i}{\omega} J\,\mathrm{d}\mathfrak{l},$$

wobei P das elektrische Dipolmoment je Längeneinheit des Leiters bezeichnet, und erzeugt im Punkt A das Magnetfeld [s. (12.20)]

$$\mathrm{d}\mathfrak{H}(\mathfrak{r}_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}(t') \times \mathfrak{n}}{r} =$$

$$= -i\frac{\omega a}{c^2}\frac{J_0}{r_0} e^{-i\omega t + ikr_0 - iak\sin\vartheta\cos(\alpha'-\alpha)} \times$$

$$\times \sin n\alpha' [\cos(\alpha' - \alpha)\,\mathfrak{e}_\vartheta + \cos\vartheta\sin(\alpha' - \alpha)\,\mathfrak{e}_\alpha]\,\mathrm{d}\alpha'.$$

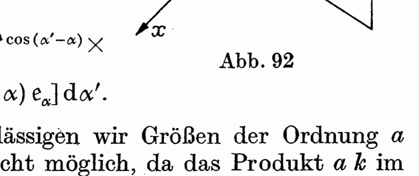


Abb. 92

Im Nenner dieser Gleichung vernachlässigen wir Größen der Ordnung a gegenüber r_0. Das ist im Exponenten nicht möglich, da das Produkt $a\,k$ im allgemeinen nicht klein ist und die Phase wesentlich beeinflußt.

Die Bestimmung des Feldes läuft auf eine Integration hinaus:

$$H_\vartheta = -\frac{i\,\omega\,a}{c^2}\,\frac{J_0}{r_0}\,e^{i(k r_0 - \omega t)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha' - \alpha)\,\sin n\,\alpha'\,e^{-ik a \sin\vartheta \cos(\alpha' - \alpha)}\,d\alpha'.$$

Der Ausdruck für H_α unterscheidet sich von dem für H_ϑ dadurch, daß im Exponenten der Faktor $\cos(\alpha' - \alpha)$ durch $\sin(\alpha' - \alpha)$ ersetzt wird.

Substituiert man die Integrationsvariable $\beta = \alpha' - \alpha$, so ergibt sich

$$H_\vartheta = -\frac{i\,\omega\,a}{c^2}\,\frac{J_0}{r_0}\,e^{i(k r_0 - \omega t)} \Big(\cos n\,\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos\beta\,\sin n\,\beta\,e^{-ik a \sin\vartheta \cos\beta}\,d\beta +$$

$$+ \sin n\,\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos\beta\,\cos n\,\beta\,e^{-ik a \sin\vartheta \cos\beta}\,d\beta\Big).$$

Das erste Integral in der Klammer verschwindet, da der Integrand eine ungerade Funktion ist, während das zweite auf das Intervall $0, \pi$ transformiert (der Integrand ist eine gerade Funktion) und durch die Ableitung einer BESSEL-Funktion ausgedrückt werden kann (s. Anhang III). Damit wird

$$H_\vartheta(r_0, t) = -E_\alpha = \frac{2\pi\,\omega\,a}{c^2}\,\frac{J_0}{r_0}\,e^{i(k r_0 - \omega t - {}^1\!/_2 n\pi)}\,\sin n\,\alpha\,J_n'(k\,a \sin\vartheta).$$

Wegen

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\,J_n(x)$$

erhält man durch analoge Rechnungen

$$H_\alpha(r_0, t) = E_\vartheta = \frac{2\pi\,\omega\,a\,n J_0\,e^{i(k r - \omega t - {}^1\!/_2 n\pi)}}{c^2\,r_0}\,\cos n\,\alpha\,\frac{J_n(k\,a \sin\vartheta)}{k\,a \tan\vartheta}.$$

650. Es ergibt sich

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi\,c^3}\,(1 - \sin^2\vartheta\,\cos^2\alpha)\,\frac{\sin^2\left(\pi\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}\right)},$$

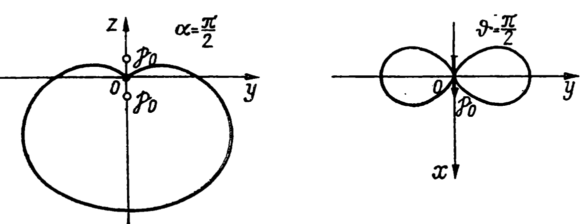


Abb. 93

wobei ϑ und α die Polarwinkel bedeuten, die die Strahlungsrichtung charakterisieren (s. die Polardiagramme in Abb. 93). Der in der Phase vorauseilende Oszillator wurde oben in die Richtung der z-Achse gelegt.

651. Wegen

$$\mathfrak{j} = \varrho\, \mathfrak{v} = \varrho \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

gilt $(j_x, j_y, j_z) \to (-j_x, -j_y, j_z)$; dabei werden die gespiegelten Ströme in den gespiegelten Punkten berechnet: $j_x(\mathfrak{r}) = -j'_x(\mathfrak{r}'), \ldots$

Analog erhält man mit Hilfe der üblichen Definitionen sowie der Gleichungen (12.1), (12.2) in kartesischen Koordinaten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
(p_x, p_y, p_z) &\to (-p_x, -p_y, p_z), \\
(Q_x, Q_y, Q_z) &\to (-Q_x, -Q_y, -Q_z), \\
(m_x, m_y, m_z) &\to (m_x, m_y, -m_z), \\
(E_x, E_y, E_z) &\to (-E_x, -E_y, E_z), \\
(H_x, H_y, H_z) &\to (H_x, H_y, -H_z).
\end{aligned}$$

652. Die Grenzbedingungen $H_n = 0$ und $E_t = 0$ an der Oberfläche ($z = 0$) des Leiters sind erfüllt; das ergibt sich unmittelbar aus den Resultaten der Aufgabe 651. Im Spezialfall des elektrischen Dipoloszillators stimmt das elektromagnetische Feld im Halbraum $z > 0$ mit dem eines elektrischen Dipoloszillators mit dem Moment $\mathfrak{p} = 2\,\mathfrak{e}_z\, f(t) \sin\varphi_0$ überein. Es verschwindet bei $\varphi_0 = 0$ (Dipol parallel zur Ebene) und ist bei $\varphi_0 = \pi/2$ maximal (Dipol senkrecht zur Ebene). Die Gesamtenergie, die im letzten Fall in den Halbraum $z > 0$ emittiert wird, ist viermal so groß wie die Strahlungsenergie desselben Oszillators in großer Entfernung von der leitenden Ebene.

653.

$$E_\vartheta = H_\alpha = \frac{\omega^3 p_0 a}{2 c^3 r} \cos 2\vartheta \cos\alpha \cos\omega t',$$

$$E_\alpha = -H_\vartheta = \frac{\omega^3 p_0 a}{2 c^3 r} \cos\vartheta \sin\alpha \cos\omega t',$$

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{p_0^2 a^2 \omega^6}{32 \pi c^6} (\cos^2 2\vartheta \cos^2\alpha + \cos^2\vartheta \sin^2\alpha).$$

654.

b) $$H_r = 0, \quad H_\vartheta = -\frac{i k}{\sin\vartheta} \frac{\partial u}{\partial\alpha}, \quad H_\alpha = i k \frac{\partial u}{\partial\vartheta},$$

$$E_r = k^2 u r + \frac{\partial^2 (u r)}{\partial r^2}, \quad E_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (u r)}{\partial r\, \partial\vartheta},$$

$$E_\alpha = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial^2 (u r)}{\partial r\, \partial\alpha}.$$

656. Man findet

$$u = \frac{p_0}{b}\frac{e^{ikR}}{R} - i\,k\,p_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\frac{h_l^{(1)}(k\,b)}{b} \times$$
$$\times \left.\frac{\dfrac{d[r\,j_l(k\,r)]}{dr}}{\dfrac{d[r\,h_l^{(1)}(k\,r)]}{dr}}\right|_{r=a} h_l^{(1)}(k\,r)\,P_l(\cos\vartheta).$$

Daraus ergeben sich die Felder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mit Hilfe der in der Aufgabe 654 abgeleiteten Beziehungen. Zur Bestimmung der Winkelverteilung der Strahlung muß man den asymptotischen Ausdruck für die sphärischen HANKEL-Funktionen benutzen [s. (A III.19)]. Damit ergibt sich

$$E_\alpha = H_\vartheta = 0,$$

$$H_\alpha|_{r\to\infty} = i\,k\left.\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right|_{r\to\infty} = F(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} = E_\vartheta|_{r\to\infty}$$

mit

$$F(\vartheta) = \frac{p_0\,k^2}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{i^{l-1}}\left.\frac{j_l(k\,b)\dfrac{d[r\,h_l^{(1)}(k\,r)]}{dr} - h_l^{(1)}(k\,b)\dfrac{d[r\,j_l(k\,r)]}{dr}}{\dfrac{d[r\,h_l^{(1)}(k\,r)]}{dr}}\right|_{r=a} \times$$
$$\times\frac{dP_l(\cos\vartheta)}{d\vartheta},$$

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{c}{8\pi}|H_\alpha|^2 r^2 = \frac{c}{8\pi}|F(\vartheta)|^2.$$

12.2. Elektromagnetisches Feld einer beliebig bewegten Punktladung

657. Das Potential φ des von einem Teilchen erzeugten Feldes wird durch das Integral

$$\varphi(\mathfrak{r},t) = \int\frac{\varrho\left(\mathfrak{r}', t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\,dV' = e\int\frac{\delta\left[\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_0\left(t-\dfrac{R}{c}\right)\right]}{R}\,dV' \tag{1}$$

ausgedrückt, wobei $R = |\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|$ ist, zu dessen Berechnung wir die Relation

$$\int f(\mathfrak{R}_1)\,\delta(\mathfrak{R}_1)\,d\mathfrak{R}_1 = f(0)$$

benutzen (s. Anhang I). Substituiert man in (1) die neue Variable $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r}_0(t - R/c)$, so wird

$$\varphi(\mathfrak{r},t) = e\int\frac{\delta(\mathfrak{R}_1)\,d\mathfrak{R}_1}{R - \dfrac{\mathfrak{v}\,\mathfrak{R}}{c}} = \left.\frac{e}{R - \dfrac{\mathfrak{v}\,\mathfrak{R}}{c}}\right|_{\mathfrak{R}_1=0} \tag{2}$$

Die Funktionaldeterminante der Transformation ist

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{R}_1}{\partial \mathfrak{r}'}\right| = 1 - \frac{\mathfrak{v}\,\mathfrak{R}}{c R}. \tag{3}$$

Die Bedingung $\mathfrak{R}_1 = 0$ bedeutet, daß sich alle Größen auf der rechten Seite von (2) auf den Punkt $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0(t - R/c)$ beziehen, in dem sich die Ladung im retardierten Zeitpunkt $t' = t - R/c$ befindet. Im Falle des Vektorpotentials verlaufen die Rechnungen analog.

658. Man erhält

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\varrho\left(\mathfrak{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}\,\mathrm{d}V' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n\, n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int R^{n-1}\,\varrho(\mathfrak{r}', t)\,\mathrm{d}V' =$$

$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n R_0^{n-1}}{\mathrm{d}t^n}$$

mit $R_0 = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0(t)|$ und

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+1}\, n!} \frac{\mathrm{d}^n(\mathfrak{v}(t)\, R_0^{n-1})}{\mathrm{d}t^n}.$$

Alle Größen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen werden in denselben Zeitpunkten genommen wie auf den linken Seiten. Die retardierte Wechselwirkung reduziert sich formal auf eine momentane. Man kann die erhaltenen Entwicklungen bei genügend langsamer ($v \ll c$) und gleichmäßiger Bewegung (die Beschleunigung und ihre Ableitungen beliebiger Ordnung sind beschränkt) für nicht zu große R benutzen.

661. Für kleine v/c lauten die Gleichungen (12.25)

$$\mathfrak{E} = \frac{e\,\mathfrak{r}}{r^3} + 3\,\frac{e\,\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{v})}{c\, r^4} - \frac{e\,\mathfrak{v}}{c\, r^2} + \frac{e\,\mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{v}})}{c^2\, r^3}\Bigg|_{t' = t - \frac{r}{c}},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{e\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}}{c\, r^3} + \frac{e\,\dot{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{r}}{c^2\, r^2}\Bigg|_{t' = t - \frac{r}{c}}.$$

Dabei ist r der Abstand zwischen irgendeinem Punkt des Gebietes, in dem die Bewegung der Ladung erfolgt, und dem Aufpunkt.

Die ersten drei Terme des Ausdrucks für $\mathfrak{E}$ und der erste Term von $\mathfrak{H}$ sind $1/r^2$ proportional und überwiegen bei verhältnismäßig kleinen Abständen von der Ladung (in der quasistationären Zone). Das elektrische Feld in dieser Zone reduziert sich im wesentlichen auf das Coulomb-Feld $\mathfrak{E} = e\,\mathfrak{r}/r^3$, während das Magnetfeld durch das Biot-Savartsche Gesetz $\mathfrak{H} = e\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}/c\, r^3$ beschrieben wird. In großen Abständen von der Ladung (in der Wellenzone) dominieren die letzten Terme der Ausdrücke für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, die mit $1/r$ abnehmen. Sie beschreiben das Strahlungsfeld und haben die Form

$$\mathfrak{E} = \frac{e\,\mathfrak{n} \times (\mathfrak{n} \times \dot{\mathfrak{v}})}{c^2\, r}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{e\,\dot{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{n}}{c^2\, r},$$

wobei $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}/r$ ist.

Die Grenze zwischen quasistationärer und Wellenzone wird durch die Bedingung

$$\frac{e/r_{\mathrm{gr}}^2}{e\,|\dot{\mathfrak{v}}|/c^2\, r_{\mathrm{gr}}} \approx 1$$

bestimmt. Daraus folgt

$$r_{\mathrm{gr}} \approx a\left(\frac{c^2}{v^2}\right),$$

wenn man $|\dot{\mathfrak{v}}| \sim v^2/a$ berücksichtigt, wobei a die Größenordnung der Ausdehnung des Gebietes bezeichnet, in dem sich die Ladung bewegt.

662. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}(\dot{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{n})^2, \qquad I = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathfrak{v}}^2$$

mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}/r$.

663.

a) Die Energiemenge $-\mathrm{d}E$, die in der Zeit $\mathrm{d}t'$ durch das Teilchen in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ emittiert wird, bewegt sich innerhalb der Zeit $\mathrm{d}t$ am Aufpunkt vorbei. Folglich gilt

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}.$$

Wegen $t = t' + R/c$ und der Beziehung $\partial R/\partial t' = -\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{R}/R$ erhält man

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'\left(1 - \frac{\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}}{c}\right).$$

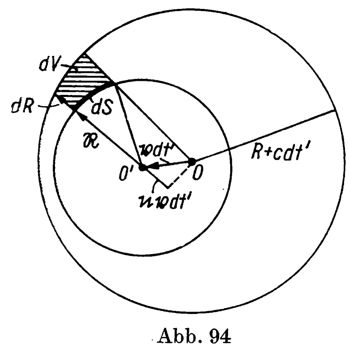


Abb. 94

Daraus folgt schließlich

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\Omega} = \left(1 - \frac{\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}.$$

b) Die Energie, die die Ladung im Laufe der Zeit $\mathrm{d}t'$ emittiert, ist im Innern zweier Kugeln eingeschlossen. Mittelpunkt der ersten Kugel ist der Punkt O, in dem sich die Ladung zur Zeit t' befindet, und Mittelpunkt der zweiten ist der Punkt O', in dem die Ladung zur Zeit $t' + \mathrm{d}t'$ liegt (Abb. 94). Die erste Kugel hat den Radius R, die zweite den Radius $R + c\,\mathrm{d}t'$. Wir betrachten das Volumenelement

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\,\mathrm{d}R = R^2\,\mathrm{d}\Omega\,(c - \mathfrak{n}\,\mathfrak{v})\,\mathrm{d}t'.$$

In ihm ist die elektromagnetische Energie

$$\mathrm{d}W = \frac{\mathfrak{E}^2}{4\pi}\mathrm{d}V = \frac{c\,\mathfrak{E}^2}{4\pi}\left(1 - \frac{\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}}{c}\right)R^2\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t'$$

enthalten. Daraus ergibt sich für den Energieverlust je Zeiteinheit

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega},$$

d.h. gerade die oben angegebene Größe.

666.

a) $$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'}=\frac{2e^2}{3c^3}\gamma^6\left[\dot{\mathfrak{v}}^2-\left(\dot{\mathfrak{v}}\times\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)^2\right],$$

b) $$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'}=\frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{\left(\mathfrak{E}+\frac{\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}}{c}\right)^2-\frac{(\mathfrak{E}\,\mathfrak{v})^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

667. Man erhält

$$-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t'}=-\frac{\mathfrak{v}}{c^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'},$$

wobei $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t' bezeichnet.

668. Wir vergleichen den Energieverlust des Teilchens je Zeiteinheit im momentanen Ruhsystem S_0, in dem das Teilchen in einem vorgegebenen Zeitpunkt ruht, und im Laborsystem S, in dem das Teilchen die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat. Da die Strahlung im Bezugssystem S_0 eine elektrische Dipolstrahlung ist, verliert das Teilchen in S_0 keinen Impuls. Das ergibt sich, weil die Winkelverteilung der Strahlung in S_0 zentralsymmetrisch ist (oder wegen des Ergebnisses der Aufgabe 667).

Wir betrachten die Energiemenge $-\mathrm{d}E_0$, die das Teilchen in der Zeit $\mathrm{d}t_0'=\mathrm{d}\tau$ im System S_0 emittiert. Dabei wird im System S innerhalb der Zeit $\mathrm{d}t'=\mathrm{d}\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$ der Energieverlust $-\mathrm{d}E=-\mathrm{d}E_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ beobachtet. Für den Energieverlust je Zeiteinheit ergibt sich daraus

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'}=-\frac{\mathrm{d}E_0/\sqrt{1-v^2/c^2}}{\mathrm{d}\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}}=-\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}\tau}.$$

Das Ergebnis hängt nicht von v ab. Das bedeutet, daß der über alle Richtungen summierte Energieverlust je Zeiteinheit in allen Bezugssystemen gleich ist.

Die Gesamtintensität der Strahlung im Zeitpunkt t ergibt sich als Integral der Normalkomponente des Poyntingschen Vektors über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R, deren Mittelpunkt in dem Punkt liegt, in dem sich das Teilchen im retardierten Zeitpunkt $t'=t-R/c$ befand. Im Unterschied zur invarianten Größe $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t'$ hat die Strahlungsintensität nicht die einfachen Eigenschaften der relativistischen Transformation beim Übergang von einem Bezugssystem in ein anderes.

669. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}\,\mathfrak{E}^2 R^2 = \frac{e^2\,\dot{v}^2 \sin^2\vartheta}{4\pi\,c^3(1-\beta\cos\vartheta)^6},$$

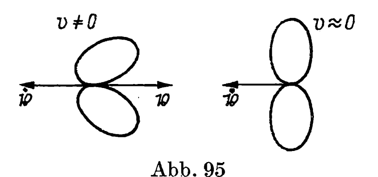


Abb. 95

wobei ϑ den Winkel zwischen der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Strahlungsrichtung $\mathfrak{n}$ bedeutet und $\beta = v/c$ ist. Das Winkeldiagramm der Strahlung ist in Abb. 95 dargestellt. Bei kleiner Geschwindigkeit v des Teilchens haben Vorwärts- und Rückwärtsstrahlung gleiche Intensität. Für $v \approx c$ überwiegt die Vorwärtsstrahlung um so mehr, je näher v dem Wert c kommt. Das Strahlungsmaximum wird in der Richtung ϑ_0 mit

$$\cos\vartheta_0 = \frac{1}{4\beta}\left(\sqrt{1+12\beta^2}-1\right)$$

beobachtet. Es gilt $\vartheta_0 \to \pi/2$ für $\beta \to 0$ und $\vartheta_0 \to 0$ für $\beta \to 1$. Die Gesamtintensität der Strahlung ist

$$I = \int \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{2e^2\,\dot{v}^2}{3c^3}\,\frac{1+\beta^2/5}{(1-\beta^2)^4}.$$

Der Gesamtenergieverlust je Zeiteinheit ergibt sich zu

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{\dot{v}^2}{(1-\beta^2)^3}.$$

670. Die Gesamtbremsstrahlung in der Richtung $\mathrm{d}\Omega$ während der Flugdauer des Teilchens ist

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W}{\mathrm{d}\Omega} = \int \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}t = \int\left(-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t'}\right)\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{e^2\,v_0^2}{16\pi\,c^3\,\tau}\,\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v_0}{c}\cos\vartheta\right)^4}-1\right],$$

wobei ϑ den Winkel zwischen der Geschwindigkeitsrichtung des Teilchens und der Strahlungsrichtung $\mathfrak{n}$ bezeichnet.

Die beobachtete Impulsdauer hängt vom Winkel ϑ zwischen der Geschwindigkeit des Teilchens und der Strahlungsrichtung ab:

$$\Delta t = \tau\left(1-\frac{v_0}{2c}\cos\vartheta\right).$$

671.

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^4H^2\,p^2}{3m^4\,c^5}.$$

672. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2|\dot{\mathfrak{v}}|^2}{4\pi\,c^3}\,\frac{(1-\beta\cos\vartheta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\vartheta\cos^2\alpha}{(1-\beta\cos\vartheta)^6},$$

wobei $\beta = v/c$ ist. Die Polarachse hat die Richtung der Geschwindigkeit, und das Azimut α wird von der Beschleunigungsrichtung aus gezählt. Die Winkelverteilung der Strahlung ist in Abb. 96 dargestellt. In den Richtungen, die durch die Gleichung

$$\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right) = \sin\vartheta\,|\cos\alpha|$$

bestimmt werden, tritt keine Strahlung auf. Insbesondere wird bei $\alpha = 0, \pi$ (Abb. 96a) in der Richtung $\vartheta = \arccos(v/c)$ keine Strahlung emittiert. Bei

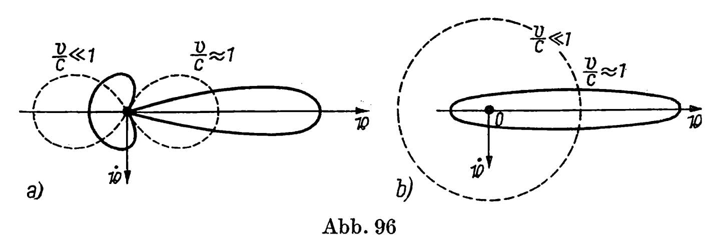


Abb. 96

$\alpha = \pi/2, 3\pi/2$ (Abb. 96b) ist die Strahlungsintensität für alle ϑ von Null verschieden.

673. Es ergibt sich

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = -\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t'}} = \frac{e^4 H^2 \beta^2}{8\pi^2 m^2 c^3}(1-\beta^2)\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} \frac{(1-\beta^2)\cos^2\vartheta + (\beta - \sin\vartheta\cos\alpha)^2}{(1-\beta\sin\vartheta\cos\alpha)^5}\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{e^4 H^2 \beta^2 (1-\beta^2)}{8\pi\, m^2 c^3}\;\frac{1+\cos^2\vartheta - \frac{1}{4}\beta^2(1+3\beta^2)\sin^4\vartheta}{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{7/2}}$$

mit $\beta = v/c$.

Der Anfangspunkt des Azimutwinkels α im Integranden ist so gewählt, daß die Richtung des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ durch die Polarwinkel ϑ, $\pi/2$ charakterisiert wird. Im extrem relativistischen Fall $v \approx c$ ist die Strahlung in der Nähe der Bahnebene im Winkelintervall $\Delta\vartheta \approx (1-\beta^2)^{1/2}$ konzentriert.

674. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} A_{n\vartheta} &= \frac{e\beta\,\mathrm{e}^{ikR_0}}{2\pi R_0}\cos\vartheta\int_0^{2\pi}\cos\alpha'\,\mathrm{e}^{i(n\alpha' - n\beta\sin\vartheta\sin\alpha')}\,\mathrm{d}\alpha', \\ A_{n\alpha} &= \frac{e\beta\,\mathrm{e}^{ikR_0}}{2\pi R_0}\int_0^{2\pi}\sin\alpha'\,\mathrm{e}^{i(n\alpha' - n\beta\sin\vartheta\sin\alpha')}\,\mathrm{d}\alpha'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Der Wellenvektor ist $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}\,\omega/c$, der Koordinatenursprung liegt im Bahnzentrum, die z-Achse steht auf der Bahnebene senkrecht, und die Richtung von $\mathfrak{k}$ wird durch die Polarwinkel ϑ, $\pi/2$ charakterisiert; R_0 bezeichnet den Abstand zwischen Bahnzentrum und Aufpunkt. Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} H_{n\alpha} &= i\frac{\omega}{c} n A_{n\vartheta} \approx i\frac{\beta e n\, e^{ikR_0}}{aR_0}\cot\vartheta\, J_n(n\beta\sin\vartheta), \\ H_{n\vartheta} &= -i\frac{\omega}{c} n A_{n\alpha} = \frac{e\beta^2 n\, e^{ikR_0}}{aR_0} J_n'(n\beta\sin\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Polarisation der Strahlung erweist sich im allgemeinen als elliptisch, wobei die Hauptachsen die Richtung von $\mathfrak{e}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{e}_\vartheta$ haben und das Verhältnis $H_{n\vartheta}/H_{n\alpha}$ der Halbachsen gleich

$$\beta\tan\vartheta\,\frac{J_n'(n\beta\sin\vartheta)}{J_n(n\beta\sin\vartheta)}$$

ist. Das Vorzeichen dieses Verhältnisses bestimmt die Umlaufsrichtung auf der Ellipse. Bei $\vartheta = 0$ ist die Polarisation zirkular und bei $\vartheta = \pi/2$ linear. Bei genügend großen n und β ergibt sich auch in den Richtungen, denen Nullstellen oder Pole der Funktion J_n'/J_n entsprechen, lineare Polarisation.

675. Das Vorhandensein von höheren FOURIER-Komponenten im Spektrum des Feldes wird dadurch erklärt, daß die Ausbreitungszeit des Feldes zwischen gleichen Punkten der Bahn endlich und im allgemeinen mit der Umlaufperiode der Ladung auf der Bahn vergleichbar ist, wenn die Geschwindigkeit der Ladung mit der Lichtgeschwindigkeit c vergleichbar ist. Infolgedessen ist die Durchgangszeit durch den Aufpunkt des vom Teilchen ausgestrahlten Feldes während der Halbperiode, in der es sich diesem Punkt nähert, kleiner als die Durchgangszeit des während der zweiten Halbperiode ausgestrahlten Feldes durch diesen Punkt. Der einfachen harmonischen Zeitabhängigkeit der Teilchenkoordinaten entspricht demnach eine komplizierte periodische Zeitabhängigkeit des Feldes, die durch eine Superposition mehrerer FOURIER-Komponenten dargestellt wird.

Es ist zu erwarten, daß die höheren FOURIER-Komponenten bei $\beta \to 0$ verschwinden. In der Tat ist bei $x \approx 0$, $n > 0$ (s. Anhang III)

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}, \qquad J_n'(x) \approx \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!}.$$

Diese Beziehungen zeigen, daß bei $\beta \to 0$ nur die Komponenten mit dem kleinstmöglichen Wert $|n| = 1$ von Bedeutung sind. Dabei ist (s. die Lösung der Aufgabe 634)

$$H_\alpha = H_{1\alpha} + H_{-1\alpha} = -\frac{e\beta^2}{a}\frac{\cos\vartheta\sin kR_0}{R_0},$$

$$H_\vartheta = H_{1\vartheta} + H_{-1\vartheta} = \frac{e\beta^2}{a}\frac{\cos kR_0}{R_0}.$$

676. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathfrak{H}_n|^2 R_0^2 = \frac{c\, n^2 e^2 \beta^2}{2\pi a^2} [\cot^2\vartheta J_n^2(n\beta\sin\vartheta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta\sin\vartheta)].$$

Erfolgt die Bewegung auf dem Kreis unter der Wirkung eines konstanten Magnetfeldes H, so gilt

$$a = \frac{m c^2 \beta}{eH\sqrt{1-\beta^2}}.$$

677. Bei der Lösung der Aufgabe 674 ergaben sich die Beziehungen (2) für die n-te FOURIER-Komponente des Strahlungsfeldes einer Ladung. Diese Komponenten unterscheiden sich für verschiedene Ladungen offenbar nur durch ihre Anfangsphasen voneinander. Wir bezeichnen mit ψ_l die Phasenverschiebung des Feldes des l-ten Elektrons gegenüber dem Feld des ersten Elektrons und schreiben das resultierende Feld in reeller Form:

$$H_{n\vartheta} = \frac{e\beta^2 n}{aR_0} J_n'(n\beta\sin\vartheta) \sum_{l=1}^{N} \cos n\left(\omega t - \frac{\omega R_0}{c} + \psi_l\right).$$

Für $H_{n\alpha}$ ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck. Der Mittelwert der Strahlungsintensität während der Periode $T = 2\pi/\omega$ ist

$$\mathrm{d}I_{nN} = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{T}\int_0^T (H_{n\vartheta}^2 + H_{n\alpha}^2)\,\mathrm{d}t R_0^2\,\mathrm{d}\Omega = S_N\,\mathrm{d}I_n.$$

Dabei bedeuten $\mathrm{d}I_n$ die in der vorigen Aufgabe bestimmte Strahlungsintensität eines Elektrons und S_N einen Koeffizienten, der die Interferenz der Elektronenfelder berücksichtigt („Kohärenzfaktor"):

$$S_N = N + \sum_{\substack{l,l'=1\\(l\neq l')}}^{N} \cos n(\psi_l - \psi_{l'}).$$

Für die in der Aufgabenstellung genannten Spezialfälle ergibt sich:

a) $\sum \cos n(\psi_l - \psi_{l'}) = 0.$

b) Bei gleichförmiger Verteilung der Elektronen auf der Bahn ist $\psi_l = 2\pi(l-1)/N$ und

$$S_N = N\sum_{l=2}^{N} \cos 2\pi(l-1)\frac{n}{N} = \frac{N}{2}\left[\sum_{l=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi(l-1)ni/N} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{N} \mathrm{e}^{-2\pi(l-1)ni/N}\right] = N(-1)^n \frac{\sin n\pi}{\tan\frac{n\pi}{N}} = \begin{cases} 0 & \text{für nichtganze } \frac{n}{N}, \\ N^2 & \text{für ganze } \frac{n}{N}. \end{cases}$$

c) Bilden die Elektronen eine Wolke, so sind alle Differenzen $\psi_l - \psi_{l'}$ klein. Für nicht zu große n, bei denen die Abmessungen der Wolke klein gegen die entsprechende Wellenlänge sind, kann man alle Werte $\cos n(\psi_l - \psi_{l'})$ in S_N

gleich 1 setzen. Dann gilt $S_N = N^2$. Mit wachsendem n nimmt S_N ab; der Wert hängt dabei von der Elektronenverteilung in der Wolke ab und kann nicht in allgemeiner Form angegeben werden.

678. Wir legen den Koordinatenursprung in den Massenmittelpunkt des Ladungssystems. Dann ist das elektrische Dipolmoment des Systems

$$\mathfrak{p} = e_1 \mathfrak{r}_1 + e_2 \mathfrak{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathfrak{r} \tag{1}$$

mit $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

Da die Verhältnisse e/m verschieden sind, gilt $\mathfrak{p} \neq 0$, und das System wird im wesentlichen wie ein elektrischer Dipol ausstrahlen ($v/c \ll 1$). Die momentane Intensität ist

$$I(t) = \frac{2\ddot{\mathfrak{p}}^2}{3c^3} = \frac{2\mu^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ddot{\mathfrak{r}}^2(t').$$

Gemäß der Bewegungsgleichung der Ladungen gilt $\mu \ddot{\mathfrak{r}} = e_1 e_2 \mathfrak{r}/r^3$ und damit

$$I = \frac{2e_1^2 e_2^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \frac{1}{r^4}.$$

Bei der Berechnung der zeitlich gemittelten Strahlungsintensität

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I \, \mathrm{d}t'$$

ersetzen wir die Integration über t' mit Hilfe der Gleichung $\mathrm{d}t' = \mu r^2 \, \mathrm{d}\alpha/L$ durch eine Integration über den Winkel α ($\mathfrak{L}$ ist der Drehimpuls des Systems) und benutzen die Bahngleichung. Es ergibt sich

$$\bar{I} = \frac{2^{3/2}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^{5/2} |e_1 e_2|^3 \, |E|^{3/2}}{L^5} \left(3 - \frac{2|E| L^2}{\mu e_1^2 e_2^2} \right).$$

679.

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\mathfrak{L}}{\mathrm{d}t}} = - \frac{2^{7/2} \mu^{3/2} |E|^{3/2}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mathfrak{L}}{L^3}.$$

680. Wir gehen ähnlich vor wie bei der Lösung der Aufgabe 678 und schreiben die zweite Ableitung des Dipolmoments in der Form

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \frac{e_1 e_2 \mathfrak{r}}{r^3}. \tag{1}$$

Die Berechnung von A ist nicht schwierig. Zur Berechnung von B muß man $\ddot{p}_z$, die Projektion von $\ddot{\mathfrak{p}}$ auf die ursprüngliche Bewegungsrichtung der streuenden Teilchen, als Funktion der Koordinaten r, α kennen (Polarkoordinaten in der Ebene der Relativbewegung der Teilchen). Dabei wird der Winkel α in der Bahngleichung $-1 + \varepsilon \cos\alpha = a(\varepsilon^2 - 1)/r$ der Relativbewegung von der Symmetrieachse (z'-Achse) der Bahn aus gezählt. Es gilt also $y' = r \sin\alpha$ und $z' = r \cos\alpha$. Der Winkel zwischen der z- und der z'-Achse ist $\pi - \alpha_0$

$(\cos\alpha_0 = 1/\varepsilon)$, so daß

$$z = -z'\cos\alpha_0 - y'\sin\alpha_0 = -r\left(\frac{1}{\varepsilon}\cos\alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon}\sin\alpha\right)$$

gilt. Da $\sin\alpha$ eine ungerade Funktion ist, erhält man mit Gleichung (1)

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{p}_z^2\,\mathrm{d}t\,s\,\mathrm{d}s = e_1^2 e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2\alpha + (\varepsilon^2-1)\sin^2\alpha}{\varepsilon^2 r^4}\,\mathrm{d}t\,s\,\mathrm{d}s.$$

Wir drücken $\cos^2\alpha$ und $\sin^2\alpha$ mit Hilfe der Bahngleichung durch r und ε aus und substituieren $\varepsilon^2 = u$, $s\,\mathrm{d}s = {}^1/_2 a^2\,\mathrm{d}u$. Damit nimmt das Integral die Form

$$\frac{a}{v_0}\int_{2a}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^3}\int_1^{(r/a-1)^2}\left[-\frac{a^2}{r^2}u + \left(4\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} + 1\right) + \right.$$
$$\left. + \left(-5\frac{a^2}{r^2} + 6\frac{a}{r} - 2\right)\frac{1}{u} + 2\left(\frac{a}{r} - 1\right)^2\frac{1}{u^2}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}-1\right)^2 - u}}$$

an. Bei der Integration über $\mathrm{d}u$ ergibt sich ein logarithmischer Term, der durch partielle Integration umgeformt werden kann. Zur Berechnung des äußeren Integrals über $\mathrm{d}r$ substituiert man die Variable $x = 2a/r$, wodurch sich das Integral auf eine Summe mehrerer B-Funktionen

$$\mathrm{B}(k,l) = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}$$

reduziert.

Damit erhält man schließlich

$$A = \frac{8\pi}{9} e_1 e_2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \mu\, v_0,$$
$$B = 0.$$

681. In der betrachteten Näherung gilt $v = \mathrm{const}$, und die Teilchenbahn stellt eine Gerade dar. Die Bewegung des Teilchens erfolge in der xz-Ebene parallel zur z-Achse. In diesen Koordinaten ist

$$\mathfrak{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

mit

$$n_x = \sin\vartheta\cos\alpha,\quad n_y = \sin\vartheta\sin\alpha,\quad n_z = \cos\vartheta$$

und

$$\mathfrak{r} = (s, 0, vt'),\qquad r = \sqrt{s^2 + v^2 t'^2},\qquad \mathfrak{v} = (0, 0, v).$$

Aus der bekannten Beziehung $\mathfrak{v} = c^2\,\mathfrak{p}/E$, in der $E = m c^2/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$ ist, erhalten wir

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{c^2\,\dot{\mathfrak{p}}}{E} - \frac{c^2\,\mathfrak{p}\,\dot{E}}{E^2}.$$

Gemäß der Bewegungsgleichung des Teilchens gilt $\dot{\mathfrak{p}} = e_1 e_2 \mathfrak{r}/r^3$. Auf Grund des Energiesatzes ist $E + e_1 e_2/r = \text{const}$. Differenziert man dies nach t', so erhält man

$$\dot{E} = \frac{e_1 e_2 \dot{r}}{r^2} = \frac{e_1 e_2 \mathfrak{r}\mathfrak{v}}{r^3},$$

so daß

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{e_1 e_2 c^2}{E}\left[\mathfrak{r} - \frac{\mathfrak{p}(\mathfrak{r}\mathfrak{v})}{E}\right] = \frac{e_1 e_2 c^2}{E r^3}\left[s\,\mathfrak{e}_x + v\,t'(1-\beta^2)\,\mathfrak{e}_z\right]$$

wird. Setzt man die erhaltenen Ausdrücke in (12.26) ein, so folgt

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2 c^4}{4\pi c^3 E^2 (1-\beta n_z)^5}\left\{s^2[(1-\beta n_z)^2 - n_x^2(1-\beta^2)] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t'}{(s^2+v^2t'^2)} + c^2\beta^2(1-\beta^2)^2(1-n_z)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t'^2\,\mathrm{d}t'}{(s^2+v^2t'^2)^3}\right\}$$

und daraus durch Integration

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2(1-\beta^2)}{32 m^2 c^3 s^3 v (1-\beta n_z)^5}\left[4 - 3n_x^2 - n_z^2 - 6\beta n_z + \right.$$

$$\left. + \beta^2(-2 + 3n_x^2 + 5n_z^2) + \beta^4(1-n_z^2)\right]. \qquad (1)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall $\beta \to 0$ wird

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2}{32 m^2 c^3 s^3 v}(4 - 3n_x^2 - n_z^2),$$

im extrem relativistischen Fall $\beta \approx 1$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3 e_1^4 e_2^2 (1-\beta)}{2^9 m^2 c^4 s^3 \sin^4(\vartheta/2)}.$$

Diese Beziehung wird bei $\vartheta \leqq \sqrt{1-\beta}$ falsch. In diesem Fall muß der exakte Ausdruck (1) benutzt werden.

682. Man erhält in beiden Fällen

$$\Delta W = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12 m^2 c^3 s^3 v}\,\frac{4-\beta^2}{1-\beta^2}, \qquad \Delta\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{v}\,\Delta W}{c^2}.$$

683.

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{8 e_1^4 e_2^2 \omega^2 c}{3\pi v^4}\left[K_1^2\left(\frac{\omega s}{v}\right) + K_0^2\left(\frac{\omega s}{v}\right)\right].$$

684. Die Bedingung für die Anwendbarkeit der Gleichung (12.33) ist für alle Frequenzen ω erfüllt, da die Stoßzeit τ gleich Null ist. Bei der Streuung an einer harten Kugel ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel, so daß

$$|\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1|^2 = 2v\sin\frac{\vartheta}{2}$$

gilt, wobei ϑ den Streuwinkel bedeutet; ϑ hängt durch die Beziehung $s = a \sin(\vartheta/2)$ für $s \leqq a$ mit dem Stoßparameter s zusammen. Bei $s > a$ wird das Teilchen nicht gestreut. Daraus folgt

$$\mathrm{d}\varkappa_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} \cdot 4v^2 \int_0^a \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot 2\pi s \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\omega = \frac{4e^2 a^2 v^2}{3c^3} \mathrm{d}\omega .$$

Die differentielle effektive Ausstrahlung hängt also nicht von der Frequenz ab, und die effektive Gesamtstrahlung ist

$$\varkappa = \int_0^\infty \mathrm{d}\varkappa_\omega \to \infty .$$

Die Divergenz erklärt sich dadurch, daß die Kugel als absolut hart angenommen wurde. Tatsächlich existieren keine absolut harten Körper, sondern es gilt $\tau \neq 0$, und der gefundene Ausdruck für $\mathrm{d}\varkappa_\omega$ ist bei großen Frequenzen ω falsch.

685. Man kann die Gleichung (12.30) für die differentielle effektive Ausstrahlung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\varkappa_\mathfrak{n}}{\mathrm{d}\Omega} = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} \,\mathrm{d}t \, s \,\mathrm{d}s \tag{1}$$

schreiben. Die Strahlungsintensität ist

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2,$$

wobei $\mathfrak{H} = \dot{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{n}/c$ ist.

In Gleichung (1) muß die Strahlungsintensität über alle Richtungen in der zur Stromrichtung der einfallenden Teilchen senkrechten Ebene gemittelt werden. Das Vektorprodukt im Ausdruck für $\mathfrak{H}$ stellt man bei der Mittelung am besten in der Form $H_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \dot{A}_\beta \, n_\gamma / c$ dar, wobei $e_{\alpha\beta\gamma}$ den antisymmetrischen Einheitspseudotensor bedeutet (s. die Aufgaben 24 und 26) und über die doppelt auftretenden Indizes summiert wird. Die Komponenten A_β des Vektorpotentials werden durch die in den Gleichungen (12.19) definierten Komponenten $Q_{\beta\varepsilon}$ des Quadrupolmoments ausgedrückt:

$$A_\beta = \frac{1}{2c^2 r} \ddot{Q}_{\beta\varepsilon} \, n_\varepsilon .$$

Daher gilt

$$H_\alpha = \frac{1}{2c^3 r} e_{\alpha\beta\gamma} \dddot{Q}_{\beta\varepsilon} \, n_\gamma \, n_\varepsilon$$

und

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{1}{16\pi c^5} \dddot{Q}_{\beta\varepsilon} \dddot{Q}_{\beta'\varepsilon'} \, e_{\alpha\beta\gamma} \, e_{\alpha\beta'\gamma'} \, \overline{n_\gamma \, n_\varepsilon \, n_{\gamma'} \, n_{\varepsilon'}} .$$

Wir benutzen Polarkoordinaten, wobei die Polarachse die Richtung des einfallenden Stromes hat und der Pol in dem Punkt liegt, in dem sich das Teilchen mit der Ladung e_2 und der Masse m_2 befindet. Die Mittelung muß bei festen Werten der Komponenten $n_z \equiv n_3 = \cos\vartheta$ durchgeführt werden (ϑ gibt die Strahlungsrichtung an). Wie man leicht sieht, ist

$$\left.\begin{aligned} \overline{n_i n_k} &= \frac{1}{2}\,\delta_{ik}(1-n_3^2), \\ \overline{n_i n_k n_l n_m} &= \frac{1}{8}\,(\delta_{ik}\,\delta_{lm} + \delta_{il}\,\delta_{km} + \delta_{im}\,\delta_{kl})\,(1-n_3^2)^2, \\ \overline{n_i} &= \overline{n_i n_k n_l} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei die Indizes i, k, l die Werte 1 und 2 annehmen.

Mit Hilfe von (2) und der Identität

$$e_{\alpha\beta\gamma}\,e_{\alpha\beta'\gamma'} = \delta_{\beta\beta'}\,\delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'}\,\delta_{\gamma\beta'}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{1}{16\pi c^5}\Big\{&(\dddot{Q}^2_{\beta 3} - \dddot{Q}^2_{33})\cos^4\vartheta + \\ &+ \frac{1}{2}(\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} - 3\dddot{Q}^2_{\beta 3} + 6\dddot{Q}^2_{33} - 2\dddot{Q}_{33}\,\dddot{Q}_{\beta\beta})\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \\ &+ \frac{1}{8}(2\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} - \dddot{Q}^2_{\beta\beta} - 3\dddot{Q}^2_{33} + 2\dddot{Q}_{33}\,\dddot{Q}_{\beta\beta})\sin^4\vartheta\Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man (3) in (1) ein, so folgt schließlich

$$\frac{\mathrm{d}\varkappa_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = A + BP_2(\cos\vartheta) + CP_4(\cos\vartheta), \tag{4}$$

wobei P_2 und P_4 Legendresche Polynome bezeichnen (s. Anhang II) und

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{120c^5}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty}[3\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} - \dddot{Q}^2_{\beta\beta}]\,s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \\ B &= \frac{1}{168c^5}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty}[-3\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} + 2\dddot{Q}^2_{\beta\beta} + 9\dddot{Q}^2_{\beta 3} - 6\dddot{Q}_{33}\,\dddot{Q}_{\beta\beta}]\,s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \\ C &= \frac{1}{280c^5}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty}[-2\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} + 2\dddot{Q}^2_{\beta 3} - \dddot{Q}^2_{\beta\beta} - \\ &\qquad - 35\dddot{Q}^2_{33} + 10Q_{33}\,\ddot{Q}_{\beta\beta}]\,s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist.

686. Die effektive Gesamtstrahlung ist

$$\varkappa = \int \frac{d\varkappa_n}{d\Omega} d\Omega .$$

Auf Grund der in der vorigen Aufgabe abgeleiteten Gleichungen (4) und (5) kann man schreiben (s. Anhang II)

$$\varkappa = 4\pi A = \frac{\pi}{30c^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} [3\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \dddot{Q}^2_{\beta\beta}]\, s\, ds\, dt. \tag{1}$$

Wir bezeichnen die kartesischen Komponenten des relativen Radiusvektors der Teilchen mit x_α und die Komponenten der Relativgeschwindigkeit der Teilchen mit $v_\alpha = \dot{x}_\alpha$. Dann ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung für die Relativbewegung der Teilchen

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2 x_\alpha}{m r^3}, \quad \dddot{x}_\alpha = \frac{2e^2}{m} \frac{r x_\alpha - 3x_\alpha v_r}{r^6}$$

mit $v_r = \dot{r}$. Setzt man dies in (1) ein und führt die Azimutkomponente v_α der Relativgeschwindigkeit der Teilchen ein ($v^2 = v_\alpha^2 + v_r^2$), so erhält man

$$\varkappa = \frac{4\pi e^6}{15m^2 c^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{v^2 + 11 v_\alpha^2}{r^4}\, s\, ds\, dt. \tag{2}$$

Wegen des Energie- und Drehimpulssatzes ist $v^2 = v_0^2 - 4e^2/m r$ und $v_\alpha = v_0 s/r$. Durch Ausführung der Integrationen in (2) [dabei integriert man statt über dt über dr mit $dt = dr/v_r = dr/(v^2 - v_\alpha^2)^{1/2}$; die Reihenfolge der Integrationen ist dann beliebig] ergibt sich schließlich

$$\varkappa = \frac{4\pi}{9} \frac{e^4 v_0^3}{m c^5}.$$

12.3. Wechselwirkung geladener Teilchen mit Strahlung

687. Der Impuls des Feldes eines sich bewegenden Teilchens ist

$$\mathfrak{G} = \int \mathfrak{g}\, dV,$$

wobei $\mathfrak{g} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}/4\pi c$ ist und über den gesamten Raum integriert wird. Das Magnetfeld eines sich bewegenden Teilchens ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{E}/c$, da im Ruhsystem des Teilchens (S') kein Magnetfeld vorhanden ist. Daraus folgt

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c^2} [\mathfrak{v} E^2 - \mathfrak{E}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{E})].$$

Mit Hilfe der Gleichungen (10.25) erhält man

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(die x-Achse hat die Richtung von $\mathfrak{v}$). Das Volumenelement ist (infolge der LORENTZ-Kontraktion) $\mathrm{d}V = \mathrm{d}V' \sqrt{1-\beta^2}$. Daher wird

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{v}}{4\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \int (E'^2_y + E'^2_z)\,\mathrm{d}V' = \frac{\mathfrak{v}}{4\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \frac{2}{3} \int E'^2 \,\mathrm{d}V'. \quad (1)$$

Die letzte Umformung ergibt sich auf Grund der Kugelsymmetrie des Feldes im System S'.

Nimmt man an, daß die Ruhmasse des Teilchens rein elektromagnetischen Ursprungs ist, d.h. die Masse seines elektromagnetischen Feldes darstellt, die durch die EINSTEINsche Beziehung $W' = m_0 c^2$ definiert ist, so muß

$$m_0 = \frac{1}{c^2} \frac{1}{8\pi} \int E'^2 \,\mathrm{d}V' \quad (2)$$

sein. Dabei muß der Impuls des Feldes gleich $m_0 \mathfrak{v}/\sqrt{1-\beta^2}$ sein; aus Gleichung (1) folgt jedoch, daß das nicht der Fall sein kann.[1]) Der Impuls des Feldes hängt von der Geschwindigkeit v genauso wie im Fall eines Teilchens ab:

$$\mathfrak{G} = \frac{m'_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3)$$

Die „Masse“ $m'_0 = 4m_0/3 \neq m_0$ stimmt jedoch nicht mit der durch (2) definierten Ruhmasse m_0 des Teilchens überein.

Der Faktor $^4/_3$ im Ausdruck für $\mathfrak{G}$ bedeutet, daß Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes eines Teilchens keinen Vierervektor bilden und nicht mit der Energie bzw. dem Impuls des Teilchens selbst identifiziert werden können.

Wir bemerken noch, daß die durch die Gleichung (2) definierte elektromagnetische Masse im Fall eines punktförmigen Teilchens unendlich groß wird.

688. Es ergibt sich

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{8\pi} \int H^2 \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2} \frac{m'_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

wobei die Größe m'_0 in der Lösung der vorigen Aufgabe definiert wurde.

Die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes des Teilchens

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2)\,\mathrm{d}V = m'_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{4}\sqrt{1-\beta^2} \right)$$

hat nicht die Geschwindigkeitsabhängigkeit $m_0 c^2/\sqrt{1-\beta^2}$ wie die Energie eines Teilchens (s. Aufgabe 687).

---

[1]) Die Energie des Feldes müßte unter dieser Annahme gleich $m_0 c^2/\sqrt{1-\beta^2}$ sein, was jedoch — wie in der nächsten Aufgabe gezeigt wird — ebenfalls nicht der Fall sein kann.

689. Wir vernachlässigen Terme der Ordnung v/c und höher und betrachten die Wirkung eines Elementes de_1 auf ein anderes Element de_2. Der COULOMB-Anteil des elektrischen Feldes ist kugelsymmetrisch und trägt nicht zur Selbstkraft bei; das quasistationäre Magnetfeld liefert ebenfalls keinen Beitrag. Es genügt also, den von der Beschleunigung abhängigen Teil $d\mathfrak{E}$ der elektrischen Feldstärke des Elementes de_1 zu betrachten. Am Element de_2 greift die Kraft

$$d\mathfrak{F} = -de_2\, d\mathfrak{E} = \frac{de_1\, de_2}{c^2 r}[\dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{r}_0(\mathfrak{r}_0\, \dot{\mathfrak{v}})]$$

an, wobei $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}/r$ ist und $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor vom Element de_1 zum Element de_2 bedeutet. Am Teilchen greift insgesamt die Kraft

$$\mathfrak{F} = \int d\mathfrak{F} = -\frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}\dot{\mathfrak{v}}$$

an, wobei $W_0 = {}^1/_2 \int (1/r)\, de_1\, de_2$ die Energie des elektromagnetischen Feldes des ruhenden Teilchens ist; der Faktor ${}^4/_3$ ergibt sich bei der Integration über die Richtungen $\mathfrak{r}_0$. Definiert man die Ruhmasse des Teilchens als $m_0' = 4\,W_0/3c^2$ (s. Aufgabe 687), so erhält man für die Selbstkraft

$$\mathfrak{F} = -m_0'\, \dot{\mathfrak{v}}.$$

Die Selbstkraft des Teilchens stimmt also bei Vernachlässigung der Retardierung mit der Trägheitskraft überein.

690. Die Kraft, die das Ladungselement de_1 auf de_2 ausübt, wird durch die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ des ersten Elementes im Zeitpunkt t' bestimmt:

$$d\mathfrak{F}(t) = -\frac{de_1\, de_2}{c^2 r}[\dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{r}_0(\mathfrak{r}_0\, \dot{\mathfrak{v}})]\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

Entwickelt man $\dot{\mathfrak{v}}$ nach Potenzen von $t' - t = -r/c$, so ergibt sich

$$\dot{\mathfrak{v}}(t') = \dot{\mathfrak{v}}(t) + (t' - t)\,\ddot{\mathfrak{v}}(t) = \dot{\mathfrak{v}}(t) - \frac{r}{c}\,\ddot{\mathfrak{v}}(t).$$

Setzt man dies in $d\mathfrak{F}(t)$ ein und integriert über die Elemente de_1 und de_2, so erhält man die gesuchte Selbstkraft

$$\mathfrak{F} = -m_0'\,\dot{\mathfrak{v}} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathfrak{v}} \tag{1}$$

(s. die vorige Aufgabe).

Der zweite Term auf der rechten Seite von (1) stellt die Strahlungsreaktionskraft dar. Er hängt nicht von der Teilchenstruktur ab und ändert beim Grenzübergang zum punktförmigen Teilchen seine Form nicht. Die Selbstenergie W_0 und folglich die elektromagnetische Masse m_0 werden in diesem Grenzfall unendlich groß. Die nicht berücksichtigten Terme der Ordnung $(t' - t)^n$ mit $n \geqq 2$ sind offenbar proportional r_0^{n-1} (r_0 = Teilchenradius) und verschwinden im Grenzfall des punktförmigen Teilchens.

691. Man erhält

$$T = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4 e^4} = 3{,}2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{s}.$$

Die Annahmen über die Bewegung des Elektrons sind erfüllt, wenn der Energieverlust während einer Umlaufsperiode τ auf der Bahn klein gegen die Gesamtenergie des Elektrons ist, d.h. bei $\tau\,|\mathrm{d}E/\mathrm{d}t| \ll |E|$, woraus $a\,c/v \gg$ $\gg r_0 = e^2/m\,c^2$ folgt (r_0 ist der klassische Elektronenradius). Diese Bedingung wird erst bei sehr kleinen Abständen von der Größenordnung 10^{-13} cm gestört, bei denen die klassische Elektrodynamik längst nicht mehr gilt, da sie in diesem Gebiet innere Widersprüche aufweist (s. [53], § 75).

Das Ergebnis der Aufgabe, eine sehr kleine Lebensdauer des Atoms, ist deshalb ein Hinweis auf die Unrichtigkeit klassischer Vorstellungen (der Bahn usw.) von der Bewegung des Elektrons im Atom. Zur Überwindung dieser und anderer fundamentaler Schwierigkeiten der klassischen Physik wurde die Quantenmechanik entwickelt.

692. Es ergibt sich

$$E(t) = m\,c^2 \coth\left[\frac{2 e^4 H^2}{3 m^3 c^5}\,t + \frac{1}{2}\ln\frac{E_0 + m\,c^2}{E_0 - m\,c^2}\right].$$

Für $t \to \infty$ gilt $E(t) \to m\,c^2$, d.h., das Teilchen kommt zur Ruhe.

Der Bahnradius kann mit Hilfe der Beziehung

$$r(t) = \frac{c\,p}{e H} = \frac{1}{e H}\sqrt{E^2(t) - m^2 c^4}$$

durch $E(t)$ ausgedrückt werden.

Bei $t \to \infty$ strebt $r(t) \to 0$, d.h., das Teilchen bewegt sich auf einer sich schließenden Spirale.

693. Man erhält

$$E_{\mathrm{kr}} = m\,c^2 \sqrt[3]{\frac{3 a^2 \omega}{2 c\, r_0}}$$

mit $r_0 = e^2/m\,c^2$.

694. Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators lautet unter Berücksichtigung der Strahlungsreaktionskraft

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \omega_0^2\,\mathfrak{r} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m\,c^3}\,\dddot{\mathfrak{r}}. \tag{1}$$

Ihr entspricht die kubische charakteristische Gleichung

$$k^2 + \omega_0^2 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m\,c^3}\,k^3. \tag{2}$$

Da die Strahlungsreaktionskraft klein gegen die quasielastische Kraft ist, kann Gleichung (2) durch sukzessive Näherungen gelöst werden, wobei in der nullten Näherung die rechte Seite fortgelassen wird; dabei ist $k \approx k_0 = \pm i\,\omega_0$. In der ersten Näherung ergibt sich, indem man auf der rechten Seite von (2)

an Stelle von k den Wert k_0 einsetzt und die Bezeichnung

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{m c^3} \tag{3}$$

einführt,

$$k \approx k_1 = \pm i \omega_0 - \frac{\gamma}{2}.$$

Man kann sich auf eine der Lösungen beschränken, z. B.

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 \, e^{-\gamma t/2} \, e^{-i \omega_0 t} \qquad (t > 0). \tag{4}$$

Diese Lösung gilt für $\gamma \ll \omega_0$ und hat den Charakter gedämpfter Schwingungen.

Die Energie des Oszillators nimmt wie das Quadrat des Betrages seiner Amplitude ab:

$$W = W_0 \, e^{-\gamma t}. \tag{5}$$

Die Größe $1/\gamma$ wird als Lebensdauer des angeregten Zustandes des Oszillators bezeichnet.

Die elektrische Feldstärke der Strahlung ist proportional r, so daß

$$\mathfrak{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_\omega \, e^{-i \omega t} \, d\omega = \begin{cases} \mathfrak{E}_0 \, e^{-i \omega_0 t} \, e^{-\gamma t/2} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

und

$$\mathfrak{E}_\omega = \frac{\mathfrak{E}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(^1/_2 \gamma + i \omega_0) t + i \omega t} \, dt = \frac{\mathfrak{E}_0}{2\pi \left[i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2} \right]}$$

ist. Daraus erhält man die spektrale Intensitätsverteilung der Strahlung

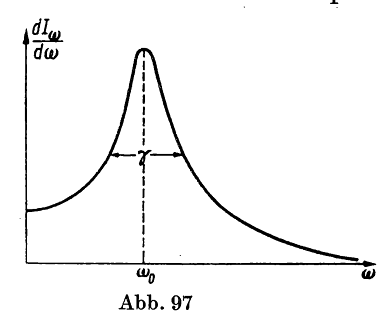


Abb. 97

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I_0 \gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \tag{6}$$

wobei

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dI_\omega$$

die Gesamtintensität der Strahlung ist. Die spektrale Verteilung (6) hat den Charakter einer Resonanzkurve (Abb. 97).

Die Breite der Spektrallinie wird durch die Größe $\Delta \omega = \gamma$ charakterisiert. Die natürliche Linienbreite ist sehr klein (in Einheiten der Wellenlänge würde sie

$$\Delta \lambda = \Delta \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi}{3} r_0 = 1{,}17 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$$

betragen).

Nimmt man an, daß die Strahlung nicht kontinuierlich, sondern in diskreten Portionen abgegeben wird (diese Annahme geht offensichtlich über den Rahmen der klassischen Elektrodynamik hinaus), so hängt die Energieunbestimmtheit $\Delta E = \hbar \Delta\omega = \hbar\gamma$ der Photonen durch die Beziehung

$$\Delta E \cdot \tau = \hbar \tag{7}$$

mit der Lebensdauer $\tau = 1/\gamma$ des angeregten Zustandes zusammen.

Das ist ein Spezialfall der sehr allgemeinen quantenmechanischen Energie-Zeit-Unschärferelation.

695. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega}{\mathrm{d}\omega} = I_0\, \mathrm{e}^{-[(\omega-\omega_0)/\gamma_D]^2},$$

wobei $\gamma_D = \sqrt{2kT\,\omega_0^2/m\,c^2}$ die DOPPLER-Breite der Spektrallinie und I_0 die Intensität bei $\omega = \omega_0$ bedeuten. Die DOPPLER-Breite hängt von der Temperatur ab und kann als Maß der Gastemperatur dienen.

696. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{I\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

mit $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}I_\omega$.

697. Ist die Welle in Richtung der x-Achse polarisiert, so erhält man

$$x_\omega = \frac{eE_{x\omega}}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\,\omega\,\gamma} \tag{1}$$

mit $\gamma = 2e^2\,\omega_0^2/3m\,c^3$.

Wegen $(\dot{x})_\omega = -i\,\omega\,x_\omega$ ist die durch ein oszillierendes Elektron absorbierte Energie

$$\Delta W = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} eE_x(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi\,e^2}{m}\int\limits_0^\infty |E_{x\omega}|^2 \frac{2\omega^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\,\mathrm{d}\omega.\ [1]$$

Der Integrand im letzten Ausdruck beschreibt die spektrale Verteilung der Absorptionsintensität. Die Form dieser Funktion zeigt, daß γ ebenso wie im Falle der Emission ein Maß für die Breite der Absorptionslinie ist. Da die Breite der spektralen Verteilung der Gruppe nach Voraussetzung groß gegen die natürliche Linienbreite γ ist, wird

$$\Delta W = \frac{2\pi\,e^2}{m}\,|E_{x\omega_0}|^2 \cdot 2\omega_0^2\gamma \int\limits_{-\omega_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\omega_0\,\xi)^2 + \omega_0^2\,\gamma^2}$$

---

[1] Wie man leicht zeigt, gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(t)B(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\int\limits_0^\infty (A_\omega B_\omega^* + A_\omega^* B_\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

mit $\xi = \omega - \omega_0$. Wegen $\gamma \ll \omega_0$ kann man die untere Integrationsgrenze durch $-\infty$ ersetzen. Damit folgt

$$\Delta W = \frac{2\pi^2 e^2}{m} |E_{x\omega_0}|^2 = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0},$$

wobei $r_0 = e^2/m c^2$ der klassische Elektronenradius ist. Das Ergebnis hängt nicht von γ und von der Frequenz nur indirekt ab: ΔW ist der spektralen Dichte S_{ω_0} bei der Resonanzfrequenz ω_0 des Oszillators proportional. Die Rechnung zeigt, daß sich beim Einfall einer unpolarisierten und nichtebenen Wellengruppe auf einen isotropen Oszillator dasselbe Resultat ergeben würde. Dann wäre S_ω die Summe aus den Intensitäten aller polarisierten Wellen der Frequenz ω, die zur Gruppe gehören.

698.

a) $\Delta W = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \cos^2\vartheta$;

b) $\Delta W = \pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \sin^2\Theta$;

c) $\Delta W = \frac{2}{3}\pi^2 r_0 c S_{\omega_0}$.

699. Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators lautet im vorliegenden Fall

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \omega_0^2 \mathfrak{r} = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathfrak{r}} + \frac{e}{m}\mathfrak{E}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{1}$$

wenn man die Inhomogenität des elektrischen Feldes in dem vom Oszillator eingenommenen Gebiet und die Wirkung der magnetischen Kraft (Effekte der Ordnung v/c) vernachlässigt.

Die Lösung der Gleichung (1), die erzwungenen Schwingungen entspricht, ist

$$\mathfrak{r} = \frac{e}{m}\frac{\mathfrak{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Daraus folgt für die zeitlich gemittelte Intensität des Lichtes, das in eine vorgegebene Richtung gestreut wird, die Beziehung

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{1}{4\pi c^3}\overline{|e\,\ddot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{n}|^2} = \frac{c E_0^2 r_0^2}{8\pi}\frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2},$$

wobei ϑ den Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung $\mathfrak{n}$ der Streustrahlung und der Polarisationsrichtung der einfallenden Welle bedeutet. Die (zeitlich gemittelte) Energiestromdichte in der einfallenden Welle ist $|\overline{\mathfrak{S}}_0| = cE_0^2/8\pi$. Der differentielle Streuquerschnitt ist dann

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{|\overline{\mathfrak{S}}_0|}\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = r_0^2\frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

Daraus ergibt sich der totale Streuquerschnitt durch Integration über die Winkel:

$$\sigma = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

Im Falle des stark gebundenen Elektrons ($\omega_0 \gg \omega$) wird

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 \omega^4}{\omega_0^4}.$$

Charakteristisch ist die Frequenzabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts in der Form $\sigma \sim \omega^4$.

Im Falle des schwach gebundenen Elektrons gilt bei kleiner Strahlungsdämpfung $\gamma \approx 0$, $\omega_0 \approx 0$ und damit

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3}.$$

700. Man erhält

$$\mathfrak{H} = -\frac{A e^2}{m c^2 r} (\mathrm{e}_\alpha \cos\vartheta - i\, \mathrm{e}_\vartheta)\, \mathrm{e}^{-i(\omega t' - \alpha)},$$

wobei ϑ, α die Polarwinkel der Ausbreitungsrichtung $\mathfrak{n}$ der Streuwelle (die einfallende Welle breitet sich längs der z-Achse aus) und A die Amplitude der einfallenden Welle bedeuten.

Der Ausdruck für $\mathfrak{H}$ zeigt, daß die Streuwelle im allgemeinen elliptisch polarisiert ist. Vor- oder rückwärts gestreute Wellen sind zirkular polarisiert. Die in der $x\,y$-Ebene gestreute Welle ist linear polarisiert. Der differentielle und der totale Streuquerschnitt sind

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2\vartheta}{2}, \qquad \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

701.

$$\varrho = \cos^2\vartheta.$$

702. Im Falle der linear polarisierten Welle ist

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{pol}} = r_0^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^6} [(1-\beta\cos\vartheta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\vartheta\cos^2\alpha],$$

wobei ϑ, α die Polarwinkel der Ausbreitungsrichtung der Streuwelle bedeuten, die z-Achse der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Ladung parallel ist, $\beta = v/c$ gesetzt und der Azimutwinkel α von der Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$ in der einfallenden Welle aus gezählt wurde.

Im Falle der unpolarisierten Welle erhält man

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{unpol}} = r_0^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^6} \left[\frac{1+\beta^2}{2}(1+\cos^2\vartheta) - 2\beta\cos\vartheta\right].$$

703. Löst man die Bewegungsgleichung des Oszillators im Magnetfeld $\mathfrak{H} \parallel z$-Achse analog wie in der Aufgabe 597, so ergibt sich bei $\omega_0 \gg eH/2mc = \omega_{\mathrm{L}}$

$$\mathfrak{r} = A_1(\mathrm{e}_x + i\,\mathrm{e}_y)\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0-\omega_{\mathrm{L}})t} + A_2(\mathrm{e}_x - i\,\mathrm{e}_y)\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0+\omega_{\mathrm{L}})t} + A_3\,\mathrm{e}_z\,\mathrm{e}^{-i\omega t},$$

wobei A_1, A_2, A_3 Integrationskonstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Der Ausdruck für $\mathfrak{r}$ zeigt, daß ein in einem Magnetfeld befindlicher Oszillator anisotrop wird und seine Schwingungsfrequenz sich in drei Frequenzen aufspaltet: ω_0 und $\omega_0 \pm \omega_L$. Bei Beobachtung der Strahlung in beliebiger Richtung erweist sich die Polarisation jeder der monochromatischen Komponenten im allgemeinen als elliptisch. Insbesondere findet man in Richtung der z-Achse (längs des Feldes $\mathfrak{H}$) zwei Spektrallinien, die nach entgegengesetzten Seiten zirkular polarisiert sind. In der zum Feld senkrechten Richtung sind alle drei monochromatischen Komponenten vorhanden und linear polarisiert. Dabei schwingen der Vektor des elektrischen Feldes der nichtverschobenen Spektrallinie in Richtung des Magnetfeldes und die Vektoren der elektrischen Felder beider verschobener Linien in dazu senkrechter Richtung.

12.4. Entwicklung eines elektromagnetischen Feldes nach ebenen Wellen

705. Man erhält folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{E}_\omega(\mathfrak{r}) = -\operatorname{grad}\varphi_\omega(\mathfrak{r}) + i\frac{\omega}{c}\mathfrak{A}_\omega(\mathfrak{r}),$$

$$\mathfrak{H}_\omega(\mathfrak{r}) = \operatorname{rot}\mathfrak{A}_\omega(\mathfrak{r}),$$

$$\mathfrak{E}_\mathfrak{k}(t) = -i\,\mathfrak{k}\,\varphi_\mathfrak{k}(t) - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{H}_\mathfrak{k}(t) = i\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{A}_\mathfrak{k}(t),$$

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}\omega} = -i\,\mathfrak{k}\,\varphi_{\mathfrak{k}\omega} + i\frac{\omega}{c}\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}\omega},$$

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{k}\omega} = i\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}\omega}.$$

706.

a) $$\operatorname{rot}\mathfrak{E}_\omega = \frac{i\omega\mu}{c}\mathfrak{H}_\omega, \qquad \operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}_\omega = 4\pi\varrho_\omega,$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H}_\omega = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\mathfrak{E}_\omega + \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}_\omega, \qquad \operatorname{div}\mu\mathfrak{H}_\omega = 0;$$

b) $$i\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{E}_\mathfrak{k} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}_\mathfrak{k}, \qquad i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{D}_\mathfrak{k} = 4\pi\varrho_\mathfrak{k},$$

$$i\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{H}_\mathfrak{k} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}}_\mathfrak{k} + \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}_\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{k}\,\mathfrak{B}_\mathfrak{k} = 0;$$

c) $$\mathfrak{k}\times\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{\omega\mu}{c}\mathfrak{H}_{\mathfrak{k}\omega}, \qquad i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{4\pi\varrho_{\mathfrak{k}\omega}}{\varepsilon},$$

$$i\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{H}_{\mathfrak{k}\omega} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}\omega} + \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}\omega}, \qquad \mathfrak{k}\,\mathfrak{H}_{\mathfrak{k}\omega} = 0.$$

707.

a) $\Delta \varphi_\omega + \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \varphi_\omega = -\frac{4\pi \varrho_\omega}{\varepsilon}$, $\quad \Delta \mathfrak{A}_\omega + \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \mathfrak{A}_\omega = -\frac{4\pi \mu \mathfrak{j}_\omega}{c}$,

$\operatorname{div} \mathfrak{A}_\omega - \frac{i \omega \varepsilon \mu}{c} \varphi_\omega = 0$;

b) $\quad \varepsilon \mu \ddot{\varphi}_\mathfrak{k} + k^2 c^2 \varphi_\mathfrak{k} = \frac{4\pi c^2 \varrho_\mathfrak{k}}{\varepsilon}$,

$\varepsilon \mu \ddot{\mathfrak{A}}_\mathfrak{k} + k^2 c^2 \mathfrak{A}_\mathfrak{k} = 4\pi c \mu \mathfrak{j}_{\mathfrak{k}\,\omega}$, $\quad -i c \mathfrak{k} \mathfrak{A}_\mathfrak{k} + \varepsilon \mu \dot{\varphi}_\mathfrak{k} = 0$;

c) $\left(k^2 - \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2}\right) \varphi_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \varrho_{\mathfrak{k}\omega}$, $\quad \left(k^2 - \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2}\right) \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{4\pi \mu}{c} \mathfrak{j}_{\mathfrak{k}\omega}$,

$\mathfrak{k} \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}\omega} - \frac{\omega \varepsilon \mu}{c} \varphi_{\mathfrak{k}\omega} = 0$.

708. Wir benutzen die Gleichung (12.40′). Durch Integration über die Winkel ergibt sich

$$\varphi_\mathfrak{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathfrak{r})\, e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{r} = \frac{e}{2\pi^2 k} \int_0^\infty \sin k r\, dr.$$

Das letzte Integral ist im allgemeinen unbestimmt, da

$$I_N = \int_0^N \sin k r\, dr = \frac{1 - \cos kN}{k}$$

für $N \to \infty$ keinen definierten Grenzwert besitzt. Man sieht jedoch leicht, daß der $\cos kN$ enthaltende unbestimmte Term keinen Beitrag zum Potential $\varphi(\mathfrak{r})$ liefert, wenn man I_N in die Entwicklung (12.40) einsetzt und zur Grenze $N \to \infty$ übergeht. Das ergibt sich daraus, daß für $N \to \infty$ wegen der schnellen Oszillationen die Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\cos kN}{k} e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{k} \to 0$$

gilt. Man kann also effektiv setzen

$$\varphi_\mathfrak{k} = \frac{e}{2\pi^2 k^2}.$$

Wir bemerken noch, daß man

$$I = \lim_{N\to\infty} I_N = \frac{1}{k}$$

erhält, wenn man z.B. I als den Grenzwert von

$$\int_0^\infty e^{-br} \sin k r\, dr$$

für $b \to 0$ definiert.

Dasselbe Resultat ergibt sich auch auf einem anderen Weg. Wendet man auf beide Seiten der Gleichung

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \int \varphi_{\mathfrak{k}}\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{k}$$

den LAPLACE-Operator Δ an, so erhält man $(\Delta\varphi)_{\mathfrak{k}} = -k^2\varphi_{\mathfrak{k}}$. Andererseits erhält man für die FOURIER-Komponente $(\Delta\varphi)_{\mathfrak{k}} = -e/2\pi^2$, wenn man auf beiden Seiten der POISSONschen Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi e\,\delta(\mathfrak{r})$ die FOURIER-Komponenten bildet. Setzt man beide Ausdrücke für $(\Delta\varphi)_{\mathfrak{k}}$ gleich, so erhält man für $\varphi_{\mathfrak{k}}$ den oben angegebenen Ausdruck.

709.

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}} = -i\,\mathfrak{k}\,\varphi_{\mathfrak{k}} = -\frac{i\,e\,\mathfrak{k}}{2\pi^2 k^2}.$$

710. Da die Raumladungsdichte $\varrho(\mathfrak{r}, t) = e\,\delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\,t)$ ist, gilt

$$\varrho_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{e}{(2\pi)^4}\int\!\!\int \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\,t)\, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}\, d\mathfrak{r}\, dt =$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \mathfrak{k}\mathfrak{v})}\, dt = \frac{e}{8\pi^3}\,\delta(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v} - \omega).$$

Daraus folgt mit Hilfe der Resultate der vorigen Aufgabe

$$\varphi_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{e}{2\pi^2}\,\frac{\delta(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v} - \omega)}{k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}.$$

Auf dieselbe Weise zeigt man

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{e\,\mathfrak{v}}{2\pi^2 c}\,\frac{\delta(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v} - \omega)}{k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}.$$

Benutzt man die Ausdrücke für die Komponenten der Feldstärken aus Aufgabe 705, so erhält man

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}\omega} = i\,\frac{e}{2\pi^2}\,\frac{\delta(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v} - \omega)}{k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}\left(-\mathfrak{k} + \frac{\mathfrak{v}\,\omega}{c^2}\right),$$

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{k}\omega} = i\,\mathfrak{k} \times \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}\omega} = i\,\frac{e}{2\pi^2 c}\,(\mathfrak{k} \times \mathfrak{v})\,\frac{\delta(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v} - \omega)}{k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}.$$

Alle Feldkomponenten enthalten den Faktor $\delta(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v} - \omega)$, der die Dispersionsgleichung $\omega = \mathfrak{k}\,\mathfrak{v}$ ausdrückt. Daher sind im betrachteten Fall alle FOURIER-Entwicklungen des elektromagnetischen Feldes praktisch nicht vier-, sondern

dreidimensional. Zum Beispiel ergibt sich für das Potential φ

$$\varphi = \int\limits_{(\mathfrak{k})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{2\pi^2} \frac{\delta(\omega - \mathfrak{k}\,\mathfrak{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)} \, d\mathfrak{k} \, d\omega = \int \varphi_{\mathfrak{k}}(t) \, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} \, d\mathfrak{k},$$

wobei

$$\varphi_{\mathfrak{k}}(t) = \frac{e}{2\pi^2} \frac{e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{v})t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

ist.

712. Wir berechnen das skalare Potential. Nach den Gleichungen c) der Lösung zur Aufgabe 707 ($\varepsilon = \mu = 1$) erhalten wir

$$\varphi_{\mathfrak{k}\omega} = \frac{4\pi \, \varrho_{\mathfrak{k}\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Die FOURIER-Komponente der Raumladungsdichte ist

$$\varrho_{\mathfrak{k}\omega} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int [\mathfrak{p} \operatorname{grad} \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\, t)] \, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)} \, d\mathfrak{r} \, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int [\mathfrak{p} \operatorname{grad} e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)}] \, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\, t) \, d\mathfrak{r} \, dt = -i \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{k}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathfrak{k}\,\mathfrak{v}).$$

Die Dispersionsgleichung $\omega = \mathfrak{k}\,\mathfrak{v}$ hat die gleiche Form wie im Falle des Feldes einer gleichförmig bewegten Punktladung (s. Aufgabe 710). Geht man bei der Berechnung von $\varphi(\mathfrak{r}, t)$ entsprechend dem Hinweis zur Aufgabe 711 vor, so ergibt sich

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = -\mathfrak{p} \operatorname{grad} \frac{1}{r^*} = \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}_0}{r^{*3}} \tag{1}$$

mit

$$\mathfrak{r}_0 = \left(x - v\,t, \frac{y}{\gamma^2}, \frac{z}{\gamma^2}\right), \quad r^* = \sqrt{(x - v\,t)^2 + \frac{1}{\gamma^2}(y^2 + z^2)}\,.$$

Analoge Rechnungen liefern für das Vektorpotential

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{r}^*}{r^{*3}} + \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}_0)}{c\, r^{*3}}. \tag{2}$$

713.

a) $\mathfrak{A} = \dfrac{\mathfrak{m}_0 \times \mathfrak{r}^*}{\gamma\, r^{*3}}, \quad \varphi = 0;$

b) $\mathfrak{A} = \dfrac{\mathfrak{m}_0 \times \mathfrak{r}^*}{r^{*3}}, \quad \varphi = \dfrac{\mathfrak{v}\,\mathfrak{A}}{c}.$

716. Wir zerlegen alle Vektoren, die in den MAXWELLschen Gleichungen vorkommen, in wirbel- und quellenfreie Anteile (oder in longitudinale und transversale Komponenten, s. Aufgabe 715)[1]:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_{\parallel} + \mathfrak{E}_{\perp}, \quad & \mathfrak{j} &= \mathfrak{j}_{\parallel} + \mathfrak{j}_{\perp}, \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_{\perp}, & \mathfrak{H}_{\parallel} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Setzt man die transversalen Anteile der Vektoren gleich, so erhält man aus den MAXWELLschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{E}_{\perp} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}, \quad & \operatorname{rot}\mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}}_{\perp} + \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}_{\perp}, \\ \operatorname{div}\mathfrak{E}_{\perp} &= 0, & \operatorname{div}\mathfrak{H} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Der longitudinale (wirbelfreie) Teil des elektrischen Feldes wird durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathfrak{E}_{\parallel}(\mathfrak{r}, t) &= 4\pi\,\varrho(\mathfrak{r}, t), \\ \operatorname{rot}\mathfrak{E}_{\parallel}(\mathfrak{r}, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

bestimmt, die die Form elektrostatischer Gleichungen haben. Sie enthalten die Zeit als Parameter. Daraus folgt, daß $\mathfrak{E}_{\parallel}$ ein COULOMB-Feld ist.

717. Nach den Ergebnissen der Aufgabe 707*b* ist

$$\ddot{q}_{\mathfrak{k}\lambda} + \omega_{\mathfrak{k}}^2\, q_{\mathfrak{k}\lambda} = 0 \tag{1}$$

mit $\omega_{\mathfrak{k}} = k\,c$. Das ist die Gleichung eines linearen harmonischen Oszillators. Ihre allgemeine Lösung lautet

$$q_{\mathfrak{k}\lambda}(t) = a_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{-i\omega t} + b_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{i\omega t}.$$

Die Koeffizienten $a_{\mathfrak{k}\lambda}$ und $b_{\mathfrak{k}\lambda}$ hängen durch die Beziehungen

$$\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}\, a_{\mathfrak{k}\lambda} = \mathfrak{e}^*_{-\mathfrak{k}\lambda}\, b^*_{-\mathfrak{k}\lambda}, \qquad \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}\, b_{\mathfrak{k}\lambda} = \mathfrak{e}^*_{-\mathfrak{k}\lambda}\, a^*_{-\mathfrak{k}\lambda}$$

miteinander zusammen, die sich daraus ergeben, daß $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t)$ reell ist $[\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{A}^*(\mathfrak{r}, t)]$.

Wählt man die Einheitsvektoren, die die Polarisationszustände der Wellen mit entgegengesetzten Wellenvektoren $\mathfrak{k}$ und $-\mathfrak{k}$ beschreiben, so, daß

$$\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda} = \mathfrak{e}^*_{-\mathfrak{k}\lambda} \tag{2}$$

ist, so wird

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathfrak{k}\lambda} &= b^*_{-\mathfrak{k}\lambda}, \qquad b_{\mathfrak{k}\lambda} = a^*_{-\mathfrak{k}\lambda}, \\ q_{\mathfrak{k}\lambda}(t) &= a_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{-i\omega t} + a^*_{-\mathfrak{k}\lambda}\, e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

[1]) Die Zerlegung des elektromagnetischen Feldes in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil wird in einer der Varianten der Quantenelektrodynamik benutzt. Dabei wird der transversale Feldanteil gequantelt (ihm entsprechen die Photonen), während der longitudinale Feldanteil ungequantelt bleibt.

Die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ werden durch die Koordinaten $q_{\mathfrak{k}\lambda}(t)$ ausgedrückt:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int \mathrm{e}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}\,e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\,d\mathfrak{k}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} = \frac{i\,c}{\pi\sqrt{2}}\int \mathfrak{k}\times\mathrm{e}_{\mathfrak{k}\lambda}\,q_{\mathfrak{k}\lambda}\,e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\,d\mathfrak{k}. \tag{5}$$

Die Energie des elektromagnetischen Feldes ist

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\,d\mathfrak{r}.$$

Da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ reell sind, kann man schreiben

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2\,d\mathfrak{r} = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{E}\,\mathfrak{E}^*\,d\mathfrak{r} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1}{8\pi}\int\!\!\int\!\!\int \sum_{\lambda,\lambda'} \mathrm{e}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\mathrm{e}_{\mathfrak{k}'\lambda'}\,\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}^*_{\mathfrak{k}'\lambda'}\,e^{i(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\mathfrak{r}}\,d\mathfrak{r}\,d\mathfrak{k}\,d\mathfrak{k}' = \frac{1}{2}\int \sum_{\lambda} \dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}^*_{\mathfrak{k}\lambda}\,d\mathfrak{k}.$$

Dabei wurde die Orthogonalität $\mathrm{e}_{\mathfrak{k}1}\,\mathrm{e}^*_{\mathfrak{k}2} = 0$ der Polarisationseinheitsvektoren, die zu demselben $\mathfrak{k}$, aber verschiedenen λ gehören, sowie die Formel (A I.15) benutzt. Ähnlich berechnet man die Energie des Magnetfeldes. Für die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes ergibt sich

$$W = \frac{1}{2}\int \sum_{\lambda}(\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}^*_{\mathfrak{k}\lambda} + \omega_{\mathfrak{k}}^2\,q_{\mathfrak{k}\lambda}\,q^*_{\mathfrak{k}\lambda})\,d\mathfrak{k}. \tag{6}$$

Sie setzt sich aus den Energien

$$W_{\mathfrak{k}\lambda} = \frac{1}{2}(\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}^*_{\mathfrak{k}\lambda} + \omega_{\mathfrak{k}}^2\,q_{\mathfrak{k}\lambda}\,q^*_{\mathfrak{k}\lambda}) \tag{7}$$

der einzelnen „Feldoszillatoren" zusammen. Man kann die Feldenergie (6) unmittelbar durch die Koeffizienten $a_{\mathfrak{k}\lambda}$ ausdrücken, indem man die Beziehungen (3) benutzt:

$$W = 2\int \sum_{\lambda} \omega_{\mathfrak{k}}^2\,a_{\mathfrak{k}\lambda}\,a^*_{\mathfrak{k}\lambda}\,d\mathfrak{k}. \tag{8}$$

Analog ergibt sich für den Impuls des Feldes

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi c}\int \mathfrak{E}\times\mathfrak{H}\,d\mathfrak{r} = \frac{1}{8\pi c}\int (\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}^* + \mathfrak{E}^*\times\mathfrak{H})\,d\mathfrak{r} =$$

$$= \frac{i}{2}\int \sum_{\lambda} \mathfrak{k}(\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}\,q^*_{\mathfrak{k}\lambda} - \dot{q}^*_{\mathfrak{k}\lambda}\,q_{\mathfrak{k}\lambda})\,d\mathfrak{k}. \tag{9}$$

Die in dieser Aufgabe betrachteten Oszillatorkoordinaten $q_{\mathfrak{k}\lambda}$ sind den Koordinaten analog, die die Normalschwingungen eines mechanischen Systems beschreiben (der Hauptunterschied zum Fall der Mechanik besteht darin, daß das Feld ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden ist). Diese Analogie

gestattet es, die formalen Methoden der Quantenmechanik auf die Lösung von quantenelektrodynamischen Problemen anzuwenden.

718. Man erhält

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \frac{c}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{\lambda} \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda} [Q_{\mathfrak{k}\lambda}(t) \cos \mathfrak{k}\mathfrak{r} - \frac{1}{\omega} \dot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda}(t) \sin \mathfrak{k}\mathfrak{r}]\, d\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{\lambda} \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda} [\dot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda} \cos \mathfrak{k}\mathfrak{r} + \omega\, Q_{\mathfrak{k}\lambda} \sin \mathfrak{k}\mathfrak{r}]\, d\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{r}, t) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{\lambda} (\mathfrak{k} \times \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}) [Q_{\mathfrak{k}\lambda} \sin \mathfrak{k}\mathfrak{r} + \frac{1}{\omega} \dot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda} \cos \mathfrak{k}\mathfrak{r}]\, d\mathfrak{k}.$$

Bei der Ableitung des Ausdrucks für $\mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t)$ benutzt man, daß die Koordinaten $Q_{\mathfrak{k}\lambda}$ der Gleichung

$$\ddot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda} + \omega_{\mathfrak{k}}^2 Q_{\mathfrak{k}\lambda} = 0$$

genügen.

Den Ausdruck für die Feldenergie erhält man am einfachsten, indem man die Koeffizienten $a_{\mathfrak{k}\lambda}$ und $a_{\mathfrak{k}\lambda}^*$ in der Gleichung (8) der vorigen Aufgabe durch $Q_{\mathfrak{k}\lambda}$ und $Q_{\mathfrak{k}\lambda}^*$ ausdrückt:

$$a_{\mathfrak{k}\lambda} = \frac{1}{2} Q_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{i\omega t} + \frac{i}{2\omega} \dot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{i\omega t},$$

$$a_{\mathfrak{k}\lambda}^* = \frac{1}{2} Q_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{-i\omega t} - \frac{i}{2\omega} \dot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda}\, e^{-i\omega t}.$$

Daraus folgt

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int (\dot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda}^2 + \omega_{\mathfrak{k}}^2 Q_{\mathfrak{k}\lambda}^2)\, d\mathfrak{k}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Energie des freien elektromagnetischen Feldes eine Summe aus den Energien von Feldoszillatoren darstellt, die die gleiche Form haben wie im Falle eines mechanischen schwingenden Systems:

$$W = \int \sum_{\lambda} W_{\mathfrak{k}\lambda}\, d\mathfrak{k}$$

mit $W_{\mathfrak{k}\lambda} = {}^1/_2(\dot{Q}_{\mathfrak{k}\lambda}^2 + \omega_{\mathfrak{k}}^2 Q_{\mathfrak{k}\lambda}^2)$.

Für den Feldimpuls $\mathfrak{G}$ erhält man

$$\mathfrak{G} = \int \sum_{\lambda} W_{\mathfrak{k}\lambda} \frac{\mathfrak{k}}{k c}\, d\mathfrak{k} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}\, d\mathfrak{r}.$$

Der Impuls $\mathfrak{G}_{\mathfrak{k}\lambda}$ eines einzelnen Oszillators hängt durch die Beziehung

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{k}\lambda} = \frac{\mathfrak{k}\, W_{\mathfrak{k}\lambda}}{k c}$$

mit seiner Energie $W_{\mathfrak{k}\lambda}$ zusammen.

Dieselbe Beziehung vermittelt auch den Zusammenhang zwischen Energie und Impuls im Falle von Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in der Richtung $\mathfrak{k}$ bewegen (Photonen!).

719. Multipliziert man die Gleichungen in der Lösung zur Aufgabe 707*b* mit $\mathfrak{e}^*_{\mathfrak{k}\lambda}$, so erhält man für den transversalen Anteil des Potentials $\mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}(t)$

$$\ddot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}(t) + \omega_{\mathfrak{k}}^2 q_{\mathfrak{k}\lambda}(t) = F_{\mathfrak{k}\lambda}(t), \tag{1}$$

wobei

$$F_{\mathfrak{k}\lambda}(t) = \frac{e\,c}{2\pi^2}\,[\mathfrak{e}^*_{\mathfrak{k}\lambda}\,\mathfrak{v}(t)]\,\mathrm{e}^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0(t)} \tag{2}$$

ist, während $\mathfrak{r}_0(t)$ den Radiusvektor und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t bedeuten. Im nichtrelativistischen Fall gilt

$$m\,\ddot{\mathfrak{r}}_0 = \mathfrak{F} + e\,\mathfrak{E}(\mathfrak{r}_0). \tag{3}$$

Dabei sind m die Masse des Teilchens, $\mathfrak{F}$ die am Teilchen angreifende Kraft nichtelektromagnetischen Ursprungs und

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}_0) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0}\,\mathrm{d}\mathfrak{k} \tag{4}$$

die Feldstärke des Strahlungsfeldes in dem Punkt, in dem sich das Teilchen befindet. Die Kraft, die das Magnetfeld auf das Teilchen ausübt, kann wegen der Voraussetzung $v \ll c$ vernachlässigt werden. Die Beziehung (1) stellt die Gleichung der erzwungenen Schwingungen eines Oszillators unter der Wirkung der äußeren Kraft $F_{\mathfrak{k}\lambda}(t)$ dar. Das Gleichungssystem (1) und (3) beschreibt die Bewegung des Teilchens und des elektromagnetischen Feldes, die miteinander in Wechselwirkung stehen.

720. Die Energieänderung eines Oszillators ist

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathfrak{k}\lambda}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,(F_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}^*_{\mathfrak{k}\lambda} + F^*_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda}).$$

Für die Geschwindigkeit der Feldenergieänderung erhält man

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int \sum_{\lambda} (F_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}^*_{\mathfrak{k}\lambda} + F^*_{\mathfrak{k}\lambda}\,\dot{q}_{\mathfrak{k}\lambda})\,\mathrm{d}\mathfrak{k}.$$

721. Die Kraft $F_{\mathfrak{k}\lambda}(t)$ hat hierbei die Form

$$F_{\mathfrak{k}\lambda}(t) = b_{\mathfrak{k}\lambda}\cos\omega_0 t$$

mit

$$b_{\mathfrak{k}\lambda} = \frac{e}{\pi\sqrt{2}}\,(\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}), \qquad \mathfrak{v}_0 = \omega_0\,\mathfrak{r}_0$$

(der Einfachheit halber betrachten wir linear polarisierte Feldoszillatoren, so daß die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}$ reell sind). Integriert man die Gleichung (1) der Aufgabe 719 mit diesem $F_{\mathfrak{k}\lambda}$, so ergibt sich

$$q_{\mathfrak{k}\lambda} = \frac{b_{\mathfrak{k}\lambda}}{\omega_{\mathfrak{k}}^2 - \omega_0^2}\,(\cos\omega_0 t - \cos\omega_{\mathfrak{k}} t),$$

wenn die Feldoszillatoren im Anfangszeitpunkt $t = 0$ nicht angeregt sind. Setzen wir dies in den Ausdruck für die Geschwindigkeit $\mathrm{d}W_{\mathfrak{k}\lambda}/\mathrm{d}t$ der Energie-

änderung des Strahlungsfeldes in der Lösung zur Aufgabe 720 ein, so folgt

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathfrak{k}\lambda}}{\mathrm{d}t} = \frac{b_{\mathfrak{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathfrak{k}}^2 - \omega_0^2}(\omega_{\mathfrak{k}} \cos\omega_0 t \sin\omega_{\mathfrak{k}} t - \omega_0 \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t).$$

Integriert man noch über t von 0 bis t, so erhält man die Energiemenge, die das Teilchen dem Feldoszillator $(\mathfrak{k}, \lambda)$ während der Zeitdauer t überträgt:

$$W_{\mathfrak{k}\lambda} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}W_{\mathfrak{k}\lambda}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{b_{\mathfrak{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathfrak{k}}^2 - \omega_0^2}\left[\frac{\omega_{\mathfrak{k}}}{2}\,\frac{1-\cos(\omega_{\mathfrak{k}}+\omega_0)t}{\omega_{\mathfrak{k}}+\omega_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_{\mathfrak{k}}}{2}\,\frac{1-\cos(\omega_{\mathfrak{k}}-\omega_0)t}{\omega_{\mathfrak{k}}-\omega_0} - \frac{\omega_0}{4}\,\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{\omega_0}\right].$$

Bei $\omega_{\mathfrak{k}} = \omega_0$ und $t \to \infty$ ist der zweite Term in den Klammern groß gegen den ersten und dritten Term. Die Anregung der Oszillatoren erfolgt demnach resonanzförmig: In erster Linie werden diejenigen Feldoszillatoren angeregt, deren Frequenz nahezu gleich der Frequenz der erzwingenden Kraft $F_{\mathfrak{k}\lambda}$ ist. Wir behalten deshalb nur den Resonanzterm bei und summieren die Energien, die von denjenigen Feldoszillatoren aufgenommen werden, deren Frequenzen sich nicht stark von ω_0 unterscheiden, deren Richtung $\mathfrak{k}$ innerhalb des Raumwinkels $\mathrm{d}\Omega$ liegt und deren Polarisationseinheitsvektoren $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}1}$ $(\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}2})$ dieselbe Richtung haben:

$$\mathrm{d}W = \sum_{\mathfrak{k},\lambda} W_{\mathfrak{k}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{2c^3}\int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} \sum_{\lambda} \frac{\omega_{\mathfrak{k}}^3\, b_{\mathfrak{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathfrak{k}}+\omega_0}\,\frac{1-\cos(\omega_{\mathfrak{k}}-\omega_0)t}{(\omega_{\mathfrak{k}}-\omega_0)^2}\,\mathrm{d}\omega_{\mathfrak{k}}. \tag{1}$$

Der Integrand in (1) hat bei $\omega_{\mathfrak{k}} = \omega_0$ ein scharfes Maximum. Je größer t ist, desto schmaler ist dieses Maximum. Bei genügend großem t kann man in dem schwach veränderlichen Faktor

$$\sum_{\lambda} \frac{\omega_{\mathfrak{k}}^3\, b_{\mathfrak{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathfrak{k}}+\omega_0}$$

$\omega_{\mathfrak{k}} = \omega_0$ setzen und ihn vor das Integralzeichen ziehen. Im verbleibenden Integral kann man δ gegen ∞ gehen lassen. Damit erhält man (s. Anhang I)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha t}{\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha = \pi t, \qquad t \to \infty$$

und

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi\left(b_{\mathfrak{k}1}^2 + b_{\mathfrak{k}2}^2\right)\omega_0^2}{2c^3}\,t.$$

Daraus folgt für die Strahlungsintensität in vorgegebener Richtung die bekannte Beziehung

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2\,\omega_0^2\,\overline{v^2}\sin^2\vartheta}{4\pi c^3},$$

wobei $\overline{v^2} = v_0^2/2$ die mittlere Geschwindigkeit des schwingenden Teilchens und ϑ den Winkel zwischen den Richtungen $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{k}$ bedeuten. Bei der Ableitung dieser Gleichungen haben wir die leicht zu beweisende Beziehung

$$(\mathfrak{v}_0\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}1})^2 + (\mathfrak{v}_0\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}2})^2 = v_0^2 \sin^2\vartheta$$

benutzt. Die Integration über den Winkel liefert die Gesamtintensität der Strahlung

$$\overline{I} = \frac{2 e^2 \omega_0^2 \overline{v^2}}{3}.$$

723. Wir lösen das Gleichungssystem (1) und (3) der Lösung zur Aufgabe 719 näherungsweise. Vernachlässigen wir die Strahlungsreaktion und setzen in die Gleichung (3) die Feldstärke $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos\omega t$ der einfallenden Welle ein, so erhalten wir die erzwungenen Schwingungen entsprechende Lösung

$$\mathfrak{r}(t) = \frac{e}{m}\, \mathfrak{E}_0 \frac{\cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{1}$$

Die Teilchenbewegung unter der Wirkung der einfallenden Welle regt die Oszillatoren des Strahlungsfeldes gemäß der Gleichung (1) der Aufgabe 719 an, wobei man in dieser Gleichung die Kraft $F_{\mathfrak{k}\lambda}$ durch $\mathfrak{r}(t)$ ausdrücken muß:

$$F_{\mathfrak{k}\lambda} = \frac{e^2\omega}{m\pi\sqrt{2}}\, \frac{\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}\, \mathfrak{E}_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\omega t.$$

Die Polarisationseinheitsvektoren wurden reell gewählt. Durch Lösung der Gleichung (1) der Aufgabe 719 mit der Anfangsbedingung $q_{\mathfrak{k}\lambda}(0) = 0$ erhält man

$$q_{\mathfrak{k}\lambda}(t) = \frac{e^2}{m\pi\sqrt{2}}\, \frac{\omega\, \mathfrak{E}_0\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}}{(\omega_{\mathfrak{k}}^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2)} (\sin\omega t - \sin\omega_{\mathfrak{k}} t).$$

Verfährt man wie bei der Lösung der Aufgabe 721, so erhält man für die Strahlungsintensität in der Richtung $\mathfrak{k}$ mit der durch den Einheitsvektor $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda}$ charakterisierten Polarisation

$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathfrak{k}\lambda}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{t}\, \frac{\mathrm{d}W_{\mathfrak{k}\lambda}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3}\, \frac{\omega^4 (\mathfrak{E}_0\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{k}\lambda})^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \tag{2}$$

Aus (2) ergibt sich, daß die Streustrahlung in der durch $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{k}$ aufgespannten Ebene linear polarisiert ist. Führt man den Winkel ϑ zwischen den Vektoren $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{k}$ ein, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{8\pi}{cE_0^2}\, \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2\vartheta,$$

was mit dem Ergebnis der Aufgabe 699 in Einklang steht. Durch Integration über die Winkel erhält man den totalen Streuquerschnitt:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

13. STRAHLUNG BEI DER WECHSELWIRKUNG GELADENER TEILCHEN MIT MATERIE

726. Wir entwickeln die Feldvektoren in FOURIER-Integrale bezüglich der Koordinaten und der Zeit:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{R}, t) = \int \mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \omega)\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{R} - \omega t)}\, d\mathfrak{k}\, d\omega, \ldots$$

Damit erhalten wir aus den MAXWELLschen Gleichungen ein System algebraischer Gleichungen für die FOURIER-Amplituden:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\, \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \omega) &= \mathfrak{H}(\mathfrak{k}, \omega), \\ \varkappa\, \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}(\mathfrak{k}, \omega) &= -\varepsilon(\omega)\, \mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \omega) - i \frac{e\, \mathfrak{v}}{2\pi^2 \omega^2}\, \delta\left(\frac{\varkappa}{c}\, \mathfrak{n}\, \mathfrak{v} - 1\right), \\ \varkappa \varepsilon(\omega)\, \mathfrak{n}\, \mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \omega) &= -i \frac{e\, c}{2\pi^2 \omega^2}\, \delta\left(\frac{\varkappa}{c}\, \mathfrak{n}\, \mathfrak{v} - 1\right), \\ \varkappa\, \mathfrak{n}\, \mathfrak{H}(\mathfrak{k}, \omega) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{H}(\mathfrak{k}, \omega)$ die FOURIER-Amplitude des Magnetfeldes bedeutet, $\mathfrak{k} = \omega \varkappa \mathfrak{n}/c$ ist und $\varkappa$ einen Parameter bezeichnet, der durch ω und $\mathfrak{k}$ ausgedrückt wird; $\mathfrak{n}$ ist der Einheitsvektor in Richtung von $\mathfrak{k}$. Bei der Herleitung von (1) muß man berücksichtigen, daß die FOURIER-Amplitude der Funktion $\delta(\mathfrak{R} - \mathfrak{v}\, t)$ gleich $\delta(\mathfrak{k}\, \mathfrak{v} - \omega)/8\pi^3$ ist und daß die Beziehung $\delta(\alpha\, x) = \delta(x)/|\alpha|$ gilt. Aus dem Gleichungssystem (1) erhält man $\mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \omega)$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{k}, \omega)$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}(\mathfrak{k}, \omega) &= -\frac{i\, e\, c}{2\pi^2 \omega^2}\, \frac{\varkappa\, \mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{v}}{c}\, \varepsilon}{\varepsilon(\varkappa^2 - \varepsilon)}\, \delta\left(\frac{\varkappa}{c}\, \mathfrak{n}\, \mathfrak{v} - 1\right), \\ \mathfrak{H}(\mathfrak{k}, \omega) &= \frac{i\, e\, \varkappa}{2\pi^2 \omega^2}\, \frac{\mathfrak{n} \times \mathfrak{v}}{\varkappa^2 - \varepsilon}\, \delta\left(\frac{\varkappa}{c}\, \mathfrak{n}\, \mathfrak{v} - 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zur Bestimmung der Felder muß man die FOURIER-Transformation umkehren. Wir berechnen zunächst $E_z(\mathfrak{R}, t)$. Aus (2) folgt

$$E_z(\mathfrak{k}, \omega) = -\frac{i\, e\, c}{2\pi^2 \omega^2}\, \frac{\varkappa \cos\Theta - \beta\, \varepsilon}{\varepsilon(\varkappa^2 - \varepsilon)}\, \delta(\beta\, \varkappa \cos\Theta - 1)$$

und damit

$$E_z(\mathfrak{R}, t) = -\frac{i\, e}{2\pi^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\, d\omega\, e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \varkappa^2\, d\varkappa \int \frac{\varkappa \cos\Theta - \beta\, \varepsilon}{\varepsilon(\varkappa^2 - \varepsilon)} \times$$

$$\times \exp\left\{i \frac{\omega}{c}\, \varkappa [r \sin\Theta \cos(\Phi - \varphi) - z \cos\Theta]\right\} \delta(\beta\, \varkappa \cos\Theta - 1) \sin\Theta\, d\Theta\, d\Phi. \tag{3}$$

Dabei bezeichnen $\mathfrak{r}$ die Komponente von $\mathfrak{R}$ in der $x\,y$-Ebene, φ den Winkel zwischen $\mathfrak{r}$ und der x-Achse und Θ, Φ die Polarwinkel von $\mathfrak{n}$, und es ist $\beta = v/c$.

Das Integral über Φ wird durch die BESSEL-Funktion $J_0\left(\frac{\omega}{c}\varkappa\, r \sin\Theta\right)$ ausgedrückt (s. A III.11).

Das Integral über Θ hat die Form

$$\int_0^\pi f(\Theta)\,\delta(\beta\varkappa\cos\Theta - 1)\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta = \frac{1}{\beta\varkappa}\int_{-\beta\varkappa}^{\beta\varkappa}\varphi(y)\,\delta(y-1)\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Es ist nur für $\beta\varkappa \geqq 1$ ungleich Null, so daß die untere Grenze der Änderung von $\varkappa$ gleich $1/\beta$ ist. Das wird in der Gleichung (3) automatisch durch die δ-Funktion berücksichtigt; nach der Integration über y tritt die δ-Funktion jedoch nicht mehr auf, und die untere Integrationsgrenze muß in expliziter Form angegeben werden.

Die Integration über y in (4) ergibt

$$\frac{1}{\beta\varkappa}\varphi(1) = \frac{1}{\beta\varkappa} f(\Theta)\Big|_{\cos\Theta = 1/\beta\varkappa}. \tag{5}$$

Wir setzen (5) in (3) ein und führen an Stelle von $\varkappa$ die Variable $x = \sqrt{\varkappa^2 - 1/\beta^2}$ ein; da sich $\varkappa$ von $1/\beta$ bis ∞ ändert, wird sich x von 0 bis ∞ ändern. Damit wird

$$E_z(\mathfrak{R}, t) = \frac{i\,e}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{e}^{i\omega(z/v-t)}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right)\int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{\omega}{c} r\,x\right)x\,\mathrm{d}x}{x^2 + \frac{1}{\beta^2} - \varepsilon}.$$

Mit Hilfe der Formel (A III.16) läßt sich auch die Integration über x ausführen:

$$E_z(\mathfrak{R}, t) = \frac{i\,e}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right)K_0(s\,r)\,\mathrm{e}^{i\omega(z/v-t)}\,\omega\,\mathrm{d}\omega. \tag{6}$$

Dabei ist

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega).$$

Das Vorzeichen von s ist so zu wählen, daß $\mathrm{Re}\,s > 0$ ist, da andernfalls das Integral über ω divergiert. Die Integration über ω in (6) ist möglich, wenn die Funktion $\varepsilon(\omega)$ explizit vorgegeben ist.

Bei der Berechnung von $E_x(\mathfrak{R}, t)$ beginnen wir ebenfalls mit der Integration über Φ.

Die Integration über Θ wird mit Hilfe der δ-Funktion ausgeführt. Bei der nachfolgenden Integration über $x = \sqrt{\varkappa^2 - 1/\beta^2}$ benutzt man die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{J_1(x\,r)\,x^2\,\mathrm{d}x}{x^2 + k^2} = k K_1(k\,r),$$

die sich aus (A III.16) durch Differentiation nach r ergibt, wenn man die Beziehungen $J_0' = -J_1$ und $K_0' = -K_1$ berücksichtigt.

Man erhält schließlich

$$E_x(\mathfrak{R}, t) = \cos\varphi \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\varepsilon} K_1(s r)\, e^{i\omega(z/v-t)}\, d\omega .$$

Die Komponenten $E_y(\mathfrak{R}, t)$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{R}, t)$ werden auf dieselbe Weise bestimmt. E_y unterscheidet sich von E_x durch die Ersetzung von $\cos\varphi$ durch $\sin\varphi$; daher ist in Zylinderkoordinaten

$$E_r(\mathfrak{R}, t) = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\varepsilon} K_1(s r)\, e^{i\omega(z/v-t)}\, d\omega, \quad E_\varphi = 0. \tag{7}$$

Für $\mathfrak{H}(\mathfrak{R}, t)$ erhalten wir

$$H_\varphi(\mathfrak{R}, t) = \frac{e}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} s K_1(s r)\, e^{i\omega(z/v-t)}\, d\omega, \qquad H_z = H_r = 0. \tag{8}$$

Wie die Gleichungen (6) bis (8) zeigen, ist das elektromagnetische Feld axialsymmetrisch.

Die erhaltenen Beziehungen gelten nur im Gebiet $r \gg a$, wobei a von der Größenordnung der Abstände zwischen den Atomen ist. Im Gebiet $r \leqq a$ muß man die räumliche Dispersion der Dielektrizitätskonstanten berücksichtigen.

727. Aus den Gleichungen (6) bis (8) der vorigen Aufgabe ergibt sich, daß die monochromatischen Komponenten der Felder $\mathfrak{E}_\omega(\mathfrak{R}, t)$ und $\mathfrak{H}_\omega(\mathfrak{R}, t)$ die Form

$$E_{\omega z}(\mathfrak{R}, t) = \frac{i e \omega}{\pi c^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon}\right) K_0(s r)\, e^{i\omega(z/v-t)}, \ldots \tag{1}$$

haben, wobei

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega), \qquad \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{2}$$

ist und die K_n modifizierte BESSEL-Funktionen bezeichnen.

In der Wellenzone gilt $|s r| \gg 1$, so daß man den asymptotischen Ausdruck (A III.8) für die Funktionen K_n benutzen kann:

$$K_n(s r) = \sqrt{\frac{\pi}{2 s r}}\, e^{-s r}. \tag{3}$$

Aus (2) folgt, daß s bei reellem $\varepsilon(\omega)$ reell ist, falls $1/\beta^2 > \varepsilon(\omega)$ oder $\beta\, n(\omega) < 1$ gilt [$n(\omega)$ ist der Brechungsindex für Wellen der Frequenz ω]. Bei $\beta\, n(\omega) > 1$ ist s rein imaginär.

Wenn s reell ist [wegen (2) ist dabei $s > 0$], klingt das Feld in der Wellenzone exponentiell ab, und es wird keine Strahlung emittiert. Bei rein imaginärem s ändert sich die Amplitude der Felder in der Wellenzone wie $1/\sqrt{r}$, was

Zylinderwellen entspricht. Wir zeigen, daß diese Wellen auslaufende Wellen sind, d.h., daß in diesem Fall tatsächlich eine Strahlung emittiert wird.

Wir schreiben s in der Form

$$s = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \varepsilon(\omega)} = \pm i \frac{\omega}{c} n \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \tag{4}$$

und klären, welches Vorzeichen der Wurzel gewählt werden muß. Das betrachtete Dielektrikum ohne Verluste ist der Grenzfall eines schwach absorbierenden Dielektrikums mit dem komplexen Brechungsindex $n = n' + i n''$. Damit der Imaginärteil n'' des Brechungsindex tatsächlich eine Energieabsorption beschreibt (d.h., damit die Amplitude der entsprechenden Welle abklingt und nicht ansteigt), müssen die Bedingungen $n'' > 0$ für $\omega > 0$ und $n'' < 0$ für $\omega < 0$ erfüllt sein. Nimmt man n'' als sehr klein an, so kann man schreiben

$$\sqrt{\beta^2 (n' + i n'')^2 - 1} \approx \sqrt{\beta^2 n'^2 - 1} \left(1 + i \frac{\beta n' n''}{\beta^2 n'^2 - 1}\right).$$

Daraus folgt, daß die Bedingung $\operatorname{Re} s > 0$ erfüllt ist, wenn in (4) das Minuszeichen gewählt wird. Läßt man nun n'' gegen Null gehen, so erhält man

$$s = -i \frac{\omega n}{c} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}. \tag{5}$$

Dieses Vorzeichen entspricht aber auslaufenden Wellen, da die Exponentialfunktion in (1) die Form

$$e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{R} - \omega t)} = e^{i[k(z \cos\Theta + r \sin\Theta) - \omega t]} \tag{6}$$

erhält, wobei

$$k = \frac{\omega}{c} n, \quad \cos\Theta = \frac{1}{\beta n}, \quad \sin\Theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}}$$

ist und $k \cos\Theta = k_z = k_{||}$, $k \sin\Theta = k_\perp$ die Komponenten des Wellenvektors sind.

Ist die Bedingung $\beta n(\omega) > 1$ erfüllt, so emittiert also ein Teilchen, das sich im Dielektrikum mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta c$ bewegt, elektromagnetische Wellen der Frequenz ω (TSCHERENKOW-Strahlung). Diese Bedingung besagt, daß die Geschwindigkeit des Teilchens größer als die Phasengeschwindigkeit der Welle mit der Frequenz ω im betrachteten Medium sein muß. Der Ausdruck für den Wellenvektor $\mathfrak{k}$ zeigt, daß die Strahlungsrichtung den Winkel Θ mit der Teilchengeschwindigkeit bildet, für den

$$\cos\Theta = \frac{1}{\beta n(\omega)} \tag{7}$$

gilt. Diese charakteristische Richtung der Strahlung ist eine Folge der Kohärenz der Wellen, die das Teilchen in verschiedenen Punkten seiner Bahn emittiert (s. Aufgabe 729).

Die Phasengeschwindigkeit der TSCHERENKOW-Wellen

$$v_\varphi = \frac{\omega}{c} = \frac{c}{n}$$

ist genauso groß wie bei allen transversalen elektromagnetischen Wellen. Die Polarisation der Strahlung läßt sich leicht mit Hilfe der Gleichung (1) bestimmen; der Vektor $\mathfrak{H}$ steht senkrecht auf der Ebene durch die Teilchenbahn und den Wellenvektor $\mathfrak{k}$, während der Vektor $\mathfrak{E}$ in dieser Ebene liegt (und senkrecht zu $\mathfrak{k}$ in der Wellenzone ist). Daß $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{E}$ orthogonal sind, zeigt man, indem man das Skalarprodukt $\mathfrak{k}\,\mathfrak{E}_\omega$ bildet.

Die Gesamtenergie w_T der TSCHERENKOW-Strahlung je Weglängeneinheit ist gleich dem Zeitintegral des Flusses des POYNTINGschen Vektors durch die Oberfläche eines unendlich weit entfernten Zylinders der Länge 1, der die Teilchenbahn umschließt:

$$w_\mathrm{T} = 2\pi r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})_r \,\mathrm{d}t = -\frac{c\,r}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_\varphi E_z \,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Benutzt man die auf S. 430 angegebene Gleichung, so kann man (8) in der Form

$$w_\mathrm{T} = -\,2\pi\,c\,r\,\mathrm{Re} \int_{\beta n(\omega) > 1} H^*_{\omega\varphi} E_{\omega z} \,\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

schreiben, wobei die monochromatischen Komponenten $H_{\omega\varphi}$ und $E_{\omega z}$ in der Wellenzone genommen werden müssen und über das Frequenzgebiet integriert wird, in dem die Strahlungsbedingung $\beta\,n(\omega) > 1$ erfüllt ist. Mit Hilfe der Gleichungen (1) bis (3) ergibt sich schließlich

$$w_\mathrm{T} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n(\omega) > 1} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right) \omega \,\mathrm{d}\omega. \tag{10}$$

728. Man erhält

$$w_\mathrm{T} = \frac{e^2\,\omega_0^2}{2v^2} (\beta^2 - 1) + \frac{e^2\,\omega_0^2}{2v^2} (\varepsilon_0 - 1) \ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - 1}.$$

Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Werten der Parameter ergibt sich

$$w_\mathrm{T} \approx 5000 \text{ eV/cm}.$$

Die Strahlung ist im Winkelintervall $\Theta_0 \leqq \Theta \leqq \pi/2$ konzentriert, wobei $\beta^2\,\varepsilon_0 \cos^2\Theta_0 = 1$ ist.

729. Man kann jeden Punkt der Bahn als Quelle einer elementaren Anregung betrachten, die sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit $v_\varphi = c/n$ ausbreitet (Abb. 98). Die Front der resultierenden Welle ist die Einhüllende der elementaren Kugelwellen. Die Normale der Front bildet mit der Bahn den Winkel Θ, wobei, wie aus Abb. 98 folgt, $\cos\Theta = 1/\beta\,n$ ist.

730. Das Feld eines gleichförmig bewegten geladenen Teilchens ist eine Superposition von ebenen Wellen mit den Frequenzen $\omega = \mathfrak{k}\,\mathfrak{v}$, wobei $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens und $\mathfrak{k}$ den Wellenvektor bezeichnen (s. Aufgabe 710). Im unbegrenzten Dielektrikum sind Schwingungen mit den Frequenzen $\omega = k\,c/n$ möglich, wobei n der Brechungsindex des Mediums ist (Eigenschwingungen des Mediums). Aus der Resonanzbedingung

$$\frac{k\,c}{n} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{v} = k\,v\cos\Theta$$

folgt $\cos\Theta = c/v\,n$. Wegen $\cos\Theta \leqq 1$ ist $v\,n/c \geqq 1$; das ist gerade die Bedingung für das Auftreten der TSCHERENKOW-Strahlung.

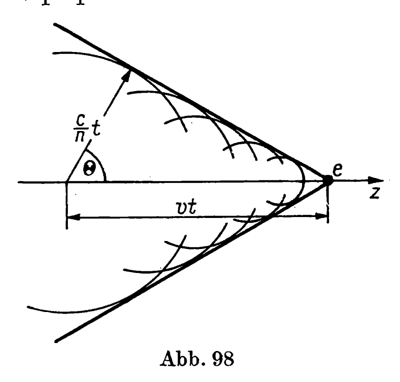


Abb. 98

732. Für $\beta\,n < 1$ (d.h. für $v < v_\varphi$) erhält man auf dieselbe Weise wie in der Aufgabe 711

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon\sqrt{(z - v\,t)^2 + r^2\,(1 - \beta^2\,n^2)}}. \qquad (1)$$

Bei $\beta\,n > 1$ kann die in der Aufgabe 711 benutzte Methode nicht angewandt werden, da der Integrand in diesem Fall bei $k^2 = \varepsilon\,\mu\,(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v})^2/c^2$ einen Pol besitzt.

Wir führen im $\mathfrak{k}$-Raum Zylinderkoordinaten ein und schreiben φ in der Form

$$\varphi(\mathfrak{R}, t) = \frac{e}{2\pi^2\varepsilon}\int \frac{e^{i k_z (z - v t) + i k_\perp r\cos\alpha}}{k_\perp^2 - k_z^2(\beta^2\,n^2 - 1)}\,k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_z\,\mathrm{d}\alpha.$$

Zur Berechnung des Integrals über k_z benutzen wir den Residuensatz. Der Nenner hat Nullstellen in den Punkten $k_z = \pm k_\perp/\sqrt{\beta^2\,n^2 - 1}$. Um die Regel für das Umlaufen dieser Pole zu erhalten, nehmen wir an, daß n einen kleinen Imaginärteil $n'' > 0$ für $k_z > 0$ und $n'' < 0$ für $k_z < 0$ hat (s. die analoge Diskussion in der Aufgabe 727; im vorliegenden Fall stimmt das Vorzeichen von ω wegen $\omega = \mathfrak{k}\,\mathfrak{v}$ mit dem von k_z überein). Daher sind die beiden Nullstellen in die untere Halbebene der komplexen k_z-Ebene verschoben. Bei $z > v\,t$ muß man den Integrationsweg durch einen Bogen in der oberen Halbebene mit unendlich großem Radius schließen (auf dem Bogen ist die Funktion im Integranden gleich Null). Da der Nenner in der oberen Halbebene keine Nullstellen hat, wird das Integral über k_z in diesem Fall Null sein. Bei $z < v\,t$ schließen wir den Integrationsweg in der unteren Halbebene. Beide Pole liefern Beiträge zum Integral, und man erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i k_z (z - v t)}}{k_\perp^2 - k_z^2(\beta^2\,n^2 - 1)}\,\mathrm{d}k_z = -\frac{2\pi}{k_\perp\sqrt{\beta^2\,n^2 - 1}}\sin\frac{k_\perp(z - v\,t)}{\sqrt{\beta^2\,n^2 - 1}}.$$

Das Integral über α wird durch die BESSEL-Funktion $J_0(k_\perp r)$ ausgedrückt [s. (A III.11)]. Das nachfolgende Integral über $k_\perp$ berechnen wir mit Hilfe der Formel 4.451,4 in [72]. Bei $\beta n > 1$ ergibt sich

$$\varphi(\mathfrak{R}, t) = \begin{cases} \dfrac{2e}{\varepsilon \sqrt{(z - v t)^2 - r^2(\beta^2 n^2 - 1)}} & \text{für} \quad z < vt - r\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}\,, \\ 0 & \text{im übrigen Raum.} \end{cases} \quad (2)$$

Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ erhält man durch Multiplikation von φ mit $\varepsilon \mu \mathfrak{v}/c$.

Gleichung (2) zeigt, daß das Feld unstetig ist, wenn die Bedingung $\beta n > 1$ der TSCHERENKOW-Strahlung erfüllt ist. Es existiert nur innerhalb des Kegels, dessen Mantel durch die Gleichung

$$z - v t + r \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} = 0 \quad (3)$$

beschrieben wird. Die Normale zur Kegeloberfläche bildet mit der Bewegungsrichtung des Teilchens den Winkel $\Theta = \arccos(1/\beta n)$. Aus (3) folgt, daß sich die Kegelwelle in Richtung der z-Achse mit der Geschwindigkeit des Teilchens ausbreitet.

Nicht nur elektromagnetische Wellen, sondern auch Wellen anderer Natur können eine solche Struktur besitzen. Zum Beispiel werden unstetige Schallwellen dieser Art durch ein Geschoß angeregt, das sich mit Überschallgeschwindigkeit in der Luft bewegt (ballistische Stoßwelle). Den gleichen Charakter haben Wellen, die ein schnell fahrendes Schiff auf einer Wasseroberfläche erzeugt.

733. TSCHERENKOW-Strahlung tritt unter der Bedingung $\beta n > 1$ auf, wobei $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}$ ist. Die von Null verschiedene Komponente des Vektorpotentials hat die Form

$$A_x = \frac{iI}{c} \int \frac{\exp\left\{i \frac{\omega}{v} (y - v t + \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}\,|z|)\right\}}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}} \frac{\mu(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\omega}.$$

Für die Gesamtenergie der Strahlung erhält man

$$w_{\mathrm{T}} = \frac{2I^2}{c^2 v} \int\limits_{\beta n > 1} \frac{\mu(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}.$$

Die Bremskraft wird mit Hilfe der Gleichung

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{j} \times \mathfrak{B}$$

berechnet, wobei $\mathfrak{B}$ im Punkt $z = 0$, $y = v t$ zu nehmen ist. Die Kraft greift in der Richtung der negativen y-Achse an und ist dem Betrage nach gleich dem Energieverlust je Wegeinheit: $F_y = -w_{\mathrm{T}}$. Dies folgt unmittelbar aus dem Energiesatz.

734. Man erhält

$$w_T = \frac{2e^2}{c^2} \int\limits_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)\left(1 \pm \cos\frac{\omega l}{v}\right)\omega\, d\omega .$$

Plus- und Minuszeichen entsprechen den Fällen *a*) bzw. *b*). Die spektrale Dichte der Strahlung zweier gleichnamiger Ladungen unterscheidet sich um den Faktor $2[1 + \cos(\omega\, l/v)]$ von der einer Ladung. Die Intensität der FOURIER-Komponente mit den Frequenzen

$$\omega = \frac{2\pi v}{l} n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

wächst also um den Faktor 4, während die FOURIER-Komponenten mit den Frequenzen

$$\omega = \frac{\pi v}{l}(2n + 1)$$

verschwinden. Im Fall ungleichnamiger Ladungen ergibt sich das umgekehrte Bild.

Im Fall des in der Bewegungsrichtung orientierten punktförmigen Dipols muß man $1 - \cos(\omega\, l/v)$ in eine Reihe entwickeln, wobei das Argument des Kosinus als klein vorausgesetzt wird. Man erhält

$$w_T = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \omega^3\, d\omega ,$$

wobei p das im Laborsystem gemessene elektrische Dipolmoment bedeutet.

735. Man erhält

$$w_T = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha(\beta^2 n^2 - 1)\right] \omega^3\, d\omega$$

mit $n = \sqrt{\varepsilon}$; p bezeichnet das elektrische Dipolmoment im Laborsystem.

736.

$$w_T = \frac{\mathfrak{m}^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) n^2 \omega^3\, d\omega .$$

737. Die Energieverluste je Weglängeneinheit werden durch das Zeitintegral des Energiestroms durch die Oberfläche eines die Teilchenbahn umschließenden Zylinders mit der Länge 1 und dem Radius a ausgedrückt. Bei der Berechnung der Verluste kann man die Gleichung (9) der Lösung zur Aufgabe 727 benutzen, wenn man in ihr die Werte der Felder bei $r = a$ nimmt und über alle Frequenzen von 0 bis ∞ integriert. Mit Hilfe der in der Aufgabe 726 gefundenen Ausdrücke für die Feldkomponenten und der in der Aufgabenstellung

angegebenen Form der Funktion $\varepsilon(\omega)$ ergibt sich

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l} = \frac{2e^2\,\omega_0^2}{\pi\,v^2}\,\mathrm{Re}\,i\int\limits_0^\infty \left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) s^*\,a K_1(s^*\,a)\,K_0(s\,a)\,x\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

mit $x = \omega/\omega_0$, wobei $\varepsilon(0) \equiv \varepsilon_0 = 1 + \omega_p^2/\omega_0^2$ der statische Wert der Dielektrizitätskonstanten und

$$s^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right)\frac{b - x^2}{1 - x^2}\,x^2, \qquad b = \frac{c^2 - \varepsilon_0\,v^2}{c^2 - v^2} \qquad (2)$$

ist.

Aus (1) folgt, daß zu den Verlusten nur der Imaginärteil des Integrals beiträgt. Da die Funktionen K_0 und K_1 bei reellem Argument reell sind, wird der interessierende Imaginärteil des Integrals nur durch solche x bestimmt, für die s komplex ist. Wie (2) zeigt, hängt dieses Intervall vom Vorzeichen und von der Größe des Parameters b ab. Bei $b > 0$ $(v < c/\sqrt{\varepsilon_0})$ ist s für x-Werte aus dem Intervall $(\sqrt{b}, 1)$ rein imaginär und für x-Werte außerhalb dieses Intervalls reell. Bei $b < 0$ $(v > c/\sqrt{\varepsilon_0})$ ist s imaginär für $0 \leqq x \leqq 1$ und reell für $x > 1$.

Zum Imaginärteil des Integrals tragen außer den angegebenen x-Werten die Punkte bei, in denen der Nenner $\varepsilon_0 - x^2$ verschwindet $(x = \pm\sqrt{\varepsilon_0})$. Da in (1) nur über Werte $x > 0$ integriert wird, interessiert der Pol $x = \sqrt{\varepsilon_0} > 1$. Vernachlässigt man die Verluste, so liegt dieser Pol auf der reellen Achse. Wie man an Hand des expliziten Ausdrucks für $\varepsilon(\omega)$ leicht sieht [s. (6.12)], wird der Pol bei Berücksichtigung der Verluste in die untere Halbebene der komplexen ω-Ebene verschoben.[1] Um den richtigen Wert des Integrals zu erhalten, muß man entweder einen Dämpfungsparameter einführen und diesen nach der Integration gegen Null gehen lassen oder den Integrationsweg leicht deformieren, d.h. den Pol auf einem Kreis mit unendlich kleinem Radius in der oberen Halbebene umlaufen. Wir wenden das zweite Verfahren an. Kennzeichnet man die Integration auf dem erwähnten Halbkreis mit $\frown$, so ergibt sich

$$\int\limits_{\frown} \frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - x^2}\,s^*\,a K_1(s^*\,a)\,K_0(s\,a)\,x\,\mathrm{d}x = \\ = i\,\frac{1-\varepsilon_0}{2}\,\frac{\omega_0\,a\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\,K_0\!\left(\frac{\omega_0\,a\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) K_1\!\left(\frac{\omega_0\,a\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right). \qquad (3)$$

Wir berechnen nun das Integral in dem Gebiet, in dem s rein imaginär ist. Die Zylinderfunktionen K_0 und K_1 sind bei rein imaginärem Argument durch die Beziehung

$$s^*\,a K_1(s^*\,a)\,K_0(s\,a) - s\,a K_1(s\,a)\,K_0(s^*\,a) = i\,\frac{\pi}{2},$$

[1]) Das entspricht dem allgemeinen Satz, daß $\varepsilon(\omega)$ in der oberen Halbebene keine Nullstellen hat (s. [55], § 62).

die sich aus den Eigenschaften der WRONSKI-Determinante des Systems der Lösungen der BESSELschen Gleichungen ergibt (s. [57], § 5.9), miteinander verknüpft. Daher wird

$$\operatorname{Re} i \int\limits_{s^2<0} \left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) s^* a K_1(s^* a) K_0(s a)\, x\, \mathrm{d}x = \\ = -\frac{\pi}{2} \int\limits_{s^2<0} \left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) x\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Das letzte Integral kann elementar berechnet werden. Die Integrationsgrenzen werden in der oben angegebenen Weise gewählt.

Setzt man (3) und (4) in (1) ein, so ergibt sich bei $v < c/\sqrt{\varepsilon_0}$

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l} = \frac{2\pi e^4 N}{m v^2} \left[\frac{2a\,\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v} K_0\left(\frac{a\,\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) K_1\left(\frac{a\,\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) - \beta^2 - \ln(1-\beta^2)\right] \tag{5}$$

und bei $v > c/\sqrt{\varepsilon_0}$

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l} = \frac{2\pi e^4 N}{m v^2} \left[\frac{2a\,\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v} K_0\left(\frac{a\,\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) K_1\left(\frac{a\,\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) - \\ - \frac{1-\beta^2}{\varepsilon_0 - 1} + \ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - 1}\right]. \tag{6}$$

Der bei $a \to \infty$ nichtverschwindende Teil der Gesamtverluste [die Terme in (5) und (6), in denen a nicht vorkommt] stellt die Energieverluste durch Emission transversaler Wellen dar (TSCHERENKOW-Effekt):

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l}\right)_\mathrm{T} \equiv w_\mathrm{T} = \frac{e^2\omega_p^2}{2v^2}\left[-\beta^2 - \ln(1-\beta^2)\right] \qquad \text{für} \quad v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \tag{7a}$$

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l}\right)_\mathrm{T} \equiv w_\mathrm{T} = \frac{e^2\omega_p^2}{2v^2}\left(-\frac{1-\beta^2}{\varepsilon_0 - 1} + \ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - 1}\right) \quad \text{für} \quad v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{7b}$$

Der Ausdruck (7*b*) wurde bereits in der Aufgabe 728 erhalten.

Die von a abhängigen Terme mit K_0 und K_1 in (5) und (6) sind durch das Umlaufen des Pols im Punkt $\omega \equiv \Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ entstanden, in dem ε gleich Null ist. Bei solchen Frequenzen werden aber longitudinale Schwingungen angeregt (s. Aufgabe 456), so daß der Ausdruck

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l}\right)_\mathrm{pol} = \frac{e^2\omega_p^2\Omega\, a}{v^3} K_0\left(\frac{\Omega\, a}{v}\right) K_1\left(\frac{\Omega\, a}{v}\right) \tag{8}$$

die Verluste infolge der Anregung longitudinaler Schwingungen beschreibt (Polarisationsverluste). Bei $\Omega\, a/v \ll 1$ nimmt (8) die einfache Form [s. (A III.6)]

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l}\right)_\mathrm{pol} = \frac{e^2\omega_p^2}{v^2} \ln\frac{v}{\Omega\, a} \tag{9}$$

an. Bei $\Omega a/v \gg 1$ wird $-(\mathrm{d}E/\mathrm{d}l)_{\mathrm{pol}}$ sehr klein (es ist proportional $\mathrm{e}^{-\Omega a/v}$). Das bedeutet, daß der Einfluß der Polarisation des Mediums bei kleinen Geschwindigkeiten klein ist.

Die in dieser Aufgabe beschriebene makroskopische Methode der Berechnung der Energieverluste geht auf FERMI zurück (1940).

738. Man erhält

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l} = \frac{e^2 \omega_p^3 a}{v^3} K_0\left(\frac{\omega_p a}{v}\right) K_1\left(\frac{\omega_p a}{v}\right). \tag{1}$$

Ist $\omega_p a/v \ll 1$, was bei genügend großen Geschwindigkeiten des Teilchens der Fall ist, so kann man für K_n die Näherungsformeln (A III.6) benutzen. Dann geht (1) in

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l} = \frac{e^2 \omega_p^2}{v^2} \ln \frac{2v}{\gamma \omega_p a} \tag{2}$$

über.

Aus (1) und (2) folgt, daß die Verluste des Teilchens wesentlich von der Frequenz der longitudinalen Plasmaschwingungen ω_p abhängen (s. die Aufgaben 456 und 739).

In dem Plasma entsteht keine TSCHERENKOW-Strahlung, da für alle Frequenzen $\varepsilon(\omega) < 1$ gilt und die Strahlungsbedingung $\beta^2 \varepsilon \geqq 1$ nicht erfüllt ist (TSCHERENKOW-Strahlung ist jedoch möglich, wenn sich das Plasma in einem Magnetfeld befindet).

Bei der quantenmechanischen Betrachtung ist die Anregung von Plasmaschwingungen der Entstehung gewisser diskreter Elementaranregungen (Quasiteilchen, „Plasmonen") analog. Die Energie eines Plasmons ist $\hbar \omega_p$, wobei $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg s die PLANCKsche Konstante bedeutet. Für Metalle liegt $\hbar \omega_p$ zwischen 5 und 30 eV. Bei der Anregung von Plasmaschwingungen verliert das Teilchen seine Energie also in diskreten Portionen. Die Untersuchung dieser diskreten (oder charakteristischen) Energieverluste gestattet es, wertvolle Angaben über die Eigenschaften fester Körper zu erhalten.

739. Die Dichte der Elektronenladung ist

$$\varrho(\mathfrak{r}, t) = e \sum_l \delta[\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_l(t)],$$

wobei $\mathfrak{r}_l(t)$ den Radiusvektor des l-ten Elektrons bezeichnet und über alle Elektronen summiert wird. Die FOURIER-Komponenten haben die Form

$$\varrho_{\mathfrak{k}}(t) = \frac{1}{V} \int \varrho(\mathfrak{r}, t)\, \mathrm{e}^{-i \mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, \mathrm{d}\mathfrak{r} = \frac{1}{V} \sum_l \mathrm{e}^{-i \mathfrak{k}\mathfrak{r}_l(t)}.$$

Dabei gilt

$$k_x = \frac{2\pi}{a_1} n_1, \qquad k_y = \frac{2\pi}{a_2} n_2, \qquad k_z = \frac{2\pi}{a_3} n_3,$$

wobei n_1, n_2, n_3 ganze Zahlen sind. Die Bewegungsgleichung des l-ten Elektrons unter dem Einfluß aller übrigen Elektronen kann in der Form

$$\ddot{\mathfrak{r}}_l = -i \frac{4\pi e^2}{m} \sum_{n, \mathfrak{k}}{}' \left(\frac{\mathfrak{k}}{k^2}\right) \mathrm{e}^{i \mathfrak{k}(\mathfrak{r}_l - \mathfrak{r}_n)} \tag{1}$$

geschrieben werden. Die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt die COULOMB-Kraft dar, die am l-ten Elektron seitens aller übrigen Elektronen angreift. Der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die Terme mit $n = l$ und $\mathfrak{k} = 0$ wegzulassen sind (der Term mit $\mathfrak{k} = 0$ kann unterdrückt werden, weil die Komponente $\varrho_{\mathfrak{k}}$ der Elektronenladung bei $\mathfrak{k} = 0$ durch die positive Ionenladung kompensiert wird). Differenziert man $\varrho_{\mathfrak{k}}(t)$ zweimal nach der Zeit und benutzt (1), so ergibt sich

$$\frac{d^2\varrho_{\mathfrak{k}}}{dt^2} = -\frac{1}{V}\sum_l (\mathfrak{k}\,\mathfrak{v}_l)\,e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}_l} - \frac{1}{V^2}\sum_{l\neq j,\,\mathfrak{k}'\neq 0}\frac{4\pi e^2}{m k'^2}(\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}')\,e^{i(\mathfrak{k}'-\mathfrak{k})\mathfrak{r}_l}e^{-i\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_j}.$$

Da sich die Elektronenkoordinaten $\mathfrak{r}_l$ nach einem Zufallsgesetz ändern, werden sich die Terme der Summe

$$\sum_{\mathfrak{k}'}\frac{4\pi e^2}{m k'^2}(\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}')\sum_l e^{i(\mathfrak{k}'-\mathfrak{k})\mathfrak{r}_l}$$

gegenseitig kompensieren. Die Werte der Summe $\sum e^{i(\mathfrak{k}'-\mathfrak{k})\mathfrak{r}_l}$ bei $\mathfrak{k}' \neq \mathfrak{k}$ werden klein sein gegen ihren Wert bei $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$, der gleich der Gesamtzahl N der Elektronen ist. Man kann deshalb in der Summe über $\mathfrak{k}'$ die Terme mit $\mathfrak{k}' \neq \mathfrak{k}$ weglassen und erhält

$$\frac{d^2\varrho_{\mathfrak{k}}}{dt^2} = -\omega_p^2\varrho_{\mathfrak{k}} - \frac{1}{V}\sum_l (\mathfrak{k}\,\mathfrak{v}_l)^2\,e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}_l}. \tag{2}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (2) enthält die Größe ω_p, die die kollektiven Eigenschaften des Plasmas charakterisiert, da sie die Schwingungsfrequenz des Plasmas als Ganzes darstellt. Im letzten Term kommen die Größen $(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v}_l)$ vor, die die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen enthalten. Die kollektiven Eigenschaften überwiegen, wenn ω_p^2 groß gegen den Mittelwert von $(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v})^2$ ist. Unter dieser Bedingung darf der letzte Term vernachlässigt werden, und die Dichte des Elektronengases führt harmonische Schwingungen mit der Frequenz ω_p aus.

Wir schätzen nun noch das Gebiet der k-Werte ab, für die $\omega_p^2 \gg \overline{(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v})^2}$ ist. Wegen

$$\overline{(\mathfrak{k}\,\mathfrak{v})^2} = \sum_{m,n} k_m\,k_n\,\overline{v_m\,v_n} = \frac{1}{3}k^2\,v^2$$

ergibt sich $k^2 \ll 6\pi\,e^2 N/\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}$. Ist die Elektronenverteilung eine MAXWELL-Verteilung, so gilt $^1/_2 m\,\overline{v^2} = {}^3/_2 k_0 T$ und $k \ll \varkappa$, wobei $1/\varkappa = k_0 T/4\pi\,e^2 N$ den DEBYE-HÜCKELschen Radius (s. Aufgabe 308), k_0 die BOLTZMANN-Konstante und T die Temperatur bedeuten.

740. Wir entwickeln die Stromdichte (Abb. 99)

$$j = j_z = \begin{cases} -e\,v\,\delta(z - v\,t)\,\delta(x)\,\delta(y) & \text{für} \quad z \geqq 0, \\ -e\,v\,\delta(z + v\,t)\,\delta(x)\,\delta(y) & \text{für} \quad z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

in ein FOURIER-Integral bezüglich der Zeit:

$$j = \int j_\omega \, e^{-i\omega t} \, dt, \quad j_\omega = \begin{cases} -\dfrac{e}{2\pi} e^{-i\omega z/v} \, \delta(x) \, \delta(y) & \text{für} \quad z \geqq 0, \\ -\dfrac{e}{2\pi} e^{i\omega z/v} \, \delta(x) \, \delta(y) & \text{für} \quad z \leqq 0 \end{cases} \tag{2}$$

und führen den Polarisationsvektor gemäß (12.9) ein. Sein Betrag ist

$$P_\omega = -\frac{j_\omega}{i\omega}, \tag{3}$$

seine Richtung ist die Richtung der z-Achse.

Die Gleichungen (2) und (3) zeigen, daß die durch ein bewegtes Teilchen erzeugte Ladungs- und Stromdichte einem Satz von harmonischen Oszillatoren äquivalent sind, die nach dem Gesetz

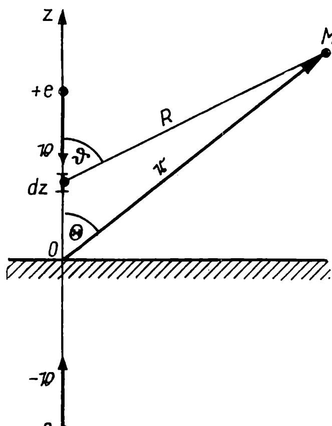


Abb. 99

$$P_\omega = \begin{cases} -\dfrac{ie}{2\pi\omega} e^{-i\omega z/v} \delta(x) \delta(y) & \text{für} \quad z \geqq 0, \\ -\dfrac{ie}{2\pi\omega} e^{i\omega z/v} \delta(x) \delta(y) & \text{für} \quad z \leqq 0 \end{cases} \tag{4}$$

im Raum verteilt sind. Das Auftreten von $\delta(x)\,\delta(y)$ in (4) bedeutet, daß sich die Oszillatoren praktisch nur auf der Bewegungslinie der Ladung befinden.

Die Oszillatoren, die im Intervall dz liegen, erzeugen im Punkt M der Wellenzone das Magnetfeld (vgl. Abb. 99)

$$d\mathfrak{H}_\omega = -\frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R^2} \mathfrak{P}_\omega \times \mathfrak{R} \, dz = $$
$$= -\frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R} P_\omega \sin\vartheta \, \mathfrak{e}_\alpha \, dz. \tag{5}$$

Integriert man (5) über z, so erhält man das Gesamtfeld

$$H_{\omega\alpha} = \frac{ie\omega}{2\pi c^2} \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{i(\omega z/v + kR)} \sin\vartheta}{R} dz + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i(\omega z/v - kR)} \sin\vartheta}{R} dz \right].$$

Hierbei wird über Produkte von abnehmenden und oszillierenden Funktionen integriert, so daß das Gebiet in der Nähe von $z = 0$ den Hauptbeitrag liefert. Das ist erklärlich, da die Strahlung beim Übergang vom Vakuum in das Metall auftritt. Zur genäherten Berechnung der Integrale setzen wir in den Exponentialfunktionen $R = r - z\cos\Theta$. Drückt man $\sin\vartheta$ durch R aus, so ergibt sich

$$H_{\omega\alpha} = \frac{ie\omega \, e^{ikr} \, r\sin\Theta}{2\pi c^2} \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{i(1-\beta\cos\Theta)z\omega/v}}{R^2} dz + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+\beta\cos\Theta)z\omega/v}}{R^2} dz \right].$$

Durch partielle Integration lassen sich diese Integrale als Potenzreihen in R^{-1} darstellen; bricht man die Entwicklung bei $1/R$ ab, so wird

$$H_\alpha = E_\Theta \approx \frac{e\,\omega}{2\pi c^2}\left[\frac{1}{\frac{\omega}{v}(1-\beta\cos\Theta)} + \frac{1}{\frac{\omega}{v}(1+\beta\cos\Theta)}\right]\frac{\sin\Theta\, e^{ikR}}{r}. \tag{6}$$

Der zweite Term in (6) beschreibt das Strahlungsfeld, das beim plötzlichen Abbremsen der Ladung entsteht, und der erste Term die durch das Bild erzeugte Strahlung.

Die Intensität der Strahlung mit der Frequenz ω im Raumwinkel $d\Omega$ ist

$$dI(\omega,\Theta) = c\,|E(\omega,\Theta)|^2 r^2\, d\Omega = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3}\,\frac{\sin^2\Theta\, d\Omega}{(1-\beta^2\cos^2\Theta)^2}. \tag{7}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ($\beta \ll 1$) ergibt (7) die Dipolstrahlung

$$dI(\omega,\Theta) = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3}\sin^2\Theta\, d\Omega, \tag{8}$$

deren Intensität dem Quadrat der Teilchengeschwindigkeit proportional ist. Wir merken an, daß die Strahlungsintensität nicht von der Teilchenmasse abhängt.

Die Integrale von (7) und (8) über ω, die die Winkelverteilung der Gesamtstrahlung (mit allen Frequenzen) angeben, divergieren. Das ist dadurch bedingt, daß das Metall als ideal leitend vorausgesetzt wurde. In Wirklichkeit darf man das Metall schon im infraroten Teil des Spektrums nicht mehr als ideal leitend annehmen, so daß die Gleichungen (7) und (8) bei hohen Frequenzen nicht richtig sind.

Die spektrale Verteilung der Gesamtstrahlung ergibt sich durch Integration von (7) über die obere Halbkugel:

$$I(\omega) = \frac{4e^2 v^2}{3\pi c^3}\left(\frac{3}{8}\,\frac{\beta^2-1}{\beta^3}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{3}{4\beta^2}\right). \tag{9}$$

Im extrem relativistischen Fall, in dem die Gesamtenergie E des Teilchens sehr groß gegen seine Ruhenergie $m\,c^2$ ist, liefert (9)

$$I(\omega) = \frac{2e^2}{\pi c}\ln\frac{E}{m\,c^2}.$$

Die Strahlungsintensität nimmt also mit wachsender Energie logarithmisch zu.

Im nichtrelativistischen Grenzfall strebt der Klammerausdruck in (9) gegen 1, und es wird

$$I(\omega) = \frac{4e^2 v^2}{3\pi c^3}. \tag{10}$$

741. Die Fourier-Komponenten des Polarisationsvektors sind

$$P_\omega = -\frac{i\,e}{2\pi\,\omega}\,e^{-iz\omega/v}\,\delta(x)\,\delta(y). \tag{1}$$

Zunächst bestimmen wir das von den Oszillatoren im Gebiet $z > 0$ erzeugte Feld im Punkt A (Abb. 100). Es genügt, die in der Nähe des Punktes $z = 0$ liegenden Oszillatoren zu betrachten, da nur diese Beiträge zum Strahlungsfeld liefern (s. die vorige Aufgabe).

Bei der Anwendung des Reziprozitätssatzes wählen wir den Oszillator $\mathfrak{p}_B$ auf der z-Achse in der Nähe von $z = 0$ (Punkt B) und den Oszillator $\mathfrak{p}_A$ im Aufpunkt A, in dem wir das Feld bestimmen wollen. Beide Oszillatoren seien dem Betrag nach gleich und sollen die Richtung der z-Achse haben; der Abstand zwischen ihnen sei groß gegen die Wellenlänge. Der Oszillator $\mathfrak{p}_B$ erzeugt im Punkt A ein Feld, dessen Amplitude $\mathfrak{E}_+$ mit der z-Achse einen Winkel von

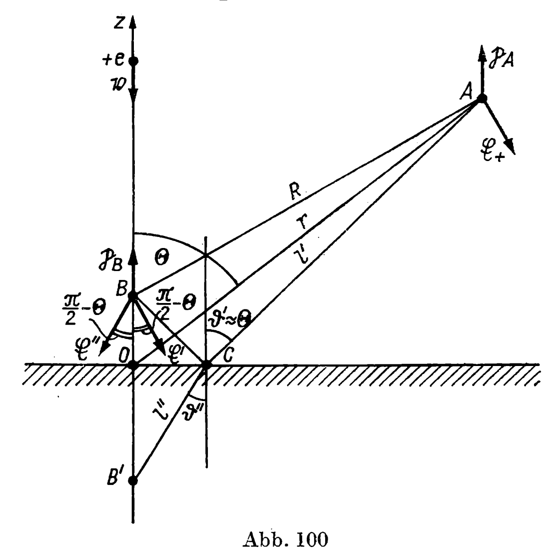


Abb. 100

$\approx \pi/2 - \Theta$ bildet (Abb. 100). Die Wellen gelangen auf zwei Wegen von A nach B: entweder unmittelbar oder nach Reflexion an der Grenze des Dielektrikums. Die entsprechenden Amplituden sind in der Abbildung mit $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ bezeichnet. Sie bilden mit der z-Achse den Winkel $\pi/2 - \vartheta' \approx \pi/2 - \Theta$. Daher gilt nach dem Reziprozitätssatz $\mathfrak{E}_+ = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''$ oder, da in der Wellenzone des Oszillators $\mathfrak{H} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}$ ist, $\mathfrak{H}_+ = -\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}''$ (alle drei Vektoren $\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ stehen auf der Ebene AOz senkrecht).

Die Welle, die von A direkt nach B gelangt, erzeugt das Feld

$$\mathrm{d}H' = \frac{\omega^2 \, \mathrm{e}^{ikR}}{c^2 R} P_\omega \sin\Theta \, \mathrm{d}z. \tag{2}$$

Die Amplitude der reflektierten Welle kann mit Hilfe der FRESNELschen Formeln bestimmt werden, da der Abstand $\overline{AC}$ groß ist und die im Punkt A emittierte Welle in der Nähe des Punktes C als eben angesehen werden kann.

Aus den Gleichungen (8.20) ergibt sich unter Berücksichtigung der Änderung der Wellenphase und von $\vartheta' \approx \Theta$

$$dH'' = \frac{\omega^2 f\, e^{ikR'}}{c^2 R'} P_\omega \sin\Theta \, dz \qquad (3)$$

mit

$$f = \frac{\varepsilon\cos\Theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2\Theta}}{\varepsilon\cos\Theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\Theta}}, \qquad R' = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Das Feld $\mathfrak{H}_+$, das im Punkt A durch alle Oszillatoren erzeugt wird, die sich im Gebiet $z > 0$ befinden, ergibt sich durch Integration der Summe $-(dH' + dH'')$ über z von 0 bis ∞. Die Integration wird wie in der vorigen Aufgabe durchgeführt. Man erhält

$$H_+ = \frac{e\,v}{2\pi c^2}\left(\frac{1}{1+\beta\cos\Theta} + \frac{f}{1-\beta\cos\Theta}\right)\frac{\sin\Theta\, e^{ikR}}{r}. \qquad (4)$$

Man kann diese Formel leicht durch Vergleich mit der analogen Beziehung (6) der vorigen Aufgabe verstehen. Der erste Term beschreibt das Feld eines Teilchens, das sich im Vakuum bewegt und im Punkt $z = 0$ plötzlich angehalten wird, und der zweite das Feld des Bildes $(-e f)$, das sich im Dielektrikum auf das Teilchen zu bewegt und im Punkt $z = 0$ ebenfalls zur Ruhe kommt. Im Unterschied zum Fall des idealen Leiters ist das Bild um das f-fache schwächer und hängt von der Frequenz ω der betrachteten FOURIER-Komponente [über $\varepsilon(\omega)$] und von der Lage des Aufpunktes (über den Winkel Θ) ab.

Das Feld $\mathfrak{H}_-$ der Dipole in $z < 0$ wird auf dieselbe Weise bestimmt. Die Welle gelangt von A nach B, indem sie an der Grenze gebrochen wird. Mit Hilfe der FRESNELschen Formeln ergibt sich

$$dH_- = -\frac{\omega^2}{\varepsilon c^2 R''}(1+f)\, P_\omega \sin\vartheta'\, e^{i\varphi}\, dz. \qquad (5)$$

Dabei ist $R'' = l' + l''$ die Länge der gebrochenen Strecke $\overline{AC} + \overline{CB'}$ (siehe Abb. 100). Die Phase φ berücksichtigt die Retardierung:

$$\varphi = \frac{\omega}{c} l' + \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\, l''.$$

Bei $|z| \ll r$ $(z < 0)$ ist $l' = r + z\tan\vartheta''\sin\Theta$, $l'' = -z/\cos\vartheta''$. Berücksichtigt man das Brechungsgesetz $\sin\vartheta'' = \sin\vartheta'/\sqrt{\varepsilon}$ und ersetzt ϑ' durch Θ, so ergibt sich

$$\varphi = \frac{\omega}{c} r - \frac{\omega}{c} z\sqrt{\varepsilon - \sin^2\Theta}.$$

Integriert man (5) von $-\infty$ bis 0, so erhält man das Feld der Dipole, die im Gebiet $z < 0$ liegen:

$$H_- = -\frac{e\,v}{2\pi\varepsilon c^2}(1+f)\frac{1}{1-\beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2\Theta}}\,\frac{\sin\Theta\, e^{ikr}}{r}. \qquad (6)$$

Das Gesamtfeld im Punkt A ist $H_+ + H_-$. Die Intensität der Strahlung mit der Frequenz ω in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ beträgt

$$\mathrm{d}I(\omega, \Theta) = \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} A^2(\omega, \Theta) \sin^2\Theta \, \mathrm{d}\Omega$$

mit

$$A(\omega, \Theta) = \frac{2\beta \cos\Theta}{1 - \beta \cos^2\Theta} + (1 + f)\left[\frac{1}{\varepsilon\left(1 - \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2\Theta}\right)} - \frac{1}{1 - \beta\cos\Theta}\right]. \qquad (7)$$

A hängt über $\varepsilon(\omega)$ von der Frequenz ab.

Im nichtrelativistischen Grenzfall $\beta \ll 1$ ergibt sich

$$\mathrm{d}I(\omega, \Theta) = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \frac{(\varepsilon - 1)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta}{\left(\varepsilon\cos\Theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\Theta}\right)^2} \, \mathrm{d}\Omega. \qquad (8)$$

ANHANG I

DIE δ-FUNKTION

Die DIRACsche δ-Funktion ist durch die Gleichungen

$$\delta(x-a)=\begin{cases}0 & \text{für} \quad x \neq a,\\ \infty & \text{für} \quad x = a,\end{cases} \tag{A I.1}$$

$$\int_{\Delta} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{A I.2}$$

definiert.[1] In (A I.2) wird über ein Intervall Δ beliebiger Länge integriert, das den Punkt a enthält.

Die δ-Funktion genügt den folgenden Beziehungen:

$$\delta(x) = \delta(-x), \tag{A I.3}$$

$$\int_{\Delta} f(x)\,\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a), \tag{A I.4}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\,\delta(x), \tag{A I.5}$$

wenn $f(x)$ eine stetige Funktion bedeutet.

Die dreidimensionale δ-Funktion wird analog definiert:

$$\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{a}) = \delta(x-a_x)\,\delta(y-a_y)\,\delta(z-a_z) = \begin{cases}0 & \text{für} \quad \mathfrak{r} \neq \mathfrak{a},\\ \infty & \text{für} \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{a};\end{cases} \tag{A I.6}$$

$$\int_{V} f(\mathfrak{r})\,\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{a})\,\mathrm{d}V = \begin{cases} f(\mathfrak{a}), & \text{falls } \mathfrak{a} \text{ innerhalb von } V \text{ liegt},\\ 0, & \text{falls } \mathfrak{a} \text{ außerhalb von } V \text{ liegt}.\end{cases} \tag{A I.7}$$

Dabei soll $f(\mathfrak{r})$ wieder eine stetige Funktion sein.

Mit Hilfe der δ-Funktion kann man die räumliche Ladungsverteilung eines punktförmigen Teilchens beschreiben. Die räumliche Dichte einer solchen Verteilung ist

$$\varrho(\mathfrak{r}) = e\,\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{a}). \tag{A I.8}$$

Dabei bedeuten e die Ladung des Teilchens und $\mathfrak{a}$ den Radiusvektor des Punktes, in dem sich das Teilchen befindet.

---

[1]) Die mathematisch exakte Definition der δ-Funktion erfordert eine Verallgemeinerung des üblichen Funktionsbegriffs.

Man kann auch eine Ableitung der δ-Funktion definieren. Ihre exakte Bedeutung ist in der Gleichung

$$\int_{\Delta} f(x) \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} \, \mathrm{d}x = - \frac{\partial f(a)}{\partial a} \tag{A I.9}$$

enthalten, die sich durch partielle Integration ergibt. Analog werden die Ableitungen höherer Ordnung definiert:

$$\int_{\Delta} f(x) \, \delta^{(n)}(x-a) \, \mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(a). \tag{A I.10}$$

Die δ-Funktion selbst kann als Ableitung einer Funktion aufgefaßt werden, die im Punkt a einen endlichen Sprung b aufweist. Ist $f(a+0) - f(a-0) \equiv b$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b \, \delta(x-a) + \langle \text{beschränkte Funktion} \rangle. \tag{A I.11}$$

Eine anschauliche Vorstellung über die δ-Funktion und ihre Ableitungen erhält man, wenn man die stetige Funktion $\delta(x-a, \alpha)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\Delta} \delta(x-a, \alpha) \, \mathrm{d}x = 1$$

graphisch darstellt (Abb. 101). Der Parameter α charakterisiert die Breite des Intervalls, in dem $\delta(x-a, \alpha)$ von Null verschieden ist. Die δ-Funktion und ihre Ableitungen werden dann durch die Grenzwerte

$$\delta(x-a) = \lim_{\alpha \to 0} \delta(x-a, \alpha),$$

$$\frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\partial \delta(x-a, \alpha)}{\partial x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

definiert.

Abb. 101

Einige gebräuchliche Darstellungen der δ-Funktion sind

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \tag{A I.12}$$

$$\delta(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin kx}{x}, \tag{A I.13}$$

$$\delta(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 kx}{k x^2}. \tag{A I.14}$$

Mit Hilfe dieser Darstellungen können die Eigenschaften (A I.3) bis (A I.5) der δ-Funktion bewiesen werden. Bei der Berechnung des Integrals $\int f(x)\,\delta(x-a)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe von (A I.12) bis (A I.14) muß man berücksichtigen, daß erst nach der Integration zur Grenze übergegangen wird:

$$\int f(x)\,\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int f(x)\,\delta(x-a,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Aus der Betrachtung des FOURIER-Integrals ergibt sich eine weitere nützliche Darstellung der δ-Funktion:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos kx\,\mathrm{d}k. \tag{A I.15}$$

Mit der δ-Funktion sind zwei weitere verallgemeinerte Funktionen, $\delta_+(x)$ und $\delta_-(x)$, eng verwandt. Sie werden durch die (A I.15) analogen Beziehungen

$$\delta_\pm(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\pm ikx}\,\mathrm{d}k \tag{A I.16}$$

definiert.

Die Funktionen δ_+ und δ_- sind durch die Beziehungen

$$\delta_\pm(x) = \frac{1}{2}\,\delta(x) \pm \frac{i}{2\pi}\,\mathsf{P}\frac{1}{x}, \tag{A I.17}$$

mit der δ-Funktion verknüpft, so daß

$$\delta(x) = \delta_+(x) + \delta_-(x)$$

gilt. Das Symbol P[1]) in (A I.17) bezeichnet den Hauptwert des Integrals:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,\delta_\pm(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(a) \pm \frac{i}{2\pi}\,\mathsf{P}\int_{a_1}^{a_2}\frac{f(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}f(a) \pm \frac{i}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{a_1}^{a-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{a_2}\frac{f(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x\right],$$

wobei $a_1 < a < a_2$, $\varepsilon > 0$ ist.

---

[1]) An Stelle von $\mathsf{P}\int_a^b$ wird oft auch die Bezeichnung $⨍_a^b$ benutzt.

ANHANG II

LEGENDRESCHE KUGELFUNKTIONEN

Die von den Polarwinkeln ϑ und α abhängige Kugelfunktion der Ordnung l, m ist durch die Beziehung

$$Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \delta_m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_{lm}(\cos\vartheta) \, e^{im\alpha} \qquad \text{(A II.1)}$$

definiert, wobei die ganzen Zahlen l und m den Bedingungen $l \geqq 0$, $-l \leqq \leqq m \leqq l$ genügen; δ_m ist gleich $(-1)^m$ für $m \geqq 0$ und gleich 1 für $m < 0$. Mit P_{lm} ist das zugeordnete LEGENDREsche Polynom

$$P_{lm}(x) = (1 - x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|} P_l(x)}{dx^{|m|}} \qquad \text{(A II.2)}$$

bezeichnet, wobei $P_l(x)$ das übliche LEGENDREsche Polynom bedeutet, das bei $m = 0$ mit $P_{lm}(x)$ übereinstimmt:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2-1)^l}{dx^l} = P_{l0}(x). \qquad \text{(A II.3)}$$

Die zugeordneten LEGENDREschen Polynome genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dP_{lm}(x)}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{x^2-1}\right] P_{lm}(x) = 0. \qquad \text{(A II.4)}$$

Für das Rechnen mit Kugelfunktionen sind folgende Beziehungen nützlich:

$$\left.\begin{aligned} Y_{lm}(0,0) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{m0}, \quad Y_{lm}(\vartheta,\alpha) = (-1)^l Y_{lm}(\pi-\vartheta, \pi+\alpha), \\ P_l(1) &= 1, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},^{1)} \quad P_{2n+1}(0) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A II.5)}$$

$$\left.\begin{aligned} (l+1) P_{l+1}(x) &= (2l+1)\, x P_l(x) - l P_{l-1}(x), \\ (x^2-1)\frac{dP_l(x)}{dx} &= l[x P_l(x) - P_{l-1}(x)]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A II.6)}$$

---

[1]) Es ist

$$n!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n & \text{für } n \text{ gerade}, \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n & \text{für } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Die Kugelfunktionen für $l = 0, 1, 2$ sind

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta, \\
&Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{\pm i\alpha}, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\, \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2}, \\
&Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta\, e^{\pm i\alpha}, \quad Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta\, e^{\pm 2i\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{A II.7}$$

Die Kugelfunktionen bilden auf der Oberfläche einer Kugel ein vollständiges Orthonormalsystem der Funktionen von ϑ und α. Das bedeutet, daß

$$\int Y_{lm}^*(\vartheta, \alpha)\, Y_{l'm'}(\vartheta, \alpha)\, d\Omega = \delta_{ll'}\, \delta_{mm'} \tag{A II.8}$$

gilt, wobei $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\alpha$ das Raumwinkelelement bezeichnet, und daß jede quadratisch integrable Funktion von ϑ und α in eine Reihe nach den Y_{lm} entwickelt werden kann:

$$f(\vartheta, \alpha) = \sum_{l,m} a_{lm}\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha). \tag{A II.9}$$

Die Koeffizienten a_{lm} sind durch die Beziehungen

$$a_{lm} = \int Y_{lm}^*(\vartheta, \alpha)\, f(\vartheta, \alpha)\, d\Omega \tag{A II.10}$$

bestimmt.

Funktionen der Form $r^{-l-1}\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ und $r^l\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ bezeichnet man als Kugelharmonische. Mit Hilfe von (A II.4) kann man leicht zeigen, daß die Kugelharmonischen spezielle Lösungen der LAPLACEschen Gleichung in allen Punkten außer $r = 0$ darstellen:

$$\Delta\left[\frac{Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}}\right] = 0, \quad \Delta[r^l\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] = 0. \tag{A II.11}$$

Lösung der LAPLACEschen Gleichung ist auch jede Superposition von Kugelharmonischen mit beliebigen Koeffizienten:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (a_{lm}\, r^{-l-1} + b_{lm}\, r^l)\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha). \tag{A II.12}$$

Sind $\mathfrak{r}(r, \vartheta, \alpha)$ und $\mathfrak{r}'(r', \vartheta', \alpha')$ die Radiusvektoren zweier Raumpunkte mit $r > r'$ (s. Abb. 7, S. 16), so gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\,r'\cos\gamma + r'^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}}\, P_l(\cos\gamma). \tag{A II.13}$$

Die Funktion $1/R$ bezeichnet man als erzeugende Funktion der LEGENDRE-schen Polynome. Das Additionstheorem für die Kugelfunktionen lautet

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)\, Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha'). \qquad \text{(A II.14)}$$

Die Winkel ϑ, α und ϑ', α' sind in (A II.14) völlig symmetrisch enthalten.

Setzt man (A II.14) in (A II.13) ein, so erhält man die Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r'^l}{(2l+1)\, r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)\, Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha'). \qquad \text{(A II.15)}$$

Aus (A II.13) ergibt sich die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh\xi - \cos\eta}} = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+1/2)|\xi|} P_l(\cos\eta) \qquad \text{(A II.16)}$$

mit $r'/r = e^{-|\xi|}$.

ANHANG III

ZYLINDERFUNKTIONEN

Die Zylinderfunktionen $Z_p(k\,r)$ sind die Lösungen der BESSELschen Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}r} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) Z = 0. \qquad \text{(A III.1)}$$

Die Lösungen, die bei $p \geqq 0$ im Punkt $r = 0$ beschränkt sind, bezeichnet man als Zylinderfunktionen erster Art (oder BESSEL-Funktionen):

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k!\, \Gamma(p + k + 1)}. \qquad \text{(A III.2)}$$

Da in (A III.1) p^2 eingeht, ist auch J_{-p} Lösung dieser Gleichung. Dasselbe gilt für eine beliebige Linearkombination von J_p und J_{-p}. Die Zylinderfunktionen zweiter Art (NEUMANNsche Funktionen)[1]) sind folgendermaßen definiert:

$$N_p(x) = \frac{J_p\,(x) \cos p\,\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\,\pi}. \qquad \text{(A III.3)}$$

Häufig benötigt man auch die Zylinderfunktionen dritter Art (HANKEL-Funktionen):

$$\left.\begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= J_p(x) + i N_p(x), \\ H_p^{(2)}(x) &= J_p(x) - i N_p(x). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A III.4)}$$

Die allgemeine Lösung der BESSELschen Gleichung ist eine Linearkombination aus zwei beliebigen linear unabhängigen Zylinderfunktionen mit beliebigen Koeffizienten. Solche Funktionen sind z.B. $J_p(x)$ und $J_{-p}(x)$, wenn p nicht ganzzahlig ist. Bei $p = n$ (n ganz) sind die Funktionen $J_n(x)$ und $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ linear abhängig; als allgemeine Lösung kann man dann z.B. eine Linearkombination von J_n und N_n wählen.

Zylinderfunktionen mit rein imaginärem Argument bezeichnet man als modifizierte BESSEL-Funktionen. Sie werden bei ganzzahligem n durch die Gleichungen

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(i\,x), \qquad K_n(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{n+1} H_n^{(1)}(i\,x) \qquad \text{(A III.5)}$$

definiert. Die Funktion $K_n(x)$ heißt MCDONALD-Funktion.

---

[1]) Diese Funktionen bezeichnet man manchmal auch als WEBERsche Funktionen und schreibt sie in der Form $Y_p(x)$.

In der Physik benötigt man häufig eine angenäherte Form der Zylinderfunktionen für kleine und große Argumente. Bei $|x| \ll 1$ gilt

$$\left.\begin{aligned}
&J_p(x) \approx \frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)}, \quad J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}, \quad I_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!},\\
&J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}, \quad I_0(x) \approx 1 + \frac{x^2}{4},\\
&N_n(x) \approx -\frac{2^n (n-1)!}{\pi x^n}, \quad K_n(x) \approx \frac{2^{n-1}(n-1)!}{x^n},\\
&N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2}, \quad K_0(x) \approx \ln \frac{2}{\gamma x},
\end{aligned}\right\} \tag{A III.6}$$

wobei $n \geqq 1$ ganzzahlig und $\ln\gamma = 0{,}5772$ ist.

Ausdrücke für die Hankel-Funktionen mit $|x| \ll 1$ können aus (A III.6) mit Hilfe von (A III.4) abgeleitet werden. Insbesondere gilt

$$H_0^{(1,2)}(x) \approx 1 \pm \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} = \pm \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma x}{\pm 2i}\right). \tag{A III.7}$$

Die asymptotischen Ausdrücke für die Zylinderfunktionen ($|x| \gg 1$) lauten:

$$\left.\begin{aligned}
J_p(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\\
N_p(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\\
H_p^{(1,2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \mathrm{e}^{\pm i\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},\\
I_n(x) &\approx \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, \mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}\right\} \tag{A III.8}$$

Zwischen den Funktionen J_p, N_p und $H_p^{(1,2)}$ (gemeinsames Symbol Z_p) sowie I_n und K_n bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{p-1}(x) + Z_{p+1}(x) &= \frac{2p}{x} Z_p(x),\\
Z_{p-1}(x) - Z_{p+1}(x) &= 2Z_p'(x),\\
Z_0'(x) &= -Z_1(x);
\end{aligned}\right\} \tag{A III.9}$$

$$\left.\begin{aligned}
I_{p-1}(x) + I_{p+1}(x) &= \frac{2p}{x} I_p(x),\\
I_{p-1}(x) - I_{p+1}(x) &= 2I_p'(x),\\
K_{p-1}(x) - K_{p+1}(x) &= -\frac{2p}{x} K_p(x),\\
K_{p-1}(x) + K_{p+1}(x) &= -2K_p'(x).
\end{aligned}\right\} \tag{A III.10}$$

Die BESSEL-Funktionen können in Form von Integralen dargestellt werden:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(x \sin\varphi - n\varphi)} \, d\varphi = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(x\cos\varphi - n\varphi)} \, d\varphi. \qquad \text{(A III.11)}$$

Dabei ist α eine beliebige reelle Zahl.

Integrale mit BESSEL-Funktionen lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (A III.9) und (A III.10) berechnen. Insbesondere gilt

$$\int x^p Z_p(x)\, dx = x^p Z_{p-1}(x), \qquad \int x^{-p} Z_p(x)\, dx = -x^{-p} Z_{p+1}(x), \qquad \text{(A III.12)}$$

$$\int\limits_0^1 x J_p(\alpha x)\, J_p(\beta x)\, dx = \frac{\alpha J_p'(\alpha)\, J_p(\beta) - \beta J_p'(\beta)\, J_p(\alpha)}{\beta^2 - \alpha^2}. \qquad \text{(A III.13)}$$

Auch die folgenden Integralgleichungen sind oft von Nutzen ($\operatorname{Re} k > 0$):

$$(\varrho^2 + z^2)^{-1/2} = \int\limits_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\varrho)\, dk, \qquad \text{(A III.14)}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos px\, dx}{(q^2 + x^2)^{s+1}} = \sqrt{\pi} \left(\frac{p}{2q}\right)^{s+1/2} \frac{K_{s+1/2}(pq)}{\Gamma(s+1)}, \qquad \text{(A III.15)}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_0(xr)\, x\, dx}{x^2 + k^2} = k K_0(kr). \qquad \text{(A III.16)}$$

Die sphärischen BESSEL-Funktionenerster Art und die sphärischen HANKEL-Funktionen erster und zweiter Art [gemeinsames Symbol $z_l(\varrho)$] sind durch die Gleichungen

$$j_l(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}}\, J_{l+1/2}(\varrho), \qquad h_l^{(1,2)}(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}}\, H_{l+1/2}^{(1,2)}(\varrho) \qquad \text{(A III.17)}$$

definiert. Für kleine ϱ gilt

$$j_l(\varrho) = \frac{\varrho^l}{(2l+1)!!}, \qquad \text{(A III.18)}$$

während $h_l^{(1,2)}(\varrho)$ wie ϱ^{-l-1} divergiert. Für große ϱ ist

$$\left.\begin{aligned} j_l(\varrho) &= \frac{1}{\varrho} \cos\left[\varrho - \frac{(l+1)\pi}{2}\right], \\ h_l^{(1,2)}(\varrho) &= \frac{1}{\varrho}\, e^{\pm i[\varrho - 1/2(l+1)\pi]}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A III.19)}$$

Für $R = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|$ (s. Abb. 7, S. 16) gilt folgende Entwicklung:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = 4\pi\, i\, k \sum_{l,m} j_l(k\,r')\, h_l^{(1)}(k\,r)\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha)\, Y_{lm}^{*}(\vartheta', \alpha') \quad (r > r'). \qquad \text{(A III.20)}$$

Die Funktionen $z_l(k\,r)\, Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ sind spezielle Lösungen der Wellengleichung

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$$

für monochromatische Wellen. Dieser Gleichung genügen auch Superpositionen der genannten Funktionen.

LITERATUR

(Ergänzungen siehe S. 475)

[18] Dwight, H. B.: Tables of Integrals and Other Mathematical Data. Macmillian & Co. Ltd., London–New York 1957.

[21] Emde, F.: Tafeln elementarer Funktionen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 3. Aufl. Leipzig 1959; Jahnke, E., und F. Emde: Tafeln höherer Funktionen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 5. Aufl. Leipzig 1960.

[29] Gelfand, I. M., R. A. Minlos und Z. Ya. Shapiro: Representations of the Rotation and Lorentz Group and their Applications. Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris 1962.

[38] Gray, E., G. B. Mathews und T. M. MacRobert: A Treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics. Macmillan & Co. Ltd., 2. Aufl. London 1922.

[45] Hobson, E. W.: Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. University Press, Cambridge 1931.

[46] Iwanenko, D., und A. Sokolow: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1953 (Übers. aus dem Russ.).

[57] Lebedew, N. N.: Spezielle Funktionen und ihre Anwendungen. Gostechisdat, Moskau 1953 (*Н. Н. Лебедев*: Специальные функции и их приложения).

[71] Roset, T. A.: Elemente der Theorie der Zylinderfunktionen mit Anwendungen auf die Nachrichtentechnik. Sowjetskoe Radio, Moskau 1956 (*Г. А. Розет*: Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике).

[72] Ryshik, I. M., und I. S. Gradstein: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 2. Aufl. Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[83] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.

LITERATUR

[1] Achieser, A. I., W. G. Barjachtar und M. I. Kaganow: Spinwellen in Ferromagnetika und Antiferromagnetika. Usp. fis. Nauk **71** (1960), S. 533 (russ.).

[2] Achieser, A. I., und W. B. Berestezki: Quantenelektrodynamik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962 (Übers. aus dem Russ.).

[3] Achieser, A. I., und Ja. B. Fainberg: Langsame elektromagnetische Wellen. Usp. fis. Nauk **44** (1951), S. 321 (russ.).

[4] Alfvén, H.: Cosmical Electrodynamics. Clarendon Press, Oxford 1950.

[5] Alpert, Ja. L., W. L. Ginsburg und E. L. Feinberg: Ausbreitung von Radiowellen. Gostechisdat, Moskau 1953 (*Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург* и *Е. Л. Фейнберг:* Распространение радиоволн).

[6] Baldin, A. M., W. I. Goldanski und I. L. Rosental: Kinematik der Kernreaktionen. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[7] Bateman, H.: The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion. Dover Publishers Inc., London 1955.

[8] Bateman, H., A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger und F. Tricomi: Higher Transcendental Functions, Bd. 1 und 2. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1953.

[9] Becker, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. 2: Elektronentheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig–Berlin 1933.

[10] Becker, R., und F. Sauter: Theorie der Elektrizität, Bd. 1 und 2. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1957.

[11] Bergmann, P. G.: Introduction to the Theory of Relativity. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs/N.J. 1942.

[12] Bolotowski, B. M.: Theorie des Tscherenkow-Effekts. Usp. fis. Nauk **62** (1957), S. 201 (russ.).

[13] Born, M.: Ein Besuch bei den Raumfahrern und das Uhrenparadoxon. Phys. Blätter **14** (1957), S. 207.

[14] Born, M.: Optik. Springer-Verlag, Berlin 1933.

[15] Brillouin, L., und M. Parodi: Propagation des ondes dans les milieux périodiques. Dunod, Paris 1956.

[16] Broglie, L. de: Ondes électromagnétiques centimétriques. Dunod, Paris 1948.

[17] Budak, B. M., A. A. Samarski und A. N. Tychonoff: Aufgabensammlung zur mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1956 (*Б. М. Будак, А. А. Самарский* и *А. Н. Тихонов:* Сборник задач по математической физике).

[18] Dwight, H. B.: Tables of Integrals and Other Mathematical Data. Macmillan & Co. Ltd., London–New York 1957.

[19] Eichenwald, A. A.: Theoretische Physik, Teil 6: Das elektromagnetische Feld. GONTI, Moskau 1931 (*А. А. Эйхенвальд:* Теоретическая физика, ч. 6: Электромагнитное поле).

[20] Einstein, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956.

[21] Emde, F.: Tafeln elementarer Funktionen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 3.Aufl. Leipzig 1959; Jahnke, E., und F. Emde: Tafeln höherer Funktionen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 5. Aufl. Leipzig 1960.

[22] FERMI, E.: Ionisation Energy Losses in Gases and Condensed Media. Phys. Rev. 57 (1940), S. 485.

[23] FOCK, V.: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Akademie-Verlag, Berlin 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[24] FRANK, I. M.: Optik der in brechenden Medien bewegten Lichtquellen. Usp. fis. Nauk 68 (1959), S. 397 (russ.).

[25] FRENKEL, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 1: Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Springer-Verlag, Berlin 1926 (Übers. aus dem Russ.); Ausgewählte Werke Bd. 1. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1956 (Собрание избранных трудов, т. I).

[26] FRENKEL, J. I.: Elektrodynamik, Bd. 2: Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper. Springer-Verlag, Berlin 1928 (Übers. aus dem Russ.).

[27] FRÖHLICH, H.: Theory of Dielectrics, Dielectric Constant and Dielectric Loss. Clarendon Press, Oxford 1958.

[28] GELFAND, I. M.: Vorlesungen über lineare Algebra. Gostechisdat, Moskau 1951 (*И. М. Гельфанд:* Лекции по линейной алгебре).

[29] GELFAND, I. M., R. A. MINLOS und Z. YA. SHAPIRO: Representations of the Rotation and LORENTZ Group and their Applikations. Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris 1962.

[30] GINSBURG, W. L.: Einige Fragen der Strahlungstheorie bei Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit im Medium. Usp. fis. Nauk 69 (1959), S. 537 (russ.).

[31] GINSBURG, W. L., und I. M. FRANK: Die beim Übergang eines gleichförmig bewegten Elektrons aus einem Medium in ein anderes entstehende Strahlung. J. eksp. teor. Fis. 16 (1946), H. 1 (russ.).

[32] GINSBURG, W. L., und I. M. FRANK: Über den DOPPLER-Effekt bei Überlichtgeschwindigkeit. Dokl. Akad. Nauk SSSR 56 (1947), H. 6 (russ.).

[33] GINSBURG, W. L., und G. P. MOTULEWITSCH: Optische Eigenschaften von Metallen. Usp. fis. Nauk 44 (1951), S. 321 (russ.).

[34] GOLDSCHTEIN, L. D., und N. W. SERNOW: Elektromagnetische Felder und Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1956 (*Л. Д. Гольдштейн* и *Н. В. Зернов:* Электромагнитные поля и волны).

[35] GOLDSTEIN, H.: Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading/Mass. 1953 (Dtsch. Übers.: Klassische Mechanik. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt/Main 1963).

[36] GORELIK, G. S.: Schwingungen und Wellen. Fismatgis, Moskau 1959 (*Г. С. Горелик:* Колебания и волны).

[37] GOWORKOW, W. A., und S. D. KUPALJAN: Theorie des elektromagnetischen Feldes in Übungen und Aufgaben. Sowjetskoe Radio, Moskau 1957 (*В. А. Говорков* и *С. Д. Купалян:* Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах).

[38] GRAY, A., G. B. MATHEWS und T. M. MACROBERT: A Treatise on BESSEL Functions and their Applications to Physics. Macmillan & Co. Ltd., 2. Aufl. London 1922.

[39] GRINBERG, A. P.: Methoden der Beschleunigung geladener Teilchen. Gostechisdat, Moskau 1950 (*А. П. Гринберг:* Методы ускорения заряженных частиц).

[40] GRINBERG, G. A.: Ausgewählte Probleme der mathematischen Theorie elektrischer und magnetischer Erscheinungen. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1948 (*Г. А. Гринберг:* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений).

[41] GUREWITSCH, A. G.: Hohlraumresonatoren und Hohlleiter. Sowjetskoe Radio, Moskau 1952 (*А. Г. Гуревич:* Полые резонаторы и волноводы).

[42] GUREWITSCH, A. G.: Ferrite für höchste Frequenzen. Fismatgis, Moskau 1960 (*А. Г. Гуревич:* Ферриты на сверхвысоких частотах).
[43] GUREWITSCH, L. E.: Elektrodynamik. Verlag der Staatlichen Universität Leningrad, Leningrad 1940 (*Л. Э. Гуревич:* Электродинамика).
[44] HEITLER, W.: The Quantum Theory of Radiation. Clarendon Press, Oxford 1954.
[45] HOBSON, E. W.: Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. University Press, Cambridge 1931.
[46] IWANENKO, D., und A. SOKOLOW: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1953 (Übers. aus dem Russ.).
[47] JELLEY, J. V.: ČERENKOV Radiation and its Applications. Pergamon Press, London–New York–Paris 1958.
[48] KELMAN, W. M., und S. JA. JAWOR: Elektronenoptik. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1959 (*В. М. Кельман* и *С. Я. Явор:* Электронная оптика).
[49] KITTEL, CH.: Introduction to Solid State Physics. John Wiley & Sons Inc., New York 1953.
[50] KOMPANEYETS, A. S.: Theoretical Physics. Foreign Languages Publishing House, Moscow 1961.
[51] KONTOROWITSCH, M. I.: Operatorenrechnung und nichtstationäre Erscheinungen in elektrischen Ketten. Gostechisdat, Moskau 1955 (*М. И. Конторович:* Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях).
[52] KOTSCHIN, N. E.: Vektorrechnung und Anfangsgründe der Tensorrechnung. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1951 (*Н. Е. Кочин:* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления).
[53] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHIZ: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).
[54] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHIZ: Mechanik. Akademie-Verlag, Berlin 1962 (Übers. aus dem Russ.).
[55] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSHITZ: Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press, London–New York–Paris 1960 (Übers. aus dem Russ.).
[56] LANDAU, L. D., und E. M. LIFSHITZ: On the Theory of the Dispersion of Magnetic Permeability in Ferromagnetic Bodies. Phys. Z. Sowjetunion **8** (1935), S. 153.
[57] LEBEDEW, N. N.: Spezielle Funktionen und ihre Anwendungen. Gostechisdat, Moskau 1953 (*Н. Н. Лебедев:* Специальные функции и их приложения).
[58] LEBEDEW, N. N., I. P. SKALSKAJA und JA. S. UFLJAND: Aufgabensammlung zur mathematischen Physik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская* и *Я. С. Уфлянд:* Сборник задач по математической физике).
[59] LEFFERT, C. B., und T. M. DONAHNE: Clock Paradox and the Physics of Discontinuous Gravitational Fields. Amer. J. Phys. **26** (1958), S. 515.
[60] LIVINGSTON, M. S.: High-Energy Accelerators. Interscience Publishers Inc., New York 1954.
[61] MANDELSCHTAM, L. I.: Gesammelte Werke, Bd. 5: Vorlesungen über Relativitätstheorie. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1950 (*Л. И. Мандельштам:* Полное собрание трудов, т. V: Лекции по теории относительности).
[62] MARX, G., und G. GYÖRGYI: Über den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika. Ann. Phys. (Leipzig) **16** (1955), S. 241.
[63] MIKAELJAN, A. L.: Magnetische Drehung der Polarisationsebene bei Zentimeterwellen. Usp. fis. Nauk **51** (1953), S. 205 (russ.).
[64] MINKOWSKI, H.: Raum und Zeit. Phys. Z. **10** (1909), S. 104.

[65] MORRISON, F.: Nuclear Reactions, in: Experimental Nuclear Physics, herausgeg. von E. SEGRÈ, Bd. 2. John Wiley & Sons Inc., New York 1953.

[66] MORSE, P. M., und H. FESHBACH: Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1953.

[67] PANOFSKY, W., und M. PHILLIPS: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 2. Aufl., Reading/Mass. 1962.

[68] PAULI, W.: Relativitätstheorie, in: Handbuch der Physik, Bd. V/19. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1921.

[69] PETRUNKIN, W. JU.: Elektromagnetische Schwingungen, Teil 3. Verlag des Leningrader Polytechnischen Instituts, Leningrad 1959 (*В. Ю. Петруньким:* Электромагнитные колебания, ч. III).

[70] RAMO, S., und J. R. WHINNERY: Felder und Wellen in der modernen Funktechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1960 (Übers. aus dem Amer.).

[71] ROSET, T. A.: Elemente der Theorie der Zylinderfunktionen mit Anwendungen auf die Nachrichtentechnik. Sowjetskoe Radio, Moskau 1956 (*Т. А. Розет:* Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике).

[72] RYSHIK, I. M., und I. S. GRADSTEIN: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 2. Aufl. Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[73] SCHIFRIN, K. S.: Lichtstreuung in trüben Medien. Gostechisdat, Moskau 1951 (*К. С. Шифрин:* Рассеяние света в мутной среде).

[74] SKATSCHKOW, S. W., L. W. KONSTANTINOW, R. P. STROGANOWA, L. N. JUROWA und E. P. TOPORKOWA: Aufgabensammlung der Kernphysik. VEB Verlag Technik, Berlin 1960 (Übers. aus dem Russ.).

[75] SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 6. Aufl. Berlin 1964 (Übers. aus dem Russ.).

[76] SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 3/1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 4. Aufl. Berlin 1964 (Übers. aus dem Russ.).

[77] SMOLENSKI, G. A., und A. G. GUREWITSCH: Ferromagnetische Halbleiter, in: Halbleiter in Wissenschaft und Technik, herausgeg. von A. F. IOFFE, Bd. 2. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1958 (*Г. А. Смоленский* и *А. Г. Гуревич:* Ферромагнитные полупроводники, в сборнике: Полупроводники в науке и технике, под ред. *А. Ф. Иоффе*).

[78] SMYTHE, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1950.

[79] SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, Bd. 1 und 2. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1951.

[80] SOMMERFELD, A.: Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 4. Aufl. Leipzig 1964.

[81] SOMMERFELD, A.: Optik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 3. Aufl. Leipzig 1964.

[82] SPITZER, L.: Physics of Fully Ionized Gases. Interscience Publishers Inc., New York 1956.

[83] STRATTON, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York–Toronto–London 1941.

[84] TAMM, I. E.: Grundlagen der Elektrizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau 1956 (*И. Е. Тамм:* Основы теории электричества).

[85] TAMM, I. E.: Allgemeine Eigenschaften der von mit Überlichtgeschwindigkeit bewegten Systemen emittierten Strahlung und einige Anwendungen auf die Plasmaphysik. Usp. fis. Nauk 68 (1959), S. 387 (russ.).

[86] Tamm, I. E., und I. M. Frank: Kohärente Strahlung eines schnellen Elektrons im Medium. Dokl. Akad. Nauk SSSR **14** (1937), S. 107 (russ.).

[87] Tychonoff, A. N., und A. A. Samarski: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übers. aus dem Russ.).

[88] Wainschtein, L. A.: Elektromagnetische Wellen. Sowjetskoe Radio, Moskau 1957 (*Л. А. Вайнштейн:* Электромагнитные волны).

[89] Wlassow, A. A.: Makroskopische Elektrodynamik. Gostechisdat, Moskau 1955 (*А. А. Власов:* Макроскопическая электродинамика).

[90] Wolkenstein, M. W.: Molekularoptik. Gostechisdat, Moskau 1951 (*М. В. Волькенштейн:* Молекулярная оптика).

ZUSÄTZLICHE LITERATURHINWEISE

[91] Bergmann, P. G.: Introduction to the Theory of Relativity. Prentice Hall Inc., New York 1953.

[92] Bohm, D.: The Special Theory of Relativity. W. A. Benjamin Inc., New York–Amsterdam 1965.

[93] Born, M., und E. Wolf: Principles of Optics. Pergamon Press, London–New York–Paris–Los Angeles 1959.

[94] Courant, R., und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1 (2. Aufl.) und 2. Springer-Verlag, Berlin 1931 und 1937.

[95] Flügge, S.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 3: Das Maxwellsche Feld. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1961.

[96] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung, Bd. 1 (2. Aufl.) und 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965 und 1959.

[97] Hund, F.: Theoretische Physik, Bd. 2: Theorie der Elektrizität und des Lichts, Relativitätstheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 3. Aufl. Stuttgart 1957.

[98] Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 10. Aufl. Leipzig 1959.

[99] Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. Springer-Verlag, 5. Aufl. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955.

[100] Lagally, M.: Vorlesungen über Vektorrechnung. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 7. Aufl. Leipzig 1964.

[101] Ljubarski, G. J.: Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962 (Übers. aus dem Russ.).

[102] Macke, W.: Elektromagnetische Felder. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1960.

[103] Mierdel, G., und S. Wagner: Aufgaben zur theoretischen Elektrotechnik. VEB Verlag Technik, 2. Aufl. Berlin 1960.

[104] Møller, C.: The Theory of Relativity. Clarendon Press, Oxford 1952.

[105] Neumark, M. A.: Lineare Darstellungen der Lorentz-Gruppe. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963 (Übers. aus dem Russ.).

[106] Papapetrou, A.: Spezielle Relativitätstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

[107] Philippow, E.: Grundlage der Elektrotechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1959.

[108] Philippow, E.: Nichtlineare Elektrotechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1963.

[109] PROMBERGER, M.: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der theoretischen Elektrotechnik. Akademie-Verlag, Berlin 1960.

[110] RASCHEWSKI, P. K.: RIEMANNsche Geometrie und Tensoranalysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übers. aus dem Russ.).

[111] REICHARDT, H.: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.

[112] SCHMEIDLER, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1949.

[113] SCHWANK, F.: Randwertprobleme. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951.

[114] SIMONYI, K.: Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übers. aus dem Ungar.).

[115] TOLSTOW, G. P.: FOURIER-Reihen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (Übers. aus dem Russ.).

[116] WONSOWSKI, S. W.: Moderne Lehre vom Magnetismus. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übers. aus dem Russ.).

[117] ZURMÜHL, R.: Matrizen. Springer-Verlag, 3. Aufl. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1961.

[118] ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik. Springer-Verlag, 4. Aufl. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1963.

SACHVERZEICHNIS